

РЯДЫ ПОЛИА И ПРЕДСТАВИМОСТЬ ФУНКЦИЙ В КОНЕЧНЫХ МОДЕЛЯХ НЕКОТОРЫХ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ТЕОРИЙ

А. С. Машурян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
том 30, № 1, 1995

В статье рассматриваются некоторые формальные теории первого порядка (M -арифметики), имеющие конечные модели и исследуется вопрос о представимости арифметических функций в этих моделях. Вводится понятие ряда Полиа и доказывается, что любая целозначная функция единственным образом разлагается в такой ряд. На языке рядов Полиа характеризуется класс функций, представимых во всех конечных моделях M -арифметик. Рассматривается задача относительно иерархии Гжегорчика в классе примитивно рекурсивных функций.

§1. ВВЕДЕНИЕ

В основе классической теории рекурсии лежит концепция актуально бесконечного натурального ряда и адекватный этой концепции формализм – арифметика Псано. Понятие рекурсивной функции является (если принять тезис Черча) точным эквивалентом понятия эффективно вычислимой функции. Однако, развитие представлений о конструктивности вычислений, связанное с реальными вычислениями и вычислителями (ЭВМ), требует разработки понятий о вычислимости в “реальное время”. В частности, ведутся исследования, имеющие целью нахождение соответствующего подкласса рекурсивных функций. Для сужения класса рекурсивных функций требуется построение формализмов, которые имеют конечные модели и допускают реальные вычисления. Этому требованию удовлетворяют введенные в [12] так называемые M -арифметики и их конечные модели – унары.

В данной статье рассматриваются некоторые формальные теории первого порядка (M -арифметики), имеющие конечные модели и исследуется вопрос о представимости арифметических функций в этих моделях. Вводится понятие ряда Поля и доказывается, что любая целозначная функция единственным образом разлагается в ряд Поля. На языке рядов Поля характеризуется класс функций, представимых во всех конечных моделях M -арифметик. Рассматривается задача о иерархии Гжегорчика в классе примитивно-рекурсивных функций. Доказывается, что классы Гжегорчика не могут быть порождены лишь посредством явных преобразований и суперпозиций абсолютно унарных функций.

§2. M -АРИФМЕТИКИ И ИХ КОНЕЧНЫЕ МОДЕЛИ

Этот и следующий параграфы являются обзором некоторых понятий и результатов из работ [2] и [10] – [12], необходимых для изложения статьи.

Сигнатуру $(c; f^1, f_1^2, f_2^2; =)$, состоящую из предметной константы c , символа f^1 одноместной функции, двух символов f_1^2, f_2^2 двуместных функций и символа предиката равенства, называемых арифметической сигнатурой или языком. Всюду в дальнейшем будем использовать символы 0 вместо c , $'$ вместо f^1 , $+$ вместо f_1^2 и $\cdot$ вместо f_2^2 . Таким образом, в привычных обозначениях арифметический язык задается сигнатурой $\Sigma = (0, ', +, \cdot, =)$.

В [12] построены несколько теорий первого порядка в языке Σ , так называемые M -арифметики. Наименьшей из них является абсолютная арифметика – теория AS . Собственными аксиомами абсолютной арифметики AS являются :

$$1^\circ \quad x_1 = x_2 \rightarrow (x_1 = x_3 \rightarrow x_2 = x_3),$$

$$2^\circ \quad x_1 = x_2 \rightarrow x_1' = x_2',$$

$$3^\circ \quad x_1 + 0 = x_1,$$

$$4^\circ \quad x_1 + x_2' = (x_1 + x_2)',$$

$$5^\circ \quad x_1 \cdot 0 = 0,$$

$$6^\circ \quad x_1 \cdot x'_2 = x_1 \cdot x_2 + x_1,$$

$$7^\circ \quad \Phi(0) \rightarrow (\forall x_1 (\Phi(x_1) \rightarrow \Phi(x'_1)) \rightarrow \Phi(x_1)),$$

где $\Phi(x_1)$ – формула языка Σ со свободной переменной x_1 . Поэтому теория AS отличается от классической арифметики Пеано (системы S , [1], гл. 3) отсутствием следующих аксиом:

$$(P1) \quad 0 \neq x'_1,$$

$$(P2) \quad x'_1 = x'_2 \rightarrow x_1 = x_2,$$

которые мы называем, соответственно, первой и второй аксиомами Пеано. Остальные M -арифметики получаются из AS добавлением одной или двух аксиом Пеано или их отрицаний. Тем самым, одной из M -арифметик является сама система S . Опишем еще так называемые альтернативные M -арифметики $AM1$ и $AM2$:

$$AM1 = AS + (P1) + \neg(P2), \quad AM2 = AS + (P2) + \neg(P1).$$

Ясно, что каждая из альтернативных арифметик не совместима с арифметикой Пеано. С другой стороны, в [12] доказано, притом финитными методами, что $AM1$ и $AM2$ не противоречивы (непротиворечивость арифметики Пеано, как известно, финитными методами недоказуема).

Перейдем к рассмотрению моделей M -арифметик. Рассмотрим часть $\Sigma_0 = \langle 0; ' \rangle$ языка Σ . Любую модель языка Σ_0 будем называть *индукционной моделью*. Таким образом, индукционная модель – это алгебраическая система вида (A, a_0, φ) , где A – непустое множество (носитель системы), $a_0 \in A$ (начало системы), φ – одноместная операция, отображающая A в A (операция следования системы). Индукционная модель – наиболее общая математическая структура, в которой возможно рассмотрение свойства индукции.

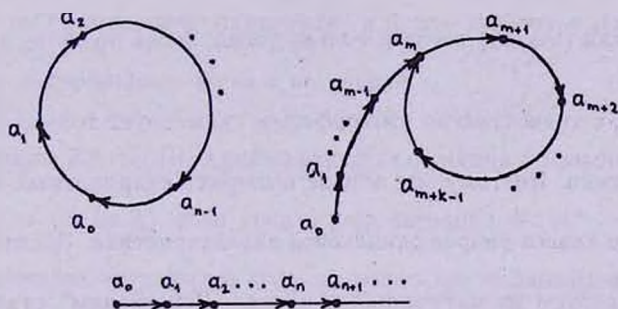
Определение 2.1. Аксиомой индукции для индукционной модели (A, a_0, φ) называется следующее требование: если 1) $X \subset A$, 2) $a_0 \in X$, 3) из $t \in X$ следует $\varphi(t) \in X$, то $X = A$. Индукционная модель, удовлетворяющая своей

аксиоме индукции, называется *унаром*.

В [10] доказана классификационная теорема, позволяющая естественным образом классифицировать унары, а также ввести понятие характеристики унара — носителя его основных свойств.

Условимся унары графически интерпретировать следующим образом : элементы носителя изображаем точками плоскости, из точки M_x , изображающей элемент x , в точку $M_{\varphi(x)}$, изображающую элемент $\varphi(x)$, проводим стрелку. В результате получим некоторый орграф, который назовем орграфом данного унара.

Теперь классификационная теорема формулируется следующим образом :
орграф любого унара является орграфом одного из следующих трех видов :



а) орграф
без хвоста,
с кольцом
длины n

б) орграф
с хвостом
длины m и с
кольцом длины k

в) орграф
без кольца, с
бесконечным хвостом

Соответствующие унары будем называть аналогично — типов а), б) и в). Унару типа а) приписываем характеристику $(0, n)$, унару типа б) — характеристику (m, k) , а унару типа в) — характеристику $(\infty, 0)$. Итак, характеристика унара — упорядоченная пара, первый элемент которой указывает на длину хвоста, а второй — на длину кольца унара.

Как это принято, будем считать что : ∞ больше любого натурального числа, $\infty = \infty$ и что 0 делится на любое натуральное число, в том числе на 0.

Унар типа в) назовем унаром Пеано.

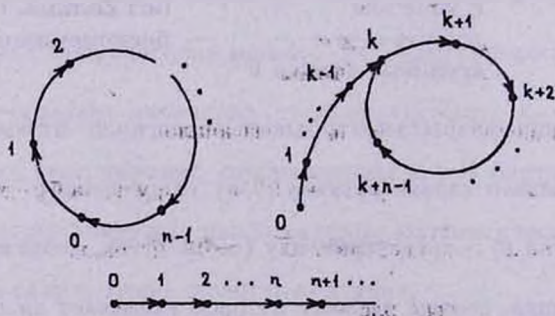
Определение 2.2 [2]. Унар (A, a_0, φ) называется гомоморфным унару (B, b_0, ψ) , если существует отображение (гомоморфизм) $h: A \rightarrow B$, удовлетворяющее тождествам

$$h(a_0) = b_0, \quad h(\varphi(x)) = \psi(h(x)), \quad (x \in A).$$

Теорема о гомоморфизме. ([10]). Унар характеристики (m_1, n_1) гомоморфен унару характеристики (m_2, n_2) тогда и только тогда, когда $m_1 \geq m_2$ и n_1 кратно n_2 . В частности, при $m_1 = \infty, n_1 = 0$ получим, что унары Пеано (и только они) гомоморфны любому другому унару.

Следствие. (Теорема об изоморфизме) Унар характеристики (m_1, n_1) изоморфен унару характеристики (m_2, n_2) тогда и только тогда, когда $m_1 = m_2$ и $n_1 = n_2$.

Таким образом, с точностью до изоморфизма, существует только один унар данной характеристики. Поэтому мы вправе выбирать стандартных “представителей” из каждого класса унаров одинаковой характеристики. Носители стандартных унаров образуем из натуральных чисел. “Перечислим” стандартные унары на языке их геометрических интерпретаций с помощью орграфов:



а) унар ω_n^0
характеристики $(0, n)$

б) унар ω_{k+n}^k
характеристики (k, n)

в) унар ω харак-
теристики $(\infty, 0)$
(унар Пеано)

Замечание. Классификационная теорема унарных была доказана в работе автора [10], ее можно найти также и в [4]. Частный случай теоремы о гомоморфизме ($m_1 = \infty$, $n_1 = 0$) рассматривался Гильбертом (см. добавления [3]) и, согласно замечанию Генкина в [2], доказан еще Кальмаром.

§3. ПРЕДСТАВИМОСТЬ АРИФМЕТИЧЕСКОЙ

ФУНКЦИИ В УНАРЕ

Функцию $f(x_1, \dots, x_n)$ назовем арифметической, если при натуральных значениях аргументов она принимает натуральные значения.

Пусть ω – стандартный унар Пеано, а A – произвольный унар. Обозначим через π_A гомоморфизм унара ω на унар A (существующий по теореме о гомоморфизме из предыдущего параграфа) и будем элемент $\pi_A(x)$, $x \in \omega$, называть проекцией натурального числа x на унар A .

Определение 3.1. ([11]). Арифметическая функция f называется представимой в унаре $A = (A, a_0, \varphi)$, если существует операция $F: A^n \rightarrow A$ такая, что при любых значениях аргументов $x_1, \dots, x_n$ имеет место равенство

$$\pi_A(f(x_1, \dots, x_n)) = F(\pi_A(x_1), \dots, \pi_A(x_n)).$$

Рассмотрим следующие два вопроса :

I. В каких унарах представима данная конкретная функция ?

II. Какие функции представимы во всех унарах ?

Ниже мы установим два критерия, лежащие в основе исследования этих вопросов. Для их формулировки понадобятся следующие понятия.

Определение 3.2. Арифметическая функция $f(x)$ называется :

- 1) k -надаргументной, если при $x \geq k$ имеет место неравенство $f(x) \geq x$;
- 2) надаргументной, если при любом $x \in \omega$ имеет место неравенство $f(x) \geq x$;
- 3) (i, m, n) -периодической, если при любом $k \in \omega$ имеет место сравнимость

$$f(m + i + kn) - f(m + i) \equiv 0 \pmod{n};$$

4) (m, n) -периодической, если при любом $i \in \omega$ функция $f(x)$ является (i, m, n) -периодической;

5) абсолютно периодической, если при любых $m, n \in \omega$ функция $f(x)$ является (m, n) -периодической.

Критерий локальной представимости. Для того, чтобы k -надаргументная функция $f(x)$ была представима в унаре $\mathcal{A}$ характеристики (k, n) , необходимо и достаточно, чтобы $f(x)$ была (k, n) -периодической.

Критерий абсолютной представимости. Для того, чтобы функция $f(x)$ была представима в любом унаре, необходимо и достаточно, чтобы она была надаргументной и абсолютно периодической.

Определение 3.3. Для функций многих переменных будем применять следующий принцип. Пусть C – некоторое свойство арифметической функции. Будем говорить, что функция $f(x_1, \dots, x_n)$ обладает свойством C тогда и только тогда, когда f , как функция одной переменной x_k ($1 \leq k \leq n$) (при фиксированных значениях остальных переменных), обладает свойством C .

Например, критерий абсолютной представимости в многомерном случае выглядит так : для того, чтобы функция $f(x_1, \dots, x_n)$ была представима в любом унаре, необходимо и достаточно, чтобы она при любом k ($1 \leq k \leq n$) была, как функция одного аргумента x_k , надаргументной и абсолютно периодической.

Определение 3.4. Функция, представимая во всех унарах, называется абсолютно-унарно-представимой, или короче, AU -функцией. Класс всех AU -функций обозначается через AU .

Примеры.

Ясно, что функции $x + y$ (сложение) и $x \cdot y$ (умножение) надаргументны по

обоим аргументам. Далее, при любых $i, m, n, k \in \omega$ имеем :

$$[(i + m + kn) + y] - [(i + m) + y] = kn \equiv 0(\text{mod } n),$$

$$[(i + m + kn) \cdot y] - [(i + m) \cdot y] = kny \equiv 0(\text{mod } n),$$

т. е. эти функции периодические по первым аргументам. Легко видеть, что подобным образом эти функции абсолютно периодические и по вторым аргументам.

Следовательно, сложение и умножение являются AU -функциями.

Рассмотрим еще показательно-степенную функцию, заданную следующей рекурсивной схемой :

$$\begin{cases} x^{a_0} = \varphi(a_0) \\ x^{\varphi(y)} = x^y \cdot x. \end{cases} \quad (1)$$

Допустим, что характеристика (m, n) унара (A, a_0, φ) удовлетворяет условию : существует $k \in \omega$ такое, что $n = 2^k$, $k \leq m$. Критерий локальной представимости позволяет легко проверить, что при этом условии функция x^y является (m, n) -представимой.

Таким образом, существует бесконечное множество унаров конечной характеристики, в которых рекурсивная схема (1) реализуема. Этим опровергается утверждение Л. Генкина (см.[2]) о том, что показательно-степенная функция определима только в унаре Пеано.

Определение 3.5. Будем говорить, что функция g получена из функции f явным преобразованием, если $g(y_1, \dots, y_k) = f(x_1, \dots, x_n)$, где каждое x_j ($1 \leq j \leq n$) или константа, или же совпадает с каким-нибудь из аргументов y_i ($1 \leq i \leq k$).

Определение 3.6. Будем говорить, что функция h получена из функций g и f применением оператора суперпозиции, если при некотором $1 \leq i \leq n$

$$h(x_1, \dots, x_{i-1}, y_1, \dots, y_k, x_{i+1}, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_{i-1}, g(y_1, \dots, y_k), x_{i+1}, \dots, x_n).$$

Теорема 3.1. Функциональный класс AU замкнут относительно явного преобразования и оператора суперпозиции.

Доказательство этой теоремы получается прямым применением критерия абсолютной представимости.

§4. О ПРОБЛЕМЕ ГЖЕГОРЧИКА

Свойство абсолютной унарной представимости может быть положено в основу методов решения проблем определенного типа. В качестве иллюстрации этого рассмотрим некоторую проблему, относящуюся к известной иерархии Гжегорчика примитивно-рекурсивных функций. Рассмотрим следующую последовательность функций :

$$f_0(x, y) = y + 1, \quad f_1(x, y) = x + y, \quad f_2(x, y) = (x + 1) \cdot (y + 1),$$

$$f_{n+1}(0, y) = f_n(y + 1, y + 1), \quad f_{n+1}(x + 1, y) = f_{n+1}(x, f_{n+1}(x, y)) \quad \text{для } n \geq 2.$$

k -ым классом Гжегорчика назовем наименьший класс функций Γ_k , $k = 0, 1, \dots$, который содержит функции $s(x) = x + 1$, $u_2^1(x, y) = x$, $u_2^2(x, y) = y$, $f_k(x, y)$ и замкнут относительно явных преобразований оператора суперпозиции и оператора ограниченной рекурсии. При этом, класс функций Φ называется замкнутым относительно оператора ограниченной рекурсии, если при $\varphi, g, h \in \Phi$ выполнение условий

$$a) f(x_1, \dots, x_n, 0) = g(x_1, \dots, x_n),$$

$$б) f(x_1, \dots, x_n, y_{n+1}) = h(x_1, \dots, x_n, y, f(x_1, \dots, x_n, y)),$$

$$в) f(x_1, \dots, x_n, y) \leq \varphi(x_1, \dots, x_n, y),$$

влечет принадлежность f классу Φ .

В [6] Гжегорчиком поставлена следующая проблема : являются ли явные преобразования и суперпозиции достаточными для получения класса Γ_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) ?

В [9] эта проблема трактуется как вопрос о существовании какого-либо конечного базиса (возможно, отличного от данного Гжегорчиком) для этих функциональных классов. В такой трактовке эта проблема решена в положительном

смысле Редингом [7], для $n \geq 3$, и Марченковым [8], для $n = 2$. Однако, эту проблему можно рассматривать и с другой точки зрения. Можно требовать либо сохранения базиса, данного Гжегорчиком, либо, чтобы функции, входящие в новый базис были "проще" функций, входящих в исходный базис. При таком понимании проблемы приобретает важное значение следующая

Теорема 4.1. Ни один класс Гжегорчика невозможно породить только явными преобразованиями и суперпозициями, исходя из (конечного или бесконечного) множества базисных функций, принадлежащих классу AU .

Доказательство. По теореме 3.1 класс AU инвариантен по отношению к явным преобразованиям и суперпозициям. С другой стороны, как известно (см. [6]) функция $x - y$ (усеченная разность) принадлежит всем классам Γ_n .

§5. РАЗЛОЖЕНИЕ ЦЕЛОЗНАЧНОЙ ФУНКЦИИ В РЯД ПОЛЯ

В этом параграфе введен новый способ аналитического представления целозначных функций – понятие ряда Поля, и на "языке" этого ряда охарактеризован класс AU абсолютно-унарно-представимых функций. Сначала рассмотрим одномерный случай.

Определение 5.1. Пусть C – класс функций. Функция f называется *локально C -функцией*, если для любого натурального числа n найдется такая функция $\varphi_n \in C$, что при $0 \leq x \leq n$ выполняется равенство $f(x) = \varphi_n(x)$. Класс C называется *локально-замкнутым*, если он содержит все локально – C -функции.

Теорема 5.1. Класс AU локально замкнут.

Доказательство. Пусть f – локально – AU -функция, $n \in \omega$, $\varphi_{n+1} \in AU$ и $f(x) = \varphi_{n+1}(x)$ при $0 \leq x \leq n$. Так как $\varphi_{n+1}(n) \geq n$, то функция f падаргументна и периодическая. В силу критерия абсолютной представимости заключаем, что $f \in AU$.

Следуя [5], функцию f назовем целозначной, если числа

$$f(0), f(1), \dots, f(n), \dots$$

являются целыми. Полином с целыми коэффициентами назовем целочисленным.

Биномиальные коэффициенты, т. е. функции $\varphi_k(t) = \binom{t}{k} = \frac{t(t-1)\dots(t-k+1)}{k!}$ ($k \in \omega$) являются примерами целозначных, но не целочисленных полиномов. В ряде задач из [5] (раздел 3, гл. 2) установлены следующие свойства полиномов :

1) каждый полином $P(x)$ степени m можно представить в виде

$$P(x) = b_0 \binom{x}{n} + b_1 \binom{x}{n-1} + \dots + b_{m-1} \binom{x}{1} + b_m;$$

2) Полином $P(x)$ является целозначным тогда и только тогда, когда коэффициенты $b_0, b_1, \dots, b_m$ — целые числа.

Обобщением этого результата является

Теорема 5.2. Каждую целозначную функцию $f(x)$ можно единственным образом представить в виде бесконечного ряда

$$f(x) = b_0 + b_1 \binom{x}{1} + b_2 \binom{x}{2} + \dots + b_n \binom{x}{n} + \dots, \quad (2)$$

где коэффициенты — целые числа. И наоборот : функция f , представимая в виде (2) с целыми коэффициентами, целозначна.

Доказательство начнем с достаточности. Пусть $x_0 \in \omega$. Тогда, по предположению

$$f(x_0) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i \binom{x_0}{i},$$

где b_i ($i = 0, 1, \dots$) — целые числа. Но при $n > x_0$ имеем $\binom{x_0}{n} = 0$, следовательно

$f(x_0) = \sum_{i=0}^{x_0} b_i \binom{x_0}{i}$. Далее, принимая во внимание то, что биномиальные коэффициенты — целые числа, заключаем, что $f(x_0)$, как конечная сумма целых чисел,

является целым числом. Доказательством необходимости и единственности разложения в ряд (2) являются нижеприводимые леммы.

Обозначим через T множество всех целозначных функций, представимых в виде (2) с целыми коэффициентами. Для $t \in \omega$ положим $\omega_{t+1} = \{0, 1, \dots, t\}$.

Лемма 5.1. Пусть $t_1, t_2 \in \omega$, и пусть g_1 и g_2 — две функции из T с такими разложениями в ряды Поля, что

$$g_1(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i \binom{x}{i}, \quad g_2(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \binom{x}{i}.$$

Далее, пусть функция f такова, что

$$f = g_1 \text{ на } \omega_{t_1+1} \quad \text{и} \quad f = g_2 \text{ на } \omega_{t_2+2}.$$

Тогда при всех $0 \leq i \leq \min(t_1, t_2)$ имеют место равенства $b_i = c_i$.

Доказательство. По условию имеют место следующие две системы равенств :

$$\left\{ \begin{array}{l} f(0) = g_1(0) = b_0 \\ f(1) = g_1(1) = b_0 + b_1 \\ f(2) = g_1(2) = b_0 + \binom{2}{1} b_1 + b_2 \\ \dots\dots\dots \\ f(t_1) = g_1(t_1) = b_0 + b_1 \binom{t_1}{1} + b_2 \binom{t_1}{2} + \dots + b_{t_1} \end{array} \right. \quad (3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f(0) = g_2(0) = c_0 \\ f(1) = g_2(1) = c_0 + c_1 \\ f(2) = g_2(2) = c_0 + \binom{2}{1} c_1 + c_2 \\ \dots\dots\dots \\ f(t_1) = g_2(t_1) = c_0 + c_1 \binom{t_1}{1} + c_2 \binom{t_1}{2} + \dots + c_{t_1} \\ \dots\dots\dots \\ f(t_2) = g_2(t_2) = c_0 + c_1 \binom{t_2}{1} + c_2 \binom{t_2}{2} + \dots + c_{t_2} \end{array} \right. \quad (4)$$

Рассматривая (3) и (4) как системы линейных уравнений относительно неизвестных $b_0, b_1, \dots, b_{t_1}$ и $c_0, c_1, \dots, c_{t_2}$, соответственно, заметим, что

- 1) коэффициенты обеих систем — целые числа;
- 2) матрицы обеих систем — диагональные, диагонали состоят из единиц;
- 3) детерминанты обеих систем равны 1 (по (2));
- 4) (3) является подсистемой системы (4).

Далее, в силу свойства 3), обе системы определены и их решения, полученные по правилу Крамера, состоят из целых чисел. Теперь утверждение леммы 5.1 вытекает из свойства 4).

Из леммы 5.1 непосредственно следует

Лемма 5.2. Если функция представима в виде (2), то это представление единственно.

Лемма 5.3. Каждая целозначная функция является локально - T -функцией.

Доказательство. Действительно, определяя из системы (3) коэффициенты $b_0, b_1, \dots, b_i$ и приравнявая нулю остальные коэффициенты, найдем конечноразложимую T -функцию, которая совпадает с заданной функцией на отрезке ω_{i+1} натурального ряда.

Лемма 5.4. Класс T локально замкнут.

Доказательство. Пусть f - произвольная локально T -функция, совпадающая на отрезке ω_n с функцией $g_n \in T$. Определяя при каждом n коэффициенты $b_0, b_1, \dots, b_{n-1}$ из (3), получим целые коэффициенты $b_i, i = 0, 1, \dots$. Тогда функция $g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i \left(\frac{x}{i}\right)$ принадлежит классу T . Ясно, что $f = g$, и лемма доказана.

Ясно, что ввиду лемм 5.1 — 5.4 теорема 5.2 полностью доказана.

Замечание. Правая часть представления (2) называется рядом Поля, само представление (2) - разложением f в ряд Поля, а коэффициенты b_i ($i \in \omega$) - коэффициентами Поля функции $f(x)$.

§6. ОПИСАНИЕ КЛАССА AU

В этом параграфе мы дадим описание AU -функций в терминах их коэффициентов Поля. Для этого воспользуемся критерием абсолютной представимости.

Для произвольного натурального числа $k \geq 2$ обозначим через $M_k = \text{LCM}\{2, 3, \dots, k\}$ наименьшее общее кратное совокупности чисел $\{2, 3, \dots, k\}$, и пусть $M_0 = M_1 = 1$.

Теорема 6.1. Надаргументная функция $f(x)$ является абсолютно - унарно-представимой тогда и только тогда, когда k -ый коэффициент ее разложения в

ряд Поля кратен числу M_k , т. е. $a_k \equiv 0 \pmod{M_k}$, где $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \binom{x}{i}$.

Используя определение 3.3, получим критерий абсолютной унарной представимости функции нескольких аргументов.

Теорема 6.2. Функция $f(x_1, \dots, x_n)$ принадлежит классу AU тогда и только тогда, когда коэффициент $a_{i_1 i_2 \dots i_n}$ ее разложения в ряд Поля

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} \dots \sum_{i_n=0}^{\infty} a_{i_1 i_2 \dots i_n} \binom{x_1}{i_1} \binom{x_2}{i_2} \dots \binom{x_n}{i_n}$$

кратен числу $M_{i_1 i_2 \dots i_n} = \text{LCM}\{1, 2, \dots, \max\{i_1, \dots, i_n\}\}$.

Доказательства этих двух теорем основаны на следующих трех леммах.

Лемма 6.1. (Основная лемма) Функции вида $M_k \binom{x}{k}$ с $M_0 = M_1 = 1$, $M_k = \text{LCM}\{2, \dots, k\}$ являются AU -функциями.

Доказательство. Так как $M_0 \binom{x}{0} = 1$, $M_1 \binom{x}{1} = x$, то утверждение достаточно доказать для $k \geq 2$. При этом, принимая во внимание, что $M_k \binom{x}{k}$ — надаргументны, достаточно доказать абсолютную периодичность. Для любых $m, n \in \omega$ установим сравнимость

$$M_k \left[\binom{m+n}{k} - \binom{m}{k} \right] \equiv 0 \pmod{n}. \quad (5)$$

Рассмотрим два случая.

Случай I. M_k кратно n . В этом случае $M_k \binom{x}{k}$ кратно n при любом $x \in \omega$, так как биномиальные коэффициенты — целые числа. В частности, имеем

$$M_k \binom{m+n}{k} \equiv M_k \binom{m}{k} \equiv 0 \pmod{n},$$

и, следовательно сравнимость (5) имеет место.

Случай II. M_k не делится на n . В этом случае среди делителей числа n найдется простое число p такое, что кратность p в разложении n на простые

множители больше его кратности в разложении M_k . Пусть t и r — эти кратности для n и M_k соответственно. Тогда $t > r$, $t \geq 1$ и

$$M_k \left[\binom{m+n}{k} - \binom{m}{k} \right] = M_k \{ (m+n)[(m-1)+n][(m-2)+n] \dots [(m-k+1)+n] - m(m-1) \dots (m-k+1) \} (k!)^{-1} = M_k \frac{\alpha_1 n + \alpha_2 n^2 + \dots + \alpha_i n^i + \dots + \alpha_k n^k}{k!},$$

где α_i , $i = \overline{1, k-1}$ — сумма всевозможных произведений $(k-i)$ сомножителей, взятых из совокупности чисел $\{m, m-1, \dots, m-k+1\}$, а $\alpha_k = 1$. Индукцией по i докажем, что если p делит $k!$ и β — какое-либо слагаемое суммы α_i , то число $\frac{M_k \beta}{k!} n^i$ кратно p^t , где t — предполагаемая кратность p в разложении n . Итак, пусть $\beta = l_1 \cdot l_2 \dots l_{k-1}$, где среди сомножителей отсутствует ровно одно из чисел $\{m, m-1, \dots, m-k+1\}$. Имеем

$$\frac{M_k \beta}{k!} n = M_k \frac{\beta \cdot (m-j)}{k!(m-j)} n,$$

где $m-j$ — отсутствующий сомножитель. Так как числитель есть произведение k последовательных чисел, то он кратен $k!$. Поэтому степень p сокращается.

Предположим теперь, что утверждение имеет место для α_i и докажем его для α_{i+1} . Итак, пусть β' — какое-либо слагаемое из α_i и $\frac{M_k \beta'}{k!} n^i$ кратно p^t . Докажем, что число $\frac{M_k \beta}{k!} n^{i+1}$ всегда кратно p^t , где β — произвольное слагаемое из α_{i+1} .

Пусть в разложении β отсутствует число $\tau \in \{m, m-1, \dots, m-k+1\}$. Поскольку $\beta\tau$ — слагаемое из α_i , то из индуктивного предположения следует, что число $\frac{M_k \beta\tau}{k!} n^i$ кратно p^t . При этом, если τ сокращает некоторую степень p^s , то обязательно $s \leq \tau \leq t$. Поэтому эту степень p^s можно сократить за счет выделенного n . Таким образом, число $\frac{M_k \beta}{k!} n^{i+1}$, а вместе с ним и число α_{i+1} , кратны p^t .

Установим сравнимость

$$M_k \binom{m+n}{k} - M_k \binom{m}{k} \equiv 0 \pmod{p^t}.$$

Разность в левой части этого выражения кратна любой компоненте n , а следовательно, кратна и самому n . Лемма 6.1 доказана.

Пусть T – множество надаргументных функций $f(x)$, коэффициенты a_k ($k = 0, 1, \dots$) которых при разложении в ряд Поля $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \binom{x}{i}$ удовлетворяют условию

$$a_k \equiv 0 \pmod{M_k = \text{LCM}\{2, 3, \dots, k\}}.$$

Лемма 6.2. Класс T локально замкнут.

Доказательство. Пусть функция $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \binom{x}{i}$ T – локальна и на отрезке $[0, t]$, $t \in \omega$

$$f(x) = g(x) \quad \text{для некоторой } g \in T.$$

Достаточно доказать, что $f \in T$. Пусть

$$g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i \binom{x}{i}, \quad b_i \equiv 0 \pmod{M_i}.$$

Поскольку функция $g(x)$ – надаргументна и $f(x) = g(x)$ при $0 \leq x \leq t$, то $f(x)$ тоже надаргументна на $[0, t]$. В силу произвольности t , функция f – надаргументна всюду. Далее, из равенств $f(t) = g(t)$, $f(t) = a_t$, $g(t) = b_t$ и единственности разложения в ряд Поля заключаем, что $a_t = b_t \equiv 0 \pmod{M_t}$.

Так как t произвольно, то лемма 6.2 доказана.

Лемма 6.3. Любая AU -функция T -локальна.

Доказательство. Пусть $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \binom{x}{i}$ – какая-либо AU -функция, $t \in \omega$.

Индукцией по t докажем, что существует такая функция $g_t \in T$, что $f(x) = g_t(x)$ на отрезке $[0, t]$. Случаи $t = 0, 1$ тривиальны, поэтому проверим утверждение при $t = 2$. Пусть

$$h(x) = a_0 + a_1 \binom{x}{1} + \sum_{i=2}^{\infty} M_i \binom{x}{i}, \quad \varphi_2 = f - h.$$

Так как $f \in AU$, то функция f – абсолютно периодическая. Функция h тоже абсолютно периодическая (по лемме 6.1). Поэтому абсолютно периодическая также разность $\varphi_2 = f - h$, откуда следует, что $\varphi_2(2) - \varphi_2(0) \equiv 0 \pmod{2}$. Так как $\varphi_2(0) = 0$, $\varphi_2(2) = a_2 - M_2$, то получаем, что $a_2 - M_2 \equiv 0 \pmod{2}$. Поскольку $M_2 = 2$, то $a_2 \equiv 0 \pmod{2}$.

Пусть $a_2 = 2c_2 = c_2 M_2$ и $g_2(x) = a_0 + a_1 \binom{x}{1} + c_2 M_2 \binom{x}{2} + \sum_{i=3}^{\infty} M_i \binom{x}{i}$. Ясно, что $f(x) = g_2(x)$, при $0 \leq x \leq 2$. Предположим, что требуемое утверждение верно при $t = k$. Докажем, что оно верно и при $t = k + 1$. По предположению имеем T -функцию $g_k(x) = \sum_{i=0}^k a_i \binom{x}{i} + \sum_{i=k+1}^{\infty} b_i \binom{x}{i}$ такую, что $f(x) = g_k(x)$ при $0 \leq x \leq k$. Требуется найти такую T -функцию $g_{k+1}(x)$, чтобы $f(x) = g_{k+1}(x)$ при $0 \leq x \leq k + 1$. Для этого рассмотрим разность $\varphi_{k+1}(x) = f(x) - g_k(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (a_i - b_i) \binom{x}{i}$. Имеем $\varphi_{k+1}(0) = \varphi_{k+1}(1) = \dots = \varphi_{k+1}(k) = 0$. Так как по лемме 6.1 функции f и g_k абсолютно периодические, приходим к заключению, что абсолютно периодична также функция φ_{k+1} . Поскольку $\varphi_{k+1}(k+1) = \varphi_{k+1}[(k+1-i) + i]$ и $\varphi_{k+1}(k+1-i) = 0$ для всех $i = 1, 2, \dots, k+1$, то для всех $i = 1, 2, \dots, k+1$

$$\varphi_{k+1}(k+1) - \varphi_{k+1}(k+1-i) \equiv 0, \quad (\text{mod } i).$$

Поэтому число $\varphi_{k+1}(k+1)$ кратно числам $1, 2, \dots, k+1$, а, следовательно, и их наименьшему общему кратному M_{k+1} . С другой стороны, $\varphi_{k+1}(k+1) = a_{k+1} - b_{k+1}$, $b_{k+1} \equiv 0 \pmod{M_{k+1}}$, а отсюда следует, что a_{k+1} тоже кратно M_{k+1} . Пусть $a_{k+1} = c_{k+1} M_{k+1}$. Положим

$$g_{k+1}(x) = \sum_{i=0}^k a_i \binom{x}{i} + c_{k+1} M_{k+1} \binom{x}{k+1} + \sum_{i=k+2}^{\infty} M_i \binom{x}{i}.$$

Ясно, что $g_{k+1}(x)$ и есть требуемая функция, и лемма 6.3 доказана.

Доказательство теоремы 6.1. Необходимость следует из утверждения леммы 6.3. Докажем достаточность. Пусть $g \in T$, т. е. g — надаргументная функция, разложимая в ряд Поляка вида

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k M_k \binom{x}{k},$$

где c_k ($k = 0, 1, \dots$) — целые числа. Требуется доказать, что g — абсолютно периодическая функция. Пусть m и n — произвольные натуральные числа. Так как

$$g(m+n) - g(m) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k M_k \binom{m+n}{k} - \sum_{k=0}^{\infty} c_k M_k \binom{m}{k}.$$

и $\binom{m+n}{k} = 0$ при $k > m+n$, то достаточно доказать сравнимость

$$\sum_{k=0}^{m+n} c_k M_k \binom{m+n}{k} - \sum_{k=0}^{m+n} c_k M_k \binom{m}{k} \equiv 0 \pmod{n}. \quad (6)$$

По лемме 6.1 функция $g_k(x) = M_k \binom{x}{k}$, $(k = 0, 1, \dots, m+n)$ абсолютно периодические. Поэтому функция

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{m+n} c_k g_k(x),$$

как конечная линейная комбинация абсолютно периодических функций (с целыми коэффициентами), тоже абсолютно периодическая. Это доказывает (6), и теорема 6.1 доказана.

Как непосредственное следствие из теоремы 6.1 получится результат, который в [14] был установлен другим методом.

Следствие 6.1. Класс AU содержит континуум функций.

Доказательство. Обозначим через AU^+ класс всех функций $f(x)$, коэффициенты которых разложения в ряд Поля натуральны :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k M_k \binom{x}{k}, \quad a_k \in \omega \quad (k = 0, 1, \dots). \quad (7)$$

Так как коэффициенты a_k — натуральные числа, то $f(x)$ — надаргументная функция. Следовательно, по теореме 6.1 $f(x) \in AU$, т. е. $AU^+ \subseteq AU$. В силу (7) мощность класса AU^+ равна мощности всех последовательностей, составленных из натуральных чисел, т. е. континууму.

§7. ФОРМАЛЬНАЯ ВЫРАЗИМОСТЬ

АРИФМЕТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В этом параграфе мы займемся изучением наименьшей из M -арифметик с точки зрения возможности представления в ней арифметических функций. Напомним, что M -арифметикой называется теория первого порядка, язык которой содержит сигнатуру $\langle 0, ', +, \cdot, = \rangle$ и среди моделей которой имеется по крайней мере

одна унар. Унары, при этом, будем называть *стандартными моделями*, а остальные модели – нестандартными моделями соответствующей M -арифметики. Существование нестандартных моделей следует из теоремы компактности Мальцева.

Для любого натурального числа n обозначим через $\bar{n}$ терм $0' \dots'$ (n times).

Определение 7.1. Пусть T – некоторая M -арифметика, а f – арифметическая функция k переменных. Функцию f будем называть *выразимой* в T (T -выразимой), если в языке T существует формула Φ от $n + 1$ свободных переменных такая, что если $f(n_1, \dots, n_k) = n$, то

1) в T доказуема формула $\Phi(\bar{n}_1, \dots, \bar{n}_k, \bar{n})$;

2) в T доказуема формула $\exists_1 x \Phi(\bar{n}_1, \bar{n}_2, \dots, \bar{n}_k, x)$, где $\exists_1$ – квантор “существует, причем единственный”.

Будем говорить, что теория T *меньше* теории T' и писать $T < T'$, если языки T и T' совпадают и собственные аксиомы T являются теоремами для T' .

Следующее утверждение очевидно.

Теорема 7.1. Если $T < T'$, то любая T -выразимая функция T' -выразима.

Следствие 7.1. Любая AS -выразимая функция является рекурсивной.

Доказательство. Так как AS меньше арифметики Пеано (т. е. формальной системы S в терминах [1]), то по теореме 7.1 любая AS -выразимая функция также S -выразима. Но S -выразимые функции рекурсивны (см. [1]). Поэтому и AS -выразимые функции будут рекурсивными.

Рассмотрим теперь вопрос: *при каких дополнительных свойствах арифметических функций обеспечивается из AS -выразимости?* Ясно, что для этого рекурсивность – необходимое свойство. Наконец, вместо арифметической функций $f(x_1, \dots, x_k)$ рассмотрим ее график, т. е. $(k + 1)$ -местное отношение $y = f(x_1, \dots, x_k)$.

Ниже будем рассматривать только n -местные отношения R , определенные в множестве натуральных чисел (n -местные арифметические отношения).

Определение 7.2. n -местное арифметическое отношение R называется *выразимым* в арифметике T , если существует формула $\Phi(x_1, \dots, x_n)$ языка T такая, что для любых натуральных чисел $k_1, \dots, k_n$

1) если отношение R истинно, то в T доказуема формула $\Phi(\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_n)$, (т. е. $\Phi(\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_n)$ – теорема);

2) если отношение R ложно, то в T доказуема формула $\neg\Phi(\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_n)$.

Пусть $R(x_1, \dots, x_n)$ – арифметическое отношение, выразимое в абсолютной арифметике формулой $\Phi(x_1, \dots, x_n)$, $\mathcal{A}$ – произвольный унар, а $k_1, \dots, k_n$ – натуральные числа. Предположим, что $R(k_1, \dots, k_n)$ истинно, тогда $\Phi(\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_n)$ доказуема в AS . Но $\mathcal{A}$ – модель для AS , следовательно, интерпретация формулы Φ в унаре $\mathcal{A}$ должна быть истинной на $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, где $a_i = \pi_{\mathcal{A}}(n_i)$, и $\pi_{\mathcal{A}}$ – гомоморфизм стандартного унара Пеано ω на унар $\mathcal{A}$. Ниже мы установим достаточное условие, при котором $\mathcal{A}$ -интерпретация формулы Φ индуцирует некоторое n -местное отношение в $\mathcal{A}$.

Определение 7.3. Пусть $\mathcal{A}$ – унар. n -местное арифметическое отношение R называется *функционально выразимым* в $\mathcal{A}$, если в $\mathcal{A}$ существует такое n -местное отношение R^* , что :

1) если для некоторых элементов $a_1, \dots, a_n$ унара $\mathcal{A}$ отношение R^* ложно, то для любых $\pi_{\mathcal{A}}$ -прообразов этих элементов ложно также отношение R ;

2) если $R^*(a_1, a_2, \dots, a_n)$ истинно, то для любых $\pi_{\mathcal{A}}$ -прообразов $b_1, b_2, \dots, b_{n-1}$ элементов $a_1, \dots, a_{n-1}$ существует такой прообраз b_n элемента a_n , что $R(b_1, \dots, b_n)$ истинно.

Отношение R^* называется $\mathcal{A}$ -выражением отношения R .

Лемма 7.1. Если арифметическое отношение R функционально выражается в

унаре $\mathcal{A}$ отношением R^* , а арифметическая функция f представима в $\mathcal{A}$ операцией f^* , то при любом i , $1 \leq i \leq n$, отношение вида $R(x_1, \dots, x_{i-1}, f(y_1, \dots, y_m), x_{i+1}, \dots, x_n)$ может быть функционально выражено отношением

$$R^*(x_1, \dots, x_{i-1}, f^*(y_1, \dots, y_m), x_{i+1}, \dots, x_n).$$

Доказательство. Пусть $a_1, \dots, a_{i-1}$, $b_1, \dots, b_m$ и $a_{i+1}, \dots, a_n$ такие элементы $\mathcal{A}$, что $R^*(a_1, \dots, a_{i-1}, f^*(b_1, \dots, b_m), a_{i+1}, \dots, a_n)$ ложно, и пусть $c_1, \dots, c_{i-1}$, $d_1, \dots, d_m$, $c_{i+1}, \dots, c_n$ — произвольные $\pi_{\mathcal{A}}$ -прообразы этих элементов, $f^*(b_1, \dots, b_m) = b$, $f(d_1, \dots, d_m) = d$. Так как f^* является $\mathcal{A}$ -представителем f и $\pi_{\mathcal{A}} d_j = b_j$ ($j = 1, \dots, m$), то $\pi_{\mathcal{A}} d = b$. Принимая во внимание, что R^* является $\mathcal{A}$ -выражением R , заключаем, что значение $R(c_1, \dots, c_{i-1}, d, c_{i+1}, \dots, c_n) = R(c_1, \dots, c_{i-1}, f(d_1, \dots, d_m), c_{i+1}, \dots, c_n)$ ложно. Случай, когда $R^*(a_1, \dots, a_{i-1}, f^*(b_1, \dots, b_m), a_{i+1}, \dots, a_n)$ истинно, доказывается аналогично.

Лемма 7.2. Арифметическое отношение равенства в любом унаре функционально выражается отношением равенства этого унара.

Утверждение леммы 7.2 следует из определения функциональной выразимости. Как непосредственное следствие из лемм 7.1 и 7.2 получается

Лемма 7.3. Если арифметическая функция $f(x_1, \dots, x_n)$ представима в унаре $\mathcal{A}$ операцией f^* , то отношение $y = f(x_1, \dots, x_n)$ функционально выражается в $\mathcal{A}$ отношением $y = f^*(x_1, \dots, x_n)$ этого унара. Обратно, если арифметическое отношение $y = f(x_1, \dots, x_n)$ функционально выражается в унаре $\mathcal{A}$ отношением вида $y = f^*(x_1, \dots, x_n)$, то операция f^* является $\mathcal{A}$ -представителем функции f .

Лемма 7.4. Пусть арифметическая функция $f(x_1, \dots, x_n)$ выражается в абсолютной арифметике формулой $\Phi(x_1, \dots, x_n, y)$ и $\mathcal{A}$ — любой унар. Тогда, интерпретация формулы Φ в $\mathcal{A}$ является $(n+1)$ -местным отношением в $\mathcal{A}$ вида $y = f^*(x_1, \dots, x_n)$, где f^* — n -местная операция в $\mathcal{A}$.

Доказательство. В $\mathcal{A}$ определим $(n+1)$ -местное отношение $\Phi^*(x_1, \dots, x_n, y)$

следующим образом. Предположим, что характеристика унара $\mathcal{A}$ равна (l, m) , а $\bar{\omega}$ – стандартный унар характеристики (l, m) . Пусть $a_1, \dots, a_n$ – произвольные элементы унара $\mathcal{A}$, а натуральные числа $k_1, \dots, k_n$ – изоморфные образы этих элементов в $\bar{\omega}$. Далее, пусть $f(k_1, \dots, k_n) = k$ и $\pi_{\mathcal{A}}(k) = a$. Тогда $\Phi^*(a_1, \dots, a_n, a)$ считаем истинным, а для любого элемента b унара $\mathcal{A}$, отличного от a , полагаем, что $\Phi^*(a_1, \dots, a_n, b)$ ложно. Ясно, что определенное таким образом отношение Φ^* является функциональным выражением в $\mathcal{A}$ арифметического отношения $y = f(x_1, \dots, x_n)$. Проверим, что Φ^* совпадает с интерпретацией формулы Φ в $\mathcal{A}$. Предположим, что для некоторых натуральных чисел $k_1, \dots, k_n, k$ в абсолютной арифметике доказуема формула $\Phi(\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_n, \bar{k})$, и пусть $\pi_{\mathcal{A}}$ -образами этих чисел в унаре $\mathcal{A}$ являются $a_1, \dots, a_n, b$. Тогда $f(k_1, \dots, k_n) = k$ и, по определению отношения Φ^* , $\Phi^*(a_1, \dots, a_n, b)$ истинно. Теперь отношением Φ^* определяется n -местная операция f^* унара $\mathcal{A}$ такая, что $\Phi^*(x_1, \dots, x_n, y)$ совпадает с графиком $y = f^*(x_1, \dots, x_n)$ операции f^* . Поэтому, по лемме 7.3 функция f представима в $\mathcal{A}$ операцией f^* , и лемма 7.4 доказана.

Таким образом, доказана следующая

Теорема 7.2. *Любая арифметическая функция, выражимая в абсолютной арифметике, является AU-функцией.*

Из этой теоремы и следствия 7.1 вытекает следующая

Теорема 7.3. *Любая арифметическая функция, выражимая в абсолютной арифметике, является RAU-функцией (рекурсивной AU-функцией).*

ABSTRACT. In this paper we consider some formal first-order theories (M -arithmetics) which have finite models and investigate a question of representability of number-theoretic functions in these models. We introduce a notion of the so-called Polya series and prove that every integer-valued function admits unique Polya-series expansion. In terms of Polya series we characterize the class of functions which are representable in all the finite models of M -arithmetics. We also study a problem concerning to the Gregorchik hierarchy in the class of primitive recursive functions.

ЛИТЕРАТУРА

1. Э. Мендельсон, Введение в математическую логику, Наука, Москва, 1971.
2. Л. Генкин, О математической индукции, Москва, 1962.
3. Д. Гильберт, П. Бернайс, Основания математики : теория доказательств, т. 2, Наука, Москва, 1982.
4. Г. Биркгоф, Т. Барти, Современная прикладная алгебра, Мир, Москва, 1976.
5. Г. Поля, Г. Сеге, Задачи и теоремы из анализа, т. 1, Наука, Москва, 1978.
6. А. Гжегорчик, Некоторые классы рекурсивных функций (в сб. "Проблемы математической логики : сложность алгоритмов и классы вычислимых функций"), Мир, Москва, 1970.
7. D. Rödding, Über die Eliminierbarkeit von Definitionsschemata in der Theorie der rekursiven Funktionen, "Z. Math. Logic und Grundlagen der Math.", vol. 10, № 4, pp. 315 – 330, 1964.
8. С. С. Марченков, "Устранение схем рекурсий в классе $\mathcal{E}^2$ Гжегорчика", Мат. заметки, т. 5, № 5, стр. 561 – 568, 1969.
9. А. А. Мучник, О двух подходах к классификации рекурсивных функций (в сб. "Проблемы математической логики : сложность алгоритмов и классы вычислимых функций"), Мир, Москва, 1970.
10. А. С. Машурян, "О рекурсивных определениях на индукционных моделях", ДАН Арм. ССР, т. 9, № 4, 1974.
11. А. С. Машурян, "Об одном классе примитивно-рекурсивных функций", ДАН Арм. ССР, т. 19, № 4, 1979.
12. А. С. Машурян, "Непротиворечивость некоторых теорий первого порядка", Межвуз. сб. Математика, № 3, Ереван, 1985.
13. А. С. Машурян, "Унарны и функции, представимые в унарах", 4A261 деп. Арм. НИИНТИ, 12.11.91, № 41 – Ар91, 1991.
14. А. С. Машурян, "О классе абсолютно-унарно-представимых функций", Ученые записки ЕГУ, № 1, 1994.

11 октября 1994

Ереванский государственный университет