ОБ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ РАССЕЯНИЯ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОРЯДКА С СУММИРУЕМЫМИ НА ВСЕЙ ОСИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ, II

А. Р. Казарян, И. Г. Хачатрян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 30, № 1, 1995

Рассматривается действующий в пространстве $L^2(-\infty,\infty)$ дифференциальный оператор L порядка $m \geq 3$ с суммируемыми на всей оси комплексными коэффициентами. Исследуются спектр и резольвента а также связь между двумя различными постановками обратных задач рассеяния для оператора L.

§3. СПЕКТР И РЕЗОЛЬВЕНТА

Настоящая статья является продолжением работы [14]. Нумерация параграфов, утверждений, формул и литературы продолжает нумерацию [14].

Методом, использованным в монографии [10], можно доказать, что области определения D и $D^{\#}$ операторов L и $L^{\#}$ соответственно всюду плотны в пространстве $L^2(-\infty,\infty)$. Поэтому существуют сопряженные операторы L^* и $(L^{\#})^*$. Ниже будет доказано, что для некоторого невещественного числа μ существуют определенные на всем пространстве $L^2(-\infty,\infty)$ ограниченные операторы $(L-\mu I)^{-1}$ и $(L^{\#}-\overline{\mu}I)^{-1}$, причем $\left((L-\mu I)^{-1}\right)^* = (L^{\#}-\overline{\mu}I)^{-1}$, где I – единичный оператор. Поэтому операторы L и $L^{\#}$ замкнуты, $L^* = L^{\#}$ и $(L^{\#})^* = L$.

Теорема 3. *Пусть σ – спектр дифференциального оператора L порядка m, а $\sigma_1 = \sigma\setminus\sigma_0$, где $\sigma_0 = [0,\infty)$ при четном m, и $\sigma_0 = (-\infty,\infty)$ при m нечетном. Тогда $\sigma_0 \subseteq \sigma$. При этом, множество σ_1 конечно, либо счетно и ограничено, состоит из собственных значений оператора L и его предельные точки принадлежат σ_0,* *причем для* $\mu \in \sigma_1$ *число* $\overline{\mu}$ *является собственным значением оператора* $L^{\#}$. *Для любого числа* λ *такого, что* $\lambda^m \notin \sigma$, *резольвента* $R_\lambda = (L - \lambda^m I)^{-1}$ *оператора* L *задается формулой*

$$(R_\lambda f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} R(x,t;\lambda) f(t)\, dt, \quad -\infty < x < \infty,$$

в которой $f \in L^2(-\infty,\infty)$ – *произвольная функция, а ядро* $R(x,t;\lambda)$ *определяется равенством*

$$R(x,t;\lambda) = \begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{n(\lambda)-1} y_k(x,\lambda)\overline{z_k(t,\overline{\lambda})}, & t \le x, \\ -\sum\limits_{k=n(\lambda)}^{m-1} y_k(x,\lambda)\overline{z_k(t,\overline{\lambda})}, & t \ge x, \end{cases} \tag{104}$$

где $n(\lambda)$ – *максимальное число линейно независимых решений уравнения (1), суммируемых с квадратом на интервале* $(0,\infty)$, $y_k(x,\lambda)$, $k = 0,1,\ldots,m-1$ – *произвольная фундаментальная система решений уравнения (1) такая, что* $y_k(x,\lambda)$ *при* $0 \le k \le n(\lambda)-1$ *суммируемы с квадратом по* x *на интервале* $(0,\infty)$, *а при* $n(\lambda) \le k \le m-1$ – *на интервале* $(-\infty,0)$. *При этом, функции* $z_k(x,\overline{\lambda})$, $k = 0,1,\ldots,m-1$, *однозначно определяются из соотношений (6) и образуют фундаментальную систему решений уравнения (2) такую, что* $z_k(x,\overline{\lambda})$ *при* $0 \le k \le n(\lambda)-1$ *суммируемы с квадратом по* x *на интервале* $(-\infty,0)$, *а при* $n(\lambda) \le k \le m-1$ – *на интервале* $(0,\infty)$. *Кроме того,* $\overline{\lambda}^m$ *является регулярной точкой оператора* $L^{\#}$, *а для ядра* $R^{\#}(x,t;\overline{\lambda})$ *резольвенты* $R^{\#}_{\overline{\lambda}} = \left(L^{\#} - \overline{\lambda}^m I\right)^{-1}$ *оператора* $L^{\#}$ *справедливо равенство* $R^{\#}(x,t;\overline{\lambda}) = \overline{R(t,x;\lambda)}$.

Доказательство. Приведем доказательство при четном m (при нечетном m доказательство аналогично). Пусть $m = 2m_0$, а $y_k^{\pm}(x,\lambda)$, $k = 0,1,\ldots,m-1$ – указанные в лемме 1 решения уравнения (1), где число $\lambda \ne 0$ такое, что $0 < arg\,\lambda < \frac{2\pi}{m}$. Положим

$$y_k(x,\lambda) = \begin{cases} y_k^{+}(x,\lambda) & \text{при } 0 \le k \le m_0 - 1, \\ y_k^{-}(x,\lambda) & \text{при } m_0 \le k \le m-1, \end{cases} \quad k = 0,1,\ldots,m-1. \tag{105}$$

Из асимптотических равенств (13) следует, что функции $y_k(x,\lambda)$ при $0 \le k \le$ $\le m_0 - 1$ суммируемы с квадратом по x на интервале $(0,\infty)$, а при $m_0 \le k \le$

$\leq m-1$ – на интервале $(-\infty, 0)$. В рассматриваемом случае $n(\lambda) = m_0$. Число λ^m является собственным значением оператора L тогда и только тогда, когда определитель Вронского $W(\lambda)$ системы решений $y_k(x,\lambda)$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$, равен нулю. Легко убедиться в том, что $W(\lambda)$ не зависит от выбора в (105) решений $y_k^{\pm}(x,\lambda)$, обладающих асимптотикой (13). Поэтому $W(\lambda)$ является голоморфной функцией от λ в каждом из секторов $0 < arg\,\lambda < \frac{\pi}{m}$, $\frac{\pi}{m} < arg\,\lambda < \frac{2\pi}{m}$. По лемме 1, функция $W(\lambda)$ непрерывна в секторе $0 < arg\,\lambda < \frac{2\pi}{m}$ и, следовательно, голоморфна в этом секторе. Из асимптотических равенств (15) вытекает, что $W(\lambda) \neq 0$ для достаточно больших по модулю значений λ. Поэтому $W(\lambda)$ может обращаться в нуль лишь на некотором конечном или счетном и ограниченном множестве, не имеющем предельных точек в открытом секторе $0 < arg\,\lambda < \frac{2\pi}{m}$. Пусть λ – точка этого сектора, для которой система решений (105) уравнения (1) линейно независима. Поскольку λ^m не является собственным значением оператора L, существует обратный оператор $R_\lambda = (L - \lambda^m I)^{-1}$. Покажем, что оператор R_λ определен на всем пространстве $L^2(-\infty, \infty)$, ограничен и является интегральным оператором с ядром, определяемым формулой (104). Для этого рассмотрим неоднородное уравнение (4), где f – произвольная финитная функция из $L^2(-\infty, \infty)$. В формуле (5) общего решения $\xi(x,\lambda)$ уравнения (4) возьмем (105) в качестве решений $y_k(x,\lambda)$ однородного уравнения (1), а постоянные c_k определим так, чтобы функция $\xi(x,\lambda)$ была суммируема с квадратом по x на оси $(-\infty, \infty)$. При таком требовании числа c_k определяются однозначно следующим образом :

$$c_k = \int_{-\infty}^{0} \overline{z_k(t,\overline{\lambda})} f(t)\, dt, \quad 0 \leq k \leq m_0 - 1, \tag{106}$$

$$c_k = -\int_{0}^{\infty} \overline{z_k(t,\overline{\lambda})} f(t)\, dt, \quad m_0 \leq k \leq m - 1. \tag{107}$$

Подставив эти представления в (5), получим

$$\xi(x,\lambda) = (R_\lambda f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} R(x,t;\lambda) f(t)\, dt, \tag{108}$$

где ядро $K(x,y;\lambda)$ определяется по формуле (104). Докажем, что в формуле (104) функции $z_k(x,\overline{\lambda})$, определенные из системы уравнений (6), при $0 \le k \le m_0-1$ суммируемы с квадратом по x на интервале $(-\infty,0)$, а при $m_0 \le k \le m-1$ – на интервале $(0,\infty)$. Для этого выразим решения $y_k(x,\lambda)$, $k=0,1,\ldots,m_0-1$, через фундаментальную систему решений $y_k^-(x,\lambda)$, $k=0,1,\ldots,m-1$:

$$y_k(x,\lambda)=\sum_{j=0}^{m-1}\alpha_{kj}(\lambda)y_j^-(x,\lambda),\quad k=0,1,\ldots,m_0-1. \tag{109}$$

Из (105) и линейной независимости системы $y_k(x,\lambda)$, $k=0,1,\ldots,m_0-1$, следует, что

$$det\Big(\alpha_{kj}(\lambda)\Big)_{k,j=0}^{m_0-1}\neq 0. \tag{110}$$

Подставим выражение (109) для функций $y_k(x,\lambda)$ в левую часть соотношения (6) :

$$\sum_{k=0}^{m-1}y_k^{[\nu]}(x,\lambda)\overline{z_k(x,\overline{\lambda})}=\sum_{k=0}^{m_0-1}\sum_{j=0}^{m-1}\alpha_{kj}(\lambda)y_j^{-[\nu]}(x,\lambda)\overline{z_k(x,\overline{\lambda})}+$$
$$+\sum_{k=m_0}^{m-1}y_k^{-[\nu]}(x,\lambda)\overline{z_k(x,\overline{\lambda})}=\sum_{k=0}^{m_0-1}y_k^{-[\nu]}(x,\lambda)\left(\sum_{j=0}^{m_0-1}\alpha_{jk}(\lambda)\overline{z_j(x,\overline{\lambda})}\right)+$$
$$+\sum_{k=m_0}^{m-1}y_k^{-[\nu]}(x,\lambda)\left(\overline{z_k(x,\overline{\lambda})}+\sum_{j=0}^{m_0-1}\alpha_{jk}(\lambda)\overline{z_j(x,\overline{\lambda})}\right).$$

Обозначив

$$w_k^-(x,\overline{\lambda})=\sum_{j=0}^{m_0-1}\overline{\alpha_{jk}(\lambda)}z_j(x,\overline{\lambda}),\quad k=0,1,\ldots,m_0-1, \tag{111}$$

$$w_k^-(x,\overline{\lambda})=z_k(x,\overline{\lambda})+\sum_{j=0}^{m_0-1}\overline{\alpha_{jk}(\lambda)}z_j(x,\overline{\lambda}),\quad k=m_0,m_0+1,\ldots,m-1, \tag{112}$$

получим, что

$$\sum_{k=0}^{m-1}y_k^{[\nu]}(x,\lambda)\overline{z_k(x,\overline{\lambda})}=\sum_{k=0}^{m-1}y_k^{-[\nu]}(x,\lambda)\overline{w_k^-(x,\overline{\lambda})}.$$

Тем самым, соотношения (6) принимают вид

$$\sum_{k=0}^{m-1}y_k^{-[\nu]}(x,\lambda)\overline{w_k^-(x,\overline{\lambda})}=\begin{cases}0 & \text{при } \nu=0,1,\ldots,m-2,\\ i & \text{при } \nu=m-1.\end{cases}$$

Решая эту систему уравнений относительно $\overline{w_k^-(x,\overline{\lambda})}$ с помощью формул Крамера, с учетом асимптотических равенств (13), получим

$$\overline{w_k^-(x,\overline{\lambda})} = e^{-i\omega_k\lambda x}\left(\frac{i\omega_k}{m\lambda^{m-1}} + o(1)\right), \quad x \to -\infty, \quad k = 0,1,\ldots,m-1. \quad (113)$$

Из (111), (113) и (110) следует, что

$$\overline{z_k(x,\overline{\lambda})} = O\left(e^{\gamma(\lambda)x}\right), \quad x \to -\infty, \quad k = 0,1,\ldots,m_0-1, \quad (114)$$

$$\gamma(\lambda) = \min_{0\le s\le m-1} |Re\,(i\lambda\omega_s)| > 0. \quad (115)$$

Отсюда заключаем, что функции $z_k(x,\overline{\lambda})$, $k = 0,1,\ldots,m_0-1$, суммируемы с квадратом по x на интервале $(-\infty,0)$. Из формул (112) – (114) вытекает, что

$$\overline{z_k(x,\overline{\lambda})} = O\left(e^{-i\omega_k\lambda x}\right), \quad x \to -\infty, \quad k = m_0, m_0+1,\ldots,m-1.$$

Теперь при $k = m_0, m_0+1,\ldots,m-1$ выразим решения $y_k(x,\lambda)$ через фундаментальную систему решений $y_k^+(x,\lambda)$, $k = 0,1,\ldots,m-1$:

$$y_k(x,\lambda) = \sum_{j=0}^{m-1} \beta_{kj}(\lambda) y_j^+(x,\lambda), \quad k = m_0, m_0+1,\ldots,m-1. \quad (116)$$

С учетом (105) из линейной независимости системы $y_k(x,\lambda)$, $k = 0,1,\ldots,m-1$, следует, что

$$det\Big(\beta_{kj}(\lambda)\Big)_{k,j=m_0}^{m-1} \neq 0. \quad (117)$$

Подставим выражение (116) в левые части соотношений (6) и введем обозначения

$$w_k^+(x,\overline{\lambda}) = z_k(x,\overline{\lambda}) + \sum_{j=m_0}^{m-1} \overline{\beta_{jk}(\lambda)} z_j(x,\overline{\lambda}), \quad k = 0,1,\ldots,m_0-1, \quad (118)$$

$$w_k^+(x,\overline{\lambda}) = \sum_{j=m_0}^{m-1} \overline{\beta_{jk}(\lambda)} z_j(x,\overline{\lambda}), \quad k = m_0, m_0+1,\ldots,m-1. \quad (119)$$

Тогда соотношения (6) примут вид :

$$\sum_{k=0}^{m-1} y_k^{+[\nu]}(x,\lambda)\overline{w_k^+(x,\overline{\lambda})} = \begin{cases} 0 & \text{при } \nu = 0,1,\ldots,m-2, \\ i & \text{при } \nu = m-1. \end{cases}$$

В силу асимптотических равенств (13)

$$\overline{w_k^+(x,\overline{\lambda})} = e^{-i\omega_k\lambda x}\left(\frac{i\omega_k}{m\lambda^{m-1}} + o(1)\right), \quad x\to\infty, \quad k=0,1,\dots,m-1. \tag{120}$$

Из (119), (120) и (117) получаем

$$\overline{z_k(x,\overline{\lambda})} = O\left(e^{-\gamma(\lambda)x}\right), \quad x\to\infty, \quad k=m_0,m_0+1,\dots,m-1, \tag{121}$$

где число $\gamma(\lambda)$ определено формулой (115). Поэтому функции $z_k(x,\overline{\lambda})$, $k = m_0, m_0+1,\dots,m-1$, суммируемы с квадратом по x на интервале $(0,\infty)$. Из (118), (120) и (121) следует, что

$$\overline{z_k(x,\overline{\lambda})} = O\left(e^{-i\omega_k\lambda x}\right), \quad x\to\infty, \quad k=0,1,\dots,m_0-1.$$

Теперь получим оценку для ядра $R(x,t;\lambda)$. Для этого введем обозначения

$$A_k(x,\lambda) = \begin{cases} e^{-i\omega_k\lambda x}y_k^-(x,\lambda), & -\infty<x\le 0,\\ e^{-i\omega_k\lambda x}y_k^+(x,\lambda), & 0<x<\infty,\end{cases} \qquad k=0,1,\dots,m-1,$$

$$B_k(x,\lambda) = \begin{cases} e^{i\omega_k\lambda x}\overline{w_k^-(x,\overline{\lambda})}, & -\infty<x\le 0,\\ e^{i\omega_k\lambda x}\overline{w_k^+(x,\overline{\lambda})}, & 0<x<\infty,\end{cases} \qquad k=0,1,\dots,m-1,$$

$$C_k(x,\lambda) = \begin{cases} e^{-\gamma(\lambda)x}\overline{z_k(x,\overline{\lambda})}, & -\infty<x\le 0,\\ e^{i\omega_k\lambda x}\overline{z_k(x,\overline{\lambda})}, & 0<x<\infty,\end{cases} \qquad k=0,1,\dots,m_0-1,$$

$$C_k(x,\lambda) = \begin{cases} e^{i\omega_k\lambda x}\overline{z_k(x,\overline{\lambda})}, & -\infty<x\le 0,\\ e^{\gamma(\lambda)x}\overline{z_k(x,\overline{\lambda})}, & 0<x<\infty,\end{cases} \qquad k=m_0,m_0+1,\dots,m-1.$$

В силу полученных асимптотических равенств, функции $A_k(x,\lambda)$, $B_k(x,\lambda)$ и $C_k(x,\lambda)$, $k=0,1,\dots m-1$, ограничены по x на оси $(-\infty,\infty)$. При $t\le x\le 0$, в силу (109) и (111) имеем

$$\left|\sum_{k=0}^{m_0-1} y_k(x,\lambda)\overline{z_k(t,\overline{\lambda})}\right| \le \left|\sum_{k=0}^{m_0-1} y_k^-(x,\lambda)\overline{w_k^-(t,\overline{\lambda})}\right| +$$
$$+\left|\sum_{k=m_0}^{m-1} y_k^-(x,\lambda)\left(\sum_{j=0}^{m_0-1}\alpha_{jk}(\lambda)\overline{z_j(t,\overline{\lambda})}\right)\right| = \left|\sum_{k=0}^{m_0-1} e^{i\omega_k\lambda(x-t)}A_k(x,\lambda)B_k(t,\lambda)\right| +$$
$$+\left|\sum_{k=m_0}^{m-1} e^{i\omega_k\lambda x}e^{\gamma(\lambda)t}A_k(x,\lambda)\left(\sum_{j=0}^{m_0-1}\alpha_{jk}(\lambda)C_j(t,\lambda)\right)\right| \le Q_1(\lambda)e^{\gamma(\lambda)(t-x)},$$

где $Q_1(\lambda)>0$ – некоторое число. При $t\le 0<x$ имеем

$$\left|\sum_{k=0}^{m_0-1} y_k(x,\lambda)\overline{z_k(t,\overline{\lambda})}\right| = \left|\sum_{k=0}^{m_0-1} e^{i\omega_k\lambda x}e^{\gamma(\lambda)t}A_k(x,\lambda)C_k(t,\lambda)\right| \le Q_2(\lambda)e^{\gamma(\lambda)(t-x)}.$$

Если же $0 < t \le x$, то очевидно

$$\left|\sum_{k=0}^{m_0-1} y_k(x,\lambda)\overline{z_k(t,\overline{\lambda})}\right| = \left|\sum_{k=0}^{m_0-1} e^{i\omega_k\lambda(x-t)}A_k(x,\lambda)C_k(t,\lambda)\right| \le Q_3(\lambda)e^{\gamma(\lambda)(t-x)}.$$

Итак, справедлива оценка

$$\left|\sum_{k=0}^{m_0-1} y_k(x,\lambda)\overline{z_k(t,\overline{\lambda})}\right| \le Q_4(\lambda)e^{\gamma(\lambda)(t-x)}, \quad t \le x, \tag{122}$$

где $Q_4(\lambda) > 0$ – некоторое число. Аналогично, используя равенства (116) и (119), получим оценку

$$\left|\sum_{k=m_0}^{m-1} y_k(x,\lambda)\overline{z_k(t,\overline{\lambda})}\right| \le Q_5(\lambda)e^{\gamma(\lambda)(x-t)}, \quad x \le t. \tag{123}$$

Из (122) и (123) следует, что для ядра $R(x,t;\lambda)$ справедлива оценка

$$|R(x,t;\lambda)| \le Q(\lambda)e^{-\gamma(\lambda)|t-x|}, \quad -\infty < x,t < \infty, \tag{124}$$

где $Q(\lambda) > 0$ – некоторое число. Используя оценку (124), докажем, что интегральный оператор R_λ с ядром $R(x,t;\lambda)$ фактически действует на всем пространстве $L^2(-\infty,\infty)$ и ограничен. Действительно, для произвольной функции $f \in L^2(-\infty,\infty)$ имеем

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} R(x,t;\lambda)f(t)\,dt\right| \le Q(\lambda)\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma(\lambda)|t-x|}|f(t)|\,dt.$$

Обозначим

$$g(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|e^{-i\zeta t}\,dt, \quad -\infty < \zeta < \infty.$$

Тогда

$$|f(t)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(\zeta)e^{i\zeta t}\,d\zeta.$$

Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma(\lambda)|x-t|}|f(t)|dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma(\lambda)|x-t|}\int_{-\infty}^{\infty} g(\zeta)e^{i\zeta t}d\zeta\,dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(\zeta)\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma(\lambda)|x-t|}e^{i\zeta t}\,dtd\zeta = \frac{2\gamma(\lambda)}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\zeta)e^{i\zeta x}}{(\gamma(\lambda))^2+\zeta^2}\,d\zeta.$$

Используя равенство Парсеваля, получим

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma(\lambda)|x-t|}|f(t)|\,dt\right|^2 dx =$$
$$= \frac{2(\gamma(\lambda))^2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(\zeta)e^{i\zeta x}}{(\gamma(\lambda))^2+\zeta^2}\,d\zeta\right|^2 dx = 4(\gamma(\lambda))^2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|g(\zeta)|^2}{[(\gamma(\lambda))^2+\zeta^2]^2}\,d\zeta \le$$
$$\le \frac{4}{(\gamma(\lambda))^2}\int_{-\infty}^{\infty}|g(\zeta)|^2 d\zeta = \frac{4}{(\gamma(\lambda))^2}\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2 dt.$$

Следовательно, имеет место неравенство

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_{-\infty}^{\infty} R(x,t;\lambda)f(t)\,dt\right|^2 dx \le \left(\frac{2Q(\lambda)}{\gamma(\lambda)}\right)^2\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2 dt. \qquad (125)$$

Тем самым, ядром $R(x,t;\lambda)$ порождается ограниченный оператор R_λ, определенный на всем пространстве $L^2(-\infty,\infty)$, причем $||R_\lambda|| \le 2Q(\lambda)(\gamma(\lambda))^{-1}$. Проверим равенство

$$(L-\lambda^m I)R_\lambda f = f, \quad f \in L^2(-\infty,\infty). \qquad (126)$$

Для этого рассмотрим неоднородное уравнение (4), где f – произвольная функция из $L^2(-\infty,\infty)$. Учитывая равенства (114) и (121), в формуле (5) общего решения $\xi(x,\lambda)$ уравнения (4) возьмем в качестве постоянных c_k числа (106) и (107). Тогда формула (5) примет вид (108). В силу (125) полученное решение $\xi(x,\lambda)$ суммируемо с квадратом по x на оси $(-\infty,\infty)$. Это означает, что $\xi \in D$, т. е. имеет место равенство (126). Поскольку оператор $L-\lambda^m I$ взаимнооднозначен, в силу (126), для любой функции $\xi \in D$ имеет место равенство $R_\lambda(L-\lambda^m I)\xi = \xi$. Следовательно, $R_\lambda = (L-\lambda^m I)^{-1}$. Заметим также, что правая часть формулы (104) для ядра $R(x,t;\lambda)$ не зависит от выбора решений $y_k(x,\lambda)$ уравнения (1), обладающих требуемыми свойствами.

Повторяя рассуждения, сделанные при выводе равенства (108), можно доказать, что при $\lambda^m > 0$ оператор $L-\lambda^m I$ либо не обратим, либо же его обратный оператор не определен на всем пространстве $L^2(-\infty,\infty)$. Поэтому полуось $[0,\infty)$ принадлежит спектру оператора L. Доказательство остальных утверждений теоремы не представляет труда. Теорема 3 доказана.

Теперь выразим ядро $R(x,t;\lambda)$ через определенные по формуле (72) решения $u_k(x,\lambda), \lambda \in \bar{\Omega}\setminus\bar{G}, k=0,1,\ldots,m-1$, уравнения (1). В силу (34), (35) и (72) имеем

$$u_k^{[\nu]}(x,\lambda) = (\lambda\omega_k)^\nu e^{i\omega_k\lambda x}(1+o(1)), \quad x\to\infty, \quad k,\nu = 0,1,\ldots,m-1, \tag{127}$$

$$u_k^{[\nu]}(x,\lambda) = O\left(e^{i\omega_k\lambda x}\right), \quad x\to-\infty, \quad k,\nu=0,1,\ldots,m-1. \tag{128}$$

Пусть $v(x,\lambda)$ – решение дифференциального уравнения $z^{[m]*} = \lambda^m z$, обладающее всеми свойствами, требуемыми в лемме 2 к решению $u(x,\lambda)$ уравнения (1). Обозначим

$$v_k(x,\lambda) = v(x,\lambda\omega_k), \quad k=0,1,\ldots,m-1.$$

Тогда решения $v_k(x,\overline{\lambda})$ уравнения (2) будут удовлетворять асимптотическим равенствам

$$\overline{v_k(x,\overline{\lambda})} = e^{-i\overline{\omega_k}\lambda x}(1+o(1)), \quad x\to\infty, \quad k=0,1,\ldots,m-1, \tag{129}$$

$$\overline{v_k(x,\overline{\lambda})} = O\left(e^{-i\overline{\omega_k}\lambda x}\right), \quad x\to-\infty, \quad k=0,1,\ldots,m-1. \tag{130}$$

Решения $w_k(x,\overline{\lambda})$, $k=0,1,\ldots,m-1$, уравнения (2) определим из системы уравнений

$$\sum_{k=0}^{m-1} u_k^{[\nu]}(x,\lambda)\overline{w_k(x,\overline{\lambda})} = \begin{cases} 0 & \text{при } \nu = 0,1,\ldots,m-2, \\ i & \text{при } \nu = m-1. \end{cases} \tag{131}$$

Решая эту систему с помощью формул Крамера, с учетом (127) и (128), получим

$$\overline{w_k(x,\overline{\lambda})} = e^{-i\omega_k\lambda x}\left(\frac{i\omega_k}{m\lambda^{m-1}} + o(1)\right), \quad x\to\infty, \quad k=0,1,\ldots,m-1, \tag{132}$$

$$\overline{w_k(x,\overline{\lambda})} = O\left(e^{-i\omega_k\lambda x}\right), \quad x\to-\infty, \quad k=0,1,\ldots,m-1. \tag{133}$$

Из равенств (129), (130), (132) и (133) следует, что

$$\overline{w_k(x,\overline{\lambda})} = \frac{i\omega_k}{m\lambda^{m-1}}\overline{v_{m-k}(x,\overline{\lambda})}, \quad k=0,1,\ldots,m-1, \tag{134}$$

где $v_m(x,\overline{\lambda}) = v_0(x,\overline{\lambda})$. Отсюда в частности вытекает, что, если для данного λ существуют решения $u_k(x,\lambda)$ уравнения (1), удовлетворяющие асимптотическим равенствам (127) и (128), то также существуют решения $v_k(x,\overline{\lambda})$ уравнения (2), обладающие асимптотикой (129) и (130). В силу асимптотических равенств (127), (128) и соотношений (131), (134), для значений λ, удовлетворяющих условиям $0<|arg\,\lambda|<\frac{\pi}{m}$ и $\lambda\in\tilde{\Omega}\setminus\tilde{G}$, ядро $R(x,t;\lambda)$ резольвенты оператора L выражается через функции $u_k(x,\lambda)$ и $v_k(x,\overline{\lambda})$ следующим образом : в случае $0<arg\,\lambda<\frac{\pi}{m}$

$$im\,\lambda^{m-1}R(x,t;\lambda)=\begin{cases}-\sum\limits_{k=0}^{m_1}\omega_k u_k(x,\lambda)\overline{v_{m-k}(t,\overline{\lambda})}, & t\le x,\\ \sum\limits_{k=m_1+1}^{m-1}\omega_k u_k(x,\lambda)\overline{v_{m-k}(t,\overline{\lambda})}, & t\ge x,\end{cases}$$

где $m_1=\left[\frac{m-1}{2}\right]$, а в случае $-\frac{\pi}{m}<arg\,\lambda<0$

$$im\,\lambda^{m-1}R(x,t;\lambda)=\begin{cases}-\sum\limits_{k=1}^{m_0}\omega_k u_k(x,\lambda)\overline{v_{m-k}(t,\overline{\lambda})}, & t\le x,\\ \sum\limits_{k=m_0+1}^{m}\omega_k u_k(x,\lambda)\overline{v_{m-k}(t,\overline{\lambda})}, & t\ge x,\end{cases}$$

где $m_0=\left[\frac{m}{2}\right]$ и $\omega_m=\omega_0$, $u_m(x,\lambda)=u_0(x,\lambda)$.

§4. ДВЕ РАЗЛИЧНЫЕ ПОСТАНОВКИ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ РАССЕЯНИЯ

Предположим, что для каждого $\lambda\neq 0$ ($Im\,\lambda\ge 0$) решение $y^+(x,\lambda)$ уравнения (1), обладающее асимптотикой

$$y^+(x,\lambda)=e^{i\lambda x}(1+o(\lambda)),\quad x\to\infty, \tag{135}$$

может быть выбрано так, чтобы функция $y^+(x,\lambda)$ при каждом x была голоморфна по λ в открытой верхней полуплоскости и непрерывна в замкнутой верхней полуплоскости без нуля. Если удовлетворяющая указанным требованиям функция $y^+(x,\lambda)$ существует, то она единственна. Действительно, согласно лемме 1, для каждого $\lambda\neq 0$ из сектора $\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{m}\le arg\,\lambda\le\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{m}$ уравнение (1) имеет лишь одно решение $y^+(x,\lambda)$, обладающее асимптотикой (135). Для каждого x это решение голоморфно по λ в открытом секторе $\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{m}<arg\,\lambda<\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{m}$ и непрерывно на его замыкании без нуля. Если требуемая функция существует, то она для каждого x является аналитическим продолжением по λ решения $y^+(x,\lambda)$ из указанного сектора в верхнюю полуплоскость. Поэтому при существовании она определяется однозначно. Эффективные достаточные условия, налагаемые на коэффициенты $p_k(x)$, $k = 0,1,\dots,m-2$, уравнения (1), при выполнении которых требуемая функция $y^+(x,\lambda)$ существует, можно найти в [11] (см. также [12]). А именно, если на некотором полубесконечном подинтервале (α,∞) вещественной оси каждый из коэффициентов $p_k(x)$, $0 \le k \le m-2$, является сужением голоморфной в секторе $|arg\,(\zeta-\alpha)| < \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{m}$ комплексной ζ–плоскости функции $p_k(\zeta)$, удовлетворяющей оценке

$$\int_0^\infty (1+t^{m-2-k})\,|p_k(t+\zeta)|\,dt \le h_k(Re\,\zeta),$$

где $h_k(x)$ – функция, невозрастающая и суммируемая на интервале (α,∞), то (см. [11]) при каждом λ $(Im\,\lambda \ge 0)$ дифференциальное уравнение (1) имеет решение

$$y^+(x,\lambda) = e^{i\lambda x}\left\{1 + \int_0^\infty e^{i\lambda t}K(x,t)\,dt\right\}, \quad x \ge \alpha. \tag{136}$$

При любом $t \ge 0$ функция $K(\zeta,t)$, голоморфная по ζ в рассматриваемом секторе, такова, что

$$|K(\zeta,t)| \le h\left(Re\,\zeta + \frac{t}{2}\right),$$

где $h(x)$ – невозрастающая суммируемая на интервале (α,∞) функция, строящаяся с помощью функций $h_k(x)$, $k = 0,1,\dots,m-2$. Представление (136) использовано в работах [5] – [7], [13] для решения обратных задач рассеяния. Введенная в работе [5] матрица рассеяния отличается от матрицы рассеяния (74). Целью настоящего параграфа является выяснение связи между этими матрицами.

Предположим, что существует решение $y^+(x,\lambda)$ $(Im\,\lambda \ge 0,\ \lambda \ne 0)$ уравнения (1), указанное в начале этого параграфа (условия его существования в дальнейшем изложении не будут существенны). Рассмотрим введенные в §2 решения $u_k(x,\lambda)$, $\lambda \in \bar{\Omega} \setminus \bar{G}$ и $u_k^\pm(x,\lambda)$, $\lambda \in \bar{l} \setminus \bar{G}'$, $k = 0,1,\dots,m-1$, уравнения (1) (см.

формулы (72), (73)). При $Im(\lambda\omega_k) \geq 0$ имеют место представления

$$u_k(x,\lambda) = y^+(x,\lambda\omega_k) + \sum_{s\in M_k^+(\lambda)} a_{ks}(\lambda) y^+(x,\lambda\omega_s), \quad \lambda \in \tilde{\Omega}\setminus\tilde{G}, \tag{137}$$

$$u_k^+(x,\lambda) = y^+(x,\lambda\omega_k) + \sum_{s\in M_k^+(\lambda\omega)} b_{ks}(\lambda) y^+(x,\lambda\omega_s), \quad \lambda \in \tilde{\ell}\setminus\tilde{G}', \tag{138}$$

$$u_k^-(x,\lambda) = y^+(x,\lambda\omega_k) + \sum_{s\in M_k^+(\lambda\overline{\omega})} c_{ks}(\lambda) y^+(x,\lambda\omega_s), \quad \lambda \in \tilde{\ell}\setminus\tilde{G}'. \tag{139}$$

Пусть открытый сектор Ω', имеющий вершину в нуле и ограниченный лучами ℓ^+ и ℓ^-, является одной из связных компонент открытого множества $\tilde{\Omega}$. Для определенности предположим, что сектор Ω' расположен в правой полуплоскости, а $arg\,\lambda_1 < arg\,\lambda_2$ для любых $\lambda_1 \in \ell^+$ и $\lambda_2 \in \ell^-$. Тогда, если целое число k $(0 \leq k \leq m-1)$ таково, что сектор $\omega_k\Omega' = \{\omega_k\lambda \,:\, \lambda \in \Omega'\}$ расположен в верхней полуплоскости, то в представлении (137) все функции $a_{ks}(\lambda)$ голоморфны на открытом множестве $\Omega'\setminus\tilde{G}$ и, когда $\lambda' \in \Omega'\setminus\tilde{G}$ стремится к $\lambda \in (\ell^+\cup\ell^-)\setminus\tilde{G}'$, существуют пределы

$$\lim_{\lambda'\to\lambda} u(x,\lambda') = u^+(x,\lambda), \quad \lim_{\lambda'\to\lambda} a_{ks}(\lambda') = a_{ks}^+(\lambda), \quad \lambda \in \ell^+\setminus\tilde{G}', \tag{140}$$

$$\lim_{\lambda'\to\lambda} u(x,\lambda') = u^-(x,\lambda), \quad \lim_{\lambda'\to\lambda} a_{ks}(\lambda') = a_{ks}^-(\lambda), \quad \lambda \in \ell^-\setminus\tilde{G}'. \tag{141}$$

При этом, имеют место равенства

$$a_{ks}^+(\lambda) = b_{ks}(\lambda), \quad \lambda \in \ell^+\setminus\tilde{G}', \tag{142}$$

$$a_{ks}^-(\lambda) = c_{ks}(\lambda), \quad \lambda \in \ell^-\setminus\tilde{G}', \tag{143}$$

где $b_{ks}(\lambda)$ и $c_{ks}(\lambda)$ – коэффициенты из представлений (138) и (139). Таким образом, функции $b_{ks}(\lambda)$, $\lambda \in \ell^+\setminus\tilde{G}'$, и $c_{ks}(\lambda)$, $\lambda \in \ell^-\setminus\tilde{G}'$, являются граничными значениями голоморфной функции $a_{ks}(\lambda)$, $\lambda \in \Omega'\setminus\tilde{G}$. Поэтому функции $b_{ks}(\lambda)$ и $c_{ks}(\lambda)$ однозначно определяют друг друга.

Если в секторе $\omega_k\Omega'$ содержится точка из верхней полуплоскости, то, в случае, когда порядок m дифференциального уравнения (1) четный, и этот сектор целиком лежит в верхней полуплоскости. В случае нечетного m либо сектор $\omega_k\Omega'$ целиком содержится в верхней полуплоскости, либо же его биссектриса лежит на вещественной оси. В последнем случае сектор Ω' разбивается своей биссектрисой ℓ' на два открытых сектора Ω^+ и Ω^-, ограниченных лучами ℓ^+, ℓ' и ℓ^-, ℓ' соответственно. Один из секторов $\omega_k\Omega^+$ и $\omega_k\Omega^-$ содержится в верхней полуплоскости. Если это $\omega_k\Omega^+$, то в представлении (137) коэффициенты $a_{ks}(\lambda)$ голоморфны на открытом множестве $\Omega^+\setminus\bar{G}$, непрерывны на множестве $(\Omega^+\cup\ell')\setminus\bar{G}$, существуют пределы (140) и имеет место равенство (142). Следовательно, каждая из функций $a_{ks}(\lambda)$, $\lambda\in\ell'\setminus\bar{G}$, и $b_{ks}(\lambda)$, $\lambda\in\ell^+\setminus\bar{G}'$, однозначно определяется другой. Если же сектор $\omega_k\Omega^-$ содержится в верхней полуплоскости, то функции $a_{ks}(\lambda)$ голоморфны на открытом множестве $\Omega^-\setminus\bar{G}$ и непрерывны на множестве $(\Omega^-\cup\ell')\setminus\bar{G}$. При этом, существуют пределы (141) и имеет место равенство (143). В этом случае каждая из функций $a_{ks}(\lambda)$, $\lambda\in\ell'\setminus\bar{G}$, и $c_{ks}(\lambda)$, $\lambda\in\ell^-\setminus\bar{G}'$, однозначно определяется другой.

В дальнейшем матричную функцию рассеяния (74) будем рассматривать лишь на лучах ℓ_{m_0} и ℓ_{m_0+1}, где $m_0=\left[\frac{m}{2}\right]$, т. е. в случае четного m – на лучах $arg\,\lambda=0$ и $arg\,\lambda=\frac{\pi}{m}$, а в случае нечетного m – на лучах $arg\,\lambda=-\frac{\pi}{2m}$ и $arg\,\lambda=\frac{\pi}{2m}$.

Рассмотрим следующие элементы матричной функции рассеяния (74) :

$$S_{k,m_1+1-k}(\lambda),\quad \lambda\in\ell_{m_0}\setminus\bar{G}',\quad k=1,\dots,m_1,\quad Re(\lambda\omega_k)\neq 0, \tag{144}$$

$$S_{k,m_1-k}(\lambda),\quad \lambda\in\ell_{m_0+1}\setminus\bar{G}',\quad k=0,\dots,m_1,\quad Re(\lambda\omega_k)\neq 0, \tag{145}$$

где $m_1=\left[\frac{m-1}{2}\right]$. В случае нечетного m рассмотрим также коэффициенты

$$b_{m_0,s-1}(\lambda),\quad c_{0s}(\lambda),\quad \lambda\in\ell_{m_0+1}\setminus\bar{G}',\quad s=1,\dots,m_1 \tag{146}$$

из представлений (138), (139) решений $u^+_{m_0}(x,\lambda)$ и $u^-_0(x,\lambda)$, $\lambda\in\ell_{m_0+1}\setminus\bar{G}'$, а в случае четного m – коэффициенты

$$b_{0,s}(\lambda),\quad c_{m_0s}(\lambda),\quad \lambda\in\ell_{m_0}\setminus\bar{G}',\quad s=1,\dots,m_1, \tag{147}$$

из представлений (138), (139) решений $u_0^+(x,\lambda)$ и $u_{m_0}^-(x,\lambda)$, $\lambda \in \ell_{m_0} \setminus \bar{G}'$.

Лемма 3. *Пусть для каждого $\lambda \neq 0$, $Im\,\lambda \geq 0$, существует решение $y^+(x,\lambda)$ дифференциального уравнения (1) с асимптотикой (135), которое для каждого x голоморфно по λ в открытой верхней полуплоскости и непрерывно в замкнутой верхней полуплоскости без нуля. Тогда коэффициенты (146) и (147) однозначно определяются элементами (144) и (145) матричной функции рассеяния. Обратно, функции (144) и (145) однозначно определяются коэффициентами (146) или (147). Используя равенства (78), (79), (92), (93), (96) и аналитическое продолжение функций, эти коэффициенты (или элементы матричной функции рассеяния) могут быть найдены с помощью последовательного определения коэффициентов $b_{ks}(\lambda)$ и $c_{ks}(\lambda)$ представлений (138) и (139) всех решений $u_k^{\pm}(x,\lambda)$, $\lambda \in (\ell_{m_0} \cup \ell_{m_0+1}) \setminus \bar{G}'$, $Im\,(\lambda\omega_k) > 0$.*

Доказательство. Пусть $m = 4n-1$ или $m = 4n$, где $n \geq 1$. Тогда $m_1 = 2n-1$, и, в силу (92), (93), имеют место равенства :

$$b_{n+\nu,n-\nu}(\lambda) = -S_{n+\nu,n-\nu}(\lambda), \quad c_{n-\nu,n+\nu}(\lambda) = S_{n-\nu,n+\nu}(\lambda),$$
$$\lambda \in \ell_{m_0} \setminus \bar{G}', \quad \nu = 1,\ldots,n-1, \tag{148}$$
$$b_{n+\nu,n-1-\nu}(\lambda) = -S_{n+\nu,n-1-\nu}(\lambda), \quad c_{n-1-\nu,n+\nu}(\lambda) = S_{n-1-\nu,n+\nu}(\lambda),$$
$$\lambda \in \ell_{m_0+1} \setminus \bar{G}', \quad \nu = 0,\ldots,n-1. \tag{149}$$

Функции $b_{n,n-1}(\lambda)$ и $c_{n-1,n}(\lambda)$, $\lambda \in \ell_{m_0+1} \setminus \bar{G}'$, в случае $m = 3$ совпадают с (146), и из равенств (149) получаем, что для $\nu = 0$ эти функции определяются однозначно. В случае $m \geq 4$ функции $b_{n-1,n}(\lambda)$, $\lambda \in \ell_{m_0} \setminus \bar{G}'$, $c_{n-1,n}(\lambda)$, $\lambda \in \ell_{m_0+1} \setminus \bar{G}'$, являются граничными значениями голоморфной функции $a_{n-1,n}(\lambda)$, $\lambda \in \Omega_{m_0} \setminus \bar{G}$, т. е. коэффициента разложения (137) решения $u_{n-1}(x,\lambda)$, $\lambda \in \Omega_{m_0} \setminus \bar{G}$. Имеет место равенство $b_{n+1,n}(\lambda) = b_{n,n-1}(\lambda\omega_1)$, $\lambda \in \ell_{m_0-1} \setminus \bar{G}'$. Функции $b_{n+1,n}(\lambda)$, $\lambda \in \ell_{m_0-1} \setminus \bar{G}'$ и, $c_{n+1,n}(\lambda)$, $\lambda \in \ell_{m_0} \setminus \bar{G}'$, являются граничными значениями голоморфной функции $a_{n+1,n}(\lambda)$, $\lambda \in \Omega_{m_0-1} \setminus \bar{G}$, т. е. коэффициента разложения

(137) решения $u_{n+1}(x,\lambda)$, $\lambda \in \Omega_{m_0-1} \setminus \bar{G}$. В случае $m = 4$ функции $b_{n-1,n}(\lambda)$ и $c_{n+1,n}(\lambda)$, $\lambda \in \ell_{m_0} \setminus \bar{G}'$, совпадают с (147). Вследствие этого они определяются однозначно. В случае $m > 4$, т. е. $n \geq 2$, предположим, что для некоторого ν $(0 \leq \nu \leq n-2)$ функции

$$b_{n+\nu,s-1}(\lambda),\ c_{n-1-\nu,s}(\lambda),\quad \lambda \in \ell_{m_0+1} \setminus \bar{G}',\quad n-\nu \leq s \leq n+\nu, \tag{150}$$

определяются однозначно по элементам (144) и (145) матричной функции рассеяния (в силу (149) при $\nu = 0$ это предположение выполняется). Докажем, что тогда однозначно определяются также функции

$$b_{n-1-\nu,s}(\lambda),\quad c_{n+1+\nu,s}(\lambda),\quad \lambda \in \ell_{m_0} \setminus \bar{G}',\quad n-\nu \leq s \leq n+\nu, \tag{151}$$

$$b_{n+1+\nu,s-1}(\lambda),\quad c_{n-1-\nu,s}(\lambda),\quad \lambda \in \ell_{m_0} \setminus \bar{G}',\quad n-\nu \leq s \leq n+1+\nu, \tag{152}$$

$$b_{n-2-\nu,s}(\lambda),\quad c_{n+1+\nu,s}(\lambda),\quad \lambda \in \ell_{m_0+1} \setminus \bar{G}',\quad n-1-\nu \leq s \leq n+\nu, \tag{153}$$

$$b_{n+1+\nu,s-1}(\lambda),\quad c_{n-2-\nu,s}(\lambda),\quad \lambda \in \ell_{m_0+1} \setminus \bar{G}',\quad n-1-\nu \leq s \leq n+1+\nu. \tag{154}$$

Действительно, для каждого s $(n-\nu \leq s \leq n+\nu)$ функции $b_{n-1-\nu,s}(\lambda)$, $\lambda \in \ell_{m_0} \setminus \bar{G}'$, и $c_{n-1-\nu,s}(\lambda)$, $\lambda \in \ell_{m_0+1} \setminus \bar{G}'$, являются граничными значениями голоморфной функции $a_{n-1-\nu,s}(\lambda)$, $\lambda \in \Omega_{m_0} \setminus \bar{G}$, т. е. одного из коэффициентов представления (137) решения $u_{n-1-\nu}(x,\lambda)$, $\lambda \in \Omega_{m_0} \setminus \bar{G}$. Поэтому

$$b_{n+1+\nu,s}(\lambda) = b_{n+\nu,s-1}(\lambda\omega_1),\quad \lambda \in \ell_{m_0-1} \setminus \bar{G}',$$

и функции $b_{n+1+\nu,s}(\lambda)$, $\lambda \in \ell_{m_0-1} \setminus \bar{G}'$, и $c_{n+1+\nu,s}(\lambda)$, $\lambda \in \ell_{m_0} \setminus \bar{G}'$, являются граничными значениями голоморфной функции $a_{n+1+\nu,s}(\lambda)$, $\lambda \in \Omega_{m_0-1} \setminus \bar{G}$. Таким образом, функции (151) однозначно определены. В силу (78) и (96), при $\lambda \in \ell_{m_0} \setminus \bar{G}'$ и $n-\nu \leq s \leq n+\nu$ имеем

$$c_{n+1+\nu,s}(\lambda) = b_{n+1+\nu,s}(\lambda) + b_{n-1-\nu,s}(\lambda)S_{n+1+\nu,n-1-\nu}(\lambda),$$

$$c_{n-1-\nu,s}(\lambda) = b_{n-1-\nu,s}(\lambda)S_{n-1-\nu,n-1-\nu}(\lambda) + b_{n+1+\nu,s}(\lambda)S_{n-1-\nu,n+1+\nu}(\lambda).$$

Отсюда и из (79) получим

$$b_{n+1+\nu,s}(\lambda) = c_{n+1+\nu,s}(\lambda) - b_{n-1-\nu,s}(\lambda)S_{n+1+\nu,n-1-\nu}(\lambda), \tag{155}$$

$$c_{n-1-\nu,s}(\lambda) = b_{n-1-\nu,s}(\lambda) + c_{n+1+\nu,s}(\lambda) S_{n-1-\nu,n+1+\nu}(\lambda), \quad n-\nu \le s \le n+\nu. \quad (156)$$

Из равенств (148), (155) и (156) следует, что функции (152) однозначно определены. Для каждого s $(n-1-\nu \le s \le n+\nu)$ функции $b_{n+1+\nu,s}(\lambda)$, $\lambda \in \ell_{m_0} \setminus \tilde{G}'$, и $c_{n+1+\nu,s}(\lambda)$, $\lambda \in \ell_{m_0+1} \setminus \tilde{G}'$, являются граничными значениями голоморфной функции $a_{n+1+\nu,s}(\lambda)$, $\lambda \in \Omega_{m_0} \setminus \tilde{G}$, а функции $b_{n-1-\nu,s+1}(\lambda)$, $\lambda \in \ell_{m_0-1} \setminus \tilde{G}'$, и $c_{n-1-\nu,s+1}(\lambda)$, $\lambda \in \ell_{m_0} \setminus \tilde{G}'$, – граничными значениями голоморфной функции $a_{n-1-\nu,s+1}(\lambda)$, $\lambda \in \Omega_{m_0-1} \setminus \tilde{G}$. Отсюда и из равенства

$$b_{n-2-\nu,s}(\lambda) = b_{n-1-\nu,s+1}(\lambda\overline{\omega_1}), \quad \lambda \in \ell_{m_0+1} \setminus \tilde{G}'$$

следует, что однозначно определены также функции (153). По аналогии с выводом (155) и (156), в силу (78), (79) и (96) для $\lambda \in \ell_{m_0+1} \setminus \tilde{G}'$ имеем

$$b_{n+1+\nu,s}(\lambda) = c_{n+1+\nu,s}(\lambda) - b_{n-2-\nu,s}(\lambda) S_{n+1+\nu,n-2-\nu}(\lambda),$$

$$c_{n-2-\nu,s}(\lambda) = b_{n-2-\nu,s}(\lambda) + c_{n+1+\nu,s}(\lambda) S_{n-2-\nu,n+1+\nu}(\lambda), \quad n-1-\nu \le s \le n+\nu.$$

Отсюда и из (149) следует, что функции (154) определены однозначно. Из доказанного утверждения по индукции получаем, что функции (150) определены однозначно для всех ν $(0 \le \nu \le n-1)$. Однако, при $\nu = n-1$ (150) является набором функций

$$b_{2n-1,s-1}(\lambda), \quad c_{0s}(\lambda), \quad \lambda \in \ell_{m_0+1} \setminus \tilde{G}', \quad s = 1, \ldots, 2n-1,$$

совпадающим с (146) в случае $m = 4n-1$. В случае $m = 4n$, при $1 \le s \le 2n-1$, функции $b_{0s}(\lambda)$, $\lambda \in \ell_{m_0} \setminus \tilde{G}'$, и $c_{0s}(\lambda)$, $\lambda \in \ell_{m_0+1} \setminus \tilde{G}'$, являются граничными значениями голоморфной функции $a_{0s}(\lambda)$, $\lambda \in \Omega_{m_0} \setminus \tilde{G}$. Одновременно, имеет место равенство

$$b_{2n,s}(\lambda) = b_{2n-1,s-1}(\lambda\omega_1), \quad \lambda \in \ell_{m_0-1} \setminus \tilde{G}',$$

причем функции $b_{2n,s}(\lambda)$, $\lambda \in \ell_{m_0-1} \setminus \tilde{G}'$, и $c_{2n,s}(\lambda)$, $\lambda \in \ell_{m_0} \setminus \tilde{G}'$, – граничные значения голоморфпой функции $a_{2n,s}(\lambda)$, $\lambda \in \Omega_{m_0-1} \setminus \tilde{G}$. Таким образом, множество функций

$$b_{0s}(\lambda), \quad c_{2n,s}(\lambda), \quad \lambda \in \ell_{m_0} \setminus \tilde{G}', \quad s = 1, \ldots, 2n-1,$$

совпадающее с (147), определено однозначно. В силу равенств (78), (95) и леммы

2 в равенстве (96) функция $S_{kk}(\lambda)$, $\lambda \in \bar{\ell} \setminus \bar{G}'$ может обращаться в нуль лишь на множестве нулевой линейной меры Лебега. Тем самым, вышеприведенные рассуждения обратимы. В результате получаем, что в случаях $m = 4n - 1$ и $m = 4n$ элементы (144) и (145) матричной функции рассеяния однозначно определены набором функций (146) и (147).

Пусть $m = 4n + 1$ или $m = 4n + 2$, где $n \geq 1$. Тогда $m_1 = 2n$ и, в силу (72), (73), справедливы равенства

$$b_{n+1+\nu,n-\nu}(\lambda) = -S_{n+1+\nu,n-\nu}(\lambda), \quad c_{n-\nu,n+1+\nu}(\lambda) = S_{n-\nu,n+1+\nu}(\lambda),$$
$$\lambda \in \ell_{m_0} \setminus \bar{G}', \quad \nu = 0, 1, \ldots, n-1, \qquad (157)$$

$$b_{n+\nu,n-\nu}(\lambda) = -S_{n+\nu,n-\nu}(\lambda), \quad c_{n-\nu,n+\nu}(\lambda) = S_{n-\nu,n+\nu}(\lambda),$$
$$\lambda \in \ell_{m_0+1} \setminus \bar{G}', \quad \nu = 1, \ldots, n. \qquad (158)$$

При $\nu = 0$ из равенства (157) следует, что функции $b_{n+1,n}(\lambda)$ и $c_{n,n+1}(\lambda)$, $\lambda \in \ell_{m_0} \setminus \bar{G}'$ определены однозначно. С помощью аналитического продолжения последних однозначно определяются функции $c_{n+1,n}(\lambda)$, $\lambda \in \ell_{m_0+1} \setminus \bar{G}'$ и $b_{n,n+1}(\lambda)$, $\lambda \in \ell_{m_0-1} \setminus \bar{G}'$. Учитывая равенство $b_{n-1,n}(\lambda) = b_{n,n+1}(\lambda\overline{\omega_1})$, $\lambda \in \ell_{m_0+1} \setminus \bar{G}'$, получаем функции $b_{n-1,n}(\lambda)$ и $c_{n+1,n}(\lambda)$ на луче ℓ_{m_0+1}. Воспользовавшись равенствами (78), (79) и (96) на луче ℓ_{m_0+1} определяем также функции $b_{n+1,n}(\lambda)$ и $c_{n-1,n}(\lambda)$. Таким образом, с учетом (158) однозначно определяется набор функций

$$b_{n+1,n-1}(\lambda), \quad b_{n+1,n}(\lambda), \quad c_{n-1,n}(\lambda), \quad c_{n-1,n+1}(\lambda), \quad \lambda \in \ell_{m_0+1} \setminus \bar{G}', \qquad (159)$$

совпадающий с (146) при $m = 5$. Если $m \geq 6$, то аналитическим продолжением функций (159) однозначно определяется набор функций

$$b_{n-1,n}(\lambda), \quad b_{n-1,n+1}(\lambda), \quad c_{n+2,n}(\lambda), \quad c_{n+2,n+1}(\lambda), \quad \lambda \in \ell_{m_0} \setminus \bar{G}',$$

совпадающий с (147) при $m = 6$. В случае $m > 6$, т. е. $n \geq 2$, предположим, что для некоторого ν $(0 \leq \nu \leq n-2)$ функции

$$b_{n+1+\nu,s}(\lambda), \quad c_{n-\nu,s+1}(\lambda), \quad \lambda \in \ell_{m_0} \setminus \bar{G}', \quad n - \nu \leq s \leq n + \nu, \qquad (160)$$

однозначно определяются элементами (144) и (145) матричной функции рассеяния (ввиду (157) при $\nu = 0$ это предположение выполняется). Повторяя вышеприведенные рассуждения, легко видеть, что функции

$$b_{n-1-\nu,s}(\lambda), \quad c_{n+1+\nu,s}(\lambda), \quad \lambda \in \ell_{m_0+1} \setminus \bar{G}', \quad n-\nu \le s \le n+\nu,$$
$$b_{n+1+\nu,s-1}(\lambda), \quad c_{n-1-\nu,s}(\lambda), \quad \lambda \in \ell_{m_0+1} \setminus \bar{G}', \quad n-\nu \le s \le n+1+\nu,$$
$$b_{n-1-\nu,s}(\lambda), \quad c_{n+2+\nu,s}(\lambda), \quad \lambda \in \ell_{m_0} \setminus \bar{G}', \quad n-\nu \le s \le n+1+\nu,$$
$$b_{n+2+\nu,s}(\lambda), \quad c_{n-1-\nu,s+1}(\lambda), \quad \lambda \in \ell_{m_0} \setminus \bar{G}', \quad n-1-\nu \le s \le n+1+\nu$$

тоже определены однозначно. Из этого утверждения по индукции следует, что функции (160) однозначно определены для всех ν $(0 \le \nu \le n-1)$. При $\nu = n-1$ (160) есть к набор функций

$$b_{2n,s}(\lambda), \quad c_{1,s+1}(\lambda), \quad \lambda \in \ell_{m_0} \setminus \bar{G}', \quad s = 1, \ldots, 2n-1.$$

Аналитическим продолжением этих функций однозначно определяются функции

$$b_{0s}(\lambda), \quad c_{2n,s}(\lambda), \quad \lambda \in \ell_{m_0+1} \setminus \bar{G}', \quad s = 1, \ldots, 2n-1.$$

В силу (78), (79), (96) и (157) этими функциями однозначно определяется набор функций

$$b_{2n,s-1}(\lambda), \quad c_{0s}(\lambda), \quad \lambda \in \ell_{m_0+1} \setminus \bar{G}', \quad s = 1, \ldots, 2n, \tag{161}$$

совпадающий с (146) при $m = 4n+1$. Аналитическим продолжением функций (161) однозначно определяется набор функций

$$b_{0s}(\lambda), \quad c_{2n+1,s}(\lambda), \quad \lambda \in \ell_{m_0} \setminus \bar{G}', \quad s = 1, \ldots, 2n,$$

который совпадает с (147) при $m = 4n+2$. Если приведенные рассуждения провести в обратном порядке, то получим, что при $m = 4n+1$ и при $m = 4n+2$ элементы (144) и (145) матричной функции рассеяния определяются однозначно по наборам функций (146) или (147). Лемма доказана.

В предположении, что выполнены условия леммы 3, в случае нечетного m для каждого вещественного λ $(\lambda \notin G \cup \{0\})$ решение $u(x, \lambda)$ уравнения (1), указанное в лемме 2, представимо в виде

$$u(x,\lambda) = y^+(x,\lambda) + \sum_{s \in M_0^+(\lambda)} a_s(\lambda) y^+(x, \lambda\omega_s), \quad Im\,\lambda = 0, \quad \lambda \notin G \cup \{0\}, \quad (162)$$

где $y^+(x,\lambda)$ – решение уравнения (1), обладающее асимптотикой (135), голоморфное по λ в открытой верхней полуплоскости и непрерывное в замкнутой верхней полуплоскости без нуля.

Лемма 4. *Пусть выполнены условия леммы 3. Тогда в представлении (162) коэффициенты*

$$a_s(\lambda) \ (\lambda > 0, \ \lambda \notin G), \quad a_{m-s}(\lambda) \ (\lambda < 0, \ \lambda \notin G), \quad s = 1, \dots, m_0, \quad (163)$$

однозначно определяются элементами (144) и (145) матричной функции рассеяния (74). Обратно, функции (144) и (145) однозначно определяются коэффициентами (163).

В случае четного m коэффициенты

$$b_{m_0, s-1}(\lambda), \quad c_{0s}(\lambda), \quad \lambda \in \ell_{m_0} \setminus \bar{G}', \quad s = 1, \dots, m_0, \quad (164)$$

разложений (138) и (139) решений $u^+_{m_0}(x,\lambda)$ и $u^-_0(x,\lambda)$, $\lambda \in \ell_{m_0} \setminus \bar{G}'$, уравнения (1) однозначно определяются элементами (144), (145) и $S_{m_0 0}(\lambda)$, $S_{0 m_0}(\lambda)$, $\lambda \in \ell_{m_0} \setminus \bar{G}'$, матричной функции рассеяния (74). Обратно, указанные элементы матричной функции рассеяния однозначно определяются коэффициентами (164).

Доказательство. Пусть m нечетное. Рассмотрим представление (137) решений $u_0(x,\lambda)$, $0 \le arg\,\lambda \le \frac{\pi}{2m}$, $\lambda \notin \bar{G} \cup \{0\}$, и $u_{m_0}(x,\lambda)$, $\frac{\pi}{2m} < arg\,\lambda \le \frac{\pi}{m}$, $\lambda \notin \bar{G} \cup \{0\}$ уравнения(1). В (137) коэффициенты $a_{0s}(\lambda)$ и $a_{m_0, s-1}(\lambda)$, $s = 1, 2, \dots, m_0$, голоморфны, соответственно, на открытых множествах $0 < arg\,\lambda < \frac{\pi}{2m}$, $\lambda \notin \bar{G} \cup \{0\}$, и $\frac{\pi}{2m} < arg\,\lambda < \frac{\pi}{m}$, $\lambda \notin \bar{G} \cup \{0\}$, и непрерывны, соответственно, на множествах $0 \le arg\,\lambda < \frac{\pi}{2m}$, $\lambda \notin \bar{G} \cup \{0\}$, и $\frac{\pi}{2m} < arg\,\lambda \le \frac{\pi}{m}$, $\lambda \notin \bar{G} \cup \{0\}$. В представлениях (138) и (139) решений $u^+_{m_0}(x,\lambda)$ и $u^-_0(x,\lambda)$, $\lambda \in \ell_{m_0+1} \setminus \bar{G}'$, коэффициенты

$b_{m_0,s-1}(\lambda)$ и $c_{0s}(\lambda)$, $1 \leq s \leq m_0$, являются, соответственно, граничными значениями голоморфных функций $a_{m_0,s-1}(\lambda)$ и $a_{0,s}(\lambda)$. Таким образом, набор функций (146) и набор функций

$$a_{m_0s}(\lambda), \quad arg\,\lambda = \frac{\pi}{m}, \quad \lambda \notin \tilde{G} \cup \{0\}, \quad s = 0, 1, \dots, m_0 - 1,$$
$$a_{0s}(\lambda), \quad arg\,\lambda = 0, \quad \lambda \notin \tilde{G} \cup \{0\}, \quad s = 1, \dots, m_0$$

однозначно определяют друг друга. Однако, $u(x,\lambda) = u_0(x,\lambda)$ и $u(x,\lambda) = = u_{m_0}(x, \lambda\overline{\omega_{m_0}})$. Тем самым, приходим к заключению, что в представлении (162) $a_s(\lambda) = a_{0s}(\lambda)$, $\lambda > 0$, и $a_{m-s}(\lambda) = a_{m_0,m_0-s}(\lambda\overline{\omega_{m_0}})$, $\lambda < 0$, $s = 1, \dots, m_0$. В силу леммы 3, набор элементов (144) и (145) матричной функции рассеяния и набор функций (163) однозначно определяют друг друга.

В случае четного m функции (164) представимы функциями (147) и элементами $S_{m_00}(\lambda)$, $S_{0m_0}(\lambda)$, $\lambda \in \ell_{m_0} \setminus \tilde{G}'$, матричной функции рассеяния посредством равенств (78), (79), (92), (93) и (96). Отсюда и из леммы 3 следует, что набор функций (164) и набор элементов (144), (145), $S_{m_00}(\lambda)$, $S_{0m_0}(\lambda)$, $\lambda \in \ell_{m_0} \setminus \tilde{G}'$, матричной функции рассеяния однозначно определяют друг друга. Лемма доказана.

Предположим теперь, что оператор L самосопряженный, т. е. что его коэффициенты $p_k(x)$, $k = 0, 1, \dots, m-2$, вещественны. Рассмотрим введенную в работе [5] матрицу рассеяния оператора L, отметив, что введена она посредством нормированной обобщенной собственной функции оператора L, соответствующей непрерывному спектру.

В случае нечетного m, что для каждого вещественного значения $\lambda \neq 0$ такого, что число λ^m не является собственным значением L, дифференциальное уравнение (1) имеет единственное, с точностью до постоянного множителя, ограниченное на всей оси решение $w(x,\lambda) \not\equiv 0$. Это решение обладает асимптотикой

$$w(x,\lambda) = A_0^{\pm}(\lambda)e^{i\lambda x} + o(1), \quad x \to \pm\infty, \tag{165}$$

причем $|A_0^+(\lambda)| = |A_0^-(\lambda)| \neq 0$. Действительно, если для вещественного числа $\lambda \neq 0$ уравнение (1) имеет решение $w(x,\lambda)$, ограниченное на всей оси, то оно допускает представления

$$w(x,\lambda) = A_0^+(\lambda)y_0^+(x,\lambda) + \sum_{s\in M_0^+(\lambda)} A_s^+(\lambda)y_s^+(x,\lambda), \tag{166}$$

$$w(x,\lambda) = A_0^-(\lambda)y_0^-(x,\lambda) + \sum_{s\in M_0^-(\lambda)} A_s^-(\lambda)y_s^-(x,\lambda), \tag{167}$$

где $y_k^\pm(x,\lambda)$, $k = 0,1,\dots,m-1$ – некоторые решения уравнения (1), обладающие асимптотикой (13). Следовательно, $w(x,\lambda)$ удовлетворяет асимптотическим соотношениям (165). Из равенств (99), (100), (166) и (167) получим, что

$$[w(x,\lambda), w(x,\lambda)] = m\lambda^{m-1}\left|A_0^+(\lambda)\right|^2, \quad [w(x,\lambda), w(x,\lambda)] = m\lambda^{m-1}\left|A_0^-(\lambda)\right|^2.$$

Тем самым $|A_0^+(\lambda)| = |A_0^-(\lambda)|$. Отсюда следует, что каждая из систем решений $y_0^+(x,\lambda)$, $y_s^\pm(x,\lambda)$, $s \in M_0^\pm(\lambda)$ и $y_0^-(x,\lambda)$, $y_s^\pm(x,\lambda)$, $s \in M_0^\pm(\lambda)$, линейно зависима тогда и только тогда, когда линейно зависима система решений $y_s^\pm(x,\lambda)$, $s \in M_0^\pm(\lambda)$, т. е. когда число λ^m – собственное значение оператора L. Если λ^m не является собственным значением L, то уравнение (1) имеет решение $w(x,\lambda)$, допускающее представления (166) и (167), где $|A_0^\pm(\lambda)| \neq 0$. Если это решение нормировать одним из условий $A_0^+(\lambda) = 1$ или $A_0^-(\lambda) = 1$,то оно будет непрерывным по λ и, как указано в работе [5], непрерывным продолжением определяется для всех вещественных $\lambda \neq 0$.

В случае четного m для каждого $\lambda > 0$ такого, что λ^m не является собственным значением оператора L, уравнение (1) имеет два линейно независимых решения, ограниченных на всей оси, причем любые три таких решения уже линейно зависимы. Если $w_1(x,\lambda)$ и $w_2(x,\lambda)$ – ограниченные на всей оси линейно независимые решения, то имеют место асимптотические равенства

$$w_\nu(x,\lambda) = B_{\nu0}^\pm(\lambda)e^{i\lambda x} + B_{\nu m_0}^\pm(\lambda)e^{-i\lambda x} + o(1), \quad x\to\pm\infty, \quad \nu = 1,2, \tag{168}$$

где числа $B_{\nu0}^\pm(\lambda)$ и $B_{\nu m_0}^\pm(\lambda)$ связаны соотношениями

$$\left|B_{\nu0}^+(\lambda)\right|^2 + \left|B_{\nu m_0}^-(\lambda)\right|^2 = \left|B_{\nu0}^-(\lambda)\right|^2 + \left|B_{\nu m_0}^+(\lambda)\right|^2, \quad \nu = 1,2, \tag{169}$$

$$B_{10}^{+}(\lambda)\overline{B_{20}^{+}(\lambda)}+B_{1m_0}^{-}(\lambda)\overline{B_{2m_0}^{-}(\lambda)}=B_{10}^{-}(\lambda)\overline{B_{20}^{-}(\lambda)}+B_{1m_0}^{+}(\lambda)\overline{B_{2m_0}^{+}(\lambda)}, \tag{170}$$

причем определители матриц

$$\begin{pmatrix} B_{10}^{+}(\lambda) & B_{1m_0}^{-}(\lambda) \\ B_{20}^{+}(\lambda) & B_{2m_0}^{-}(\lambda) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} B_{1m_0}^{+}(\lambda) & B_{10}^{-}(\lambda) \\ B_{2m_0}^{+}(\lambda) & B_{20}^{-}(\lambda) \end{pmatrix} \tag{171}$$

отличны от нуля и равны по модулю. Действительно, если для $\lambda > 0$ уравнение (1) имеет решения $w_1(x,\lambda)$ и $w_2(x,\lambda)$, ограниченные на всей оси, то эти решения допускают при $\nu = 1,2$ следующие представления :

$$w_\nu(x,\lambda)=B_{\nu 0}^{+}(\lambda)y_0^{+}(x,\lambda)+B_{\nu m_0}^{+}(\lambda)y_{m_0}^{+}(x,\lambda)+\sum_{s=1}^{m_0-1}B_{\nu s}^{+}(\lambda)y_s^{+}(x,\lambda), \tag{172}$$

$$w_\nu(x,\lambda)=B_{\nu 0}^{-}(\lambda)y_0^{-}(x,\lambda)+B_{\nu m_0}^{-}(\lambda)y_{m_0}^{-}(x,\lambda)+\sum_{s=m_0+1}^{m-1}B_{\nu s}^{-}(\lambda)y_s^{-}(x,\lambda). \tag{173}$$

Следовательно, $w_1(x,\lambda)$ и $w_2(x,\lambda)$ обладают асимптотикой (168). Из равенств (99), (100), (172) и (173) получаем

$$[w_\nu(x,\lambda),w_\nu(x,\lambda)]=m\lambda^{m-1}\left|B_{\nu 0}^{+}(\lambda)\right|^2-m\lambda^{m-1}\left|B_{\nu m_0}^{+}(\lambda)\right|^2, \quad \nu=1,2,$$

$$[w_\nu(x,\lambda),w_\nu(x,\lambda)]=m\lambda^{m-1}\left|B_{\nu 0}^{-}(\lambda)\right|^2-m\lambda^{m-1}\left|B_{\nu m_0}^{-}(\lambda)\right|^2, \quad \nu=1,2,$$

$$[w_1(x,\lambda),w_2(x,\lambda)]=m\lambda^{m-1}B_{10}^{+}(\lambda)\overline{B_{20}^{+}(\lambda)}-m\lambda^{m-1}B_{1m_0}^{+}(\lambda)\overline{B_{2m_0}^{+}(\lambda)},$$

$$[w_1(x,\lambda),w_2(x,\lambda)]=m\lambda^{m-1}B_{10}^{-}(\lambda)\overline{B_{20}^{-}(\lambda)}-m\lambda^{m-1}B_{1m_0}^{-}(\lambda)\overline{B_{2m_0}^{-}(\lambda)}.$$

Поэтому имеют место равенства (169) и (170), в силу которых опрелелители матриц (171) равны по модулю. Из (169) и (170) следует, что каждая из систем решений $y_0^{+}(x,\lambda)$, $y_{m_0}^{-}(x,\lambda)$, $y_s^{\pm}(x,\lambda)$, $s\in M_0^{\pm}(\lambda)$, и $y_0^{-}(x,\lambda)$, $y_{m_0}^{+}(x,\lambda)$, $y_s^{\pm}(x,\lambda)$, $s\in M_0^{\pm}(\lambda)$, линейно зависима тогда и только тогда, когда линейно зависима система решений $y_s^{\pm}(x,\lambda)$, $s\in M_0^{\pm}(\lambda)$, т. е. когда число λ^m является собственным значением оператора L. Если же λ^m не является собственным значением L, то уравнение (1) имеет ограниченные на всей оси решения $w_1(x,\lambda)$ и $w_2(x,\lambda)$, для которых определители матриц (171) отличны от нуля. Таким образом, эти решения линейно независимы. При этом, одну из невырожденных матриц (171) можно задать произвольно, и ею однозначно определяеть вторую матрицу и решения $w_\nu(x,\lambda)$. Заметим, что если одна из матриц (171) унитарна, то, в силу равенств (169) и (170), унитарна также другая. Далее, если одна из матриц (171) тождественно равна единичной, то отмеченные решения непрерывны по λ, и, как указано в [5], допускают непрерывное продолжение, определяющее их для всех $\lambda > 0$.

В случае нечетного m для каждого вещественно $\lambda \neq 0$ выберем решение $w(x,\lambda)$ уравнения (1) с асимптотикой (165) так, чтобы $|A_0^{\pm}(\lambda)| = 1$, а в случае четного m для каждого $\lambda > 0$ выберем решения $w_1(x,\lambda)$ и $w_2(x,\lambda)$ уравнения (1), обладающие асимптотикой (168) так, чтобы матрицы (171) были унитарными. При этом будем считать, что $A_0^{\pm}(\lambda)$ и элементы матриц (171) – измеримые функции. Кроме того, в случае четного m для вещественных $\lambda \neq 0$ решение $w(x,\lambda)$ уравнения (1) определим по формуле

$$w(x,\lambda) = \begin{cases} w_1(x,\lambda), & \lambda > 0, \\ w_2(x,-\lambda), & \lambda < 0. \end{cases}$$

При отмеченном выборе имеет место следующее разложение по собственным функциям оператора L : для любой функции $f \in L^2(-\infty,\infty)$ интеграл

$$F(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{w(x,\lambda)}\, dx, \quad -\infty < \lambda < \infty,$$

сходится в норме пространства $L^2(-\infty,\infty)$ и справедливо равенство

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda) w(x,\lambda)\, d\lambda + \sum_k w_k(x) \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{w_k(t)}\, dt,$$

где первый интеграл сходится в $L^2(-\infty,\infty)$ норме, а $\{w_k(x)\}$ – ортонормированная система всех собственных функций оператора L. При этом имеет место равенство Парсеваля

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} |F(\lambda)|^2 d\lambda + \sum_k \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{w_k(t)}\, dt \right|^2 .$$

Теперь, вместе с требованием о вещественности коэффициентов $p_k(x)$, $k = 0, 1, \dots, m-2$, предположим, что уравнение (1) имеет решение $y^+(x,\lambda)$ ($Im\,\lambda \geq 0$, $\lambda \neq 0$), указанное в начале этого параграфа. Тогда при нечетном m

выбранное решение $w(x,\lambda)$ допускает представление

$$w(x,\lambda)=\sum_{k=0}^{m_0}A_k^+(\lambda)y^+(x,\lambda\omega_k),\quad \lambda>0, \tag{174}$$

$$w(x,\lambda)=\sum_{k=0}^{m_0}A_k^+(\lambda)y^+(x,\lambda\overline{\omega_k}),\quad \lambda<0. \tag{175}$$

Обозначим

$$H_{kj}(\lambda)=A_k^+(\lambda)\overline{A_j^+(\lambda)},\quad -\infty<\lambda<\infty,\quad \lambda\neq 0,\quad k,j=0,1,\dots,m_0. \tag{176}$$

Так как $|A_0^\pm(\lambda)|=1$, то

$$H_{00}(\lambda)=1,\quad H_{kj}(\lambda)=H_{k0}(\lambda)\overline{H_{j0}(\lambda)},\quad k,j=0,1,\dots,m_0. \tag{177}$$

Кроме того, функции $H_{kj}(\lambda)$ не зависят от выбора решения $w(x,\lambda)$, для которого $|A_0^\pm(\lambda)|=1$, и тем самым непрерывны.

В случае четного m выбранные решения $w_1(x,\lambda)$ и $w_2(x,\lambda)$ представимы в виде

$$w_\nu(x,\lambda)=\sum_{k=0}^{m_0}B_{\nu k}^+(\lambda)y^+(x,\lambda\omega_k),\quad \lambda>0,\quad \nu=1,2. \tag{178}$$

В этом случае функции $H_{kj}(\lambda)$ определим по формуле

$$H_{kj}(\lambda)=B_{1k}^+(\lambda)\overline{B_{1j}^+(\lambda)}+B_{2k}^+(\lambda)\overline{B_{2j}^+(\lambda)},\quad \lambda>0,\quad k,j=0,1,\dots,m_0. \tag{179}$$

В силу унитарности матриц (171) справедливы равенства

$$H_{00}(\lambda)=H_{m_0m_0}(\lambda)=1, \tag{180}$$

$$H_{kj}(\lambda)=H_{km_0}(\lambda)\overline{H_{jm_0}(\lambda)}+\left[H_{k0}(\lambda)-H_{km_0}(\lambda)\overline{H_{0m_0}(\lambda)}\right]\times$$
$$\times\left[\overline{H_{j0}(\lambda)}-H_{0m_0}(\lambda)\overline{H_{jm_0}(\lambda)}\right]\left[1-|H_{0m_0}(\lambda)|^2\right]^{-1},\ k,j=0,1,\dots,m_0, \tag{181}$$

причем, равенство $|H_{0m_0}(\lambda)|=1$ может выполняться лишь на некотором, конечном или счетном и ограниченном множестве с единственной возможной предельной точкой в начале координат. В рассматриваемом случае функции $H_{kj}(\lambda)$ также не зависят от выбора решений $w_1(x,\lambda)$ и $w_2(x,\lambda)$, для которых матрицы (171) унитарны, и следовательно, эти функции непрерывны.

Рассмотрим введенную в [5] эрмитову неотрицательную матрицу

$$H(\lambda) = \left(H_{kj}(\lambda)\right)_{k,j=0}^{m_0}, \quad \lambda \in \sigma_0 \setminus \{0\},$$

где σ_0 – непрерывный спектр оператора L, т.е. $\sigma_0 = (-\infty, \infty)$ при нечетном m и $\sigma_0 = [0, \infty)$ при четном m. Матрицу $H(\lambda)$ тоже будем называть *матрицей рассеяния* оператора L. В случае нечетного m из равенств (177) следует, что матрица $H(\lambda)$ вполне определяется заданием ее элементов $H_{k0}(\lambda)$, $k = 1, \ldots, m_0$. При четном m, в силу равенств (180) и (181), матрица $H(\lambda)$ вполне определяется своими элементами $H_{0m_0}(\lambda)$, $H_{km_0}(\lambda)$, $H_{k0}(\lambda)$, $k = 1, \ldots, m_0 - 1$.

Теорема 4. *Пусть коэффициенты $p_k(x)$, $k = 1, \ldots, m-2$, уравнения (1) вещественны, а для каждого λ ($\lambda \neq 0$, $Im\,\lambda \geq 0$) решение $y^+(x,\lambda)$ уравнения (1), обладающее асимптотикой (135) может быть выбрано так, чтобы оно было голоморфно по λ в открытой верхней полуплоскости и непрерывно в ее замыкании без нуля. Тогда матрицы рассеяния $S(\lambda)$ и $H(\lambda)$ самосопряженного оператора L однозначно определяют друг друга. При этом, в случае нечетного m справедливы равенства*

$$H_{k0}(\lambda) = a_k(\lambda), \quad \lambda > 0, \quad H_{k0}(\lambda) = a_{m-k}(\lambda), \quad \lambda < 0, \quad k = 1, \ldots, m_0, \tag{182}$$

где $a_k(\lambda)$ – коэффициенты (163) из представления (162) решения $u(x,\lambda)$ уравнения (1). В случае же четного m и $\lambda > 0$ справедливы равенства

$$H_{0m_0}(\lambda) = b_{m_00}(\lambda) = \overline{c_{0m_0}(\lambda)} = -S_{m_00}(\lambda) = \overline{S_{0m_0}(\lambda)}, \tag{183}$$

$$H_{km_0}(\lambda) = b_{m_0k}(\lambda), \quad H_{k0}(\lambda) = c_{0k}(\lambda), \quad k = 1, \ldots, m_0 - 1, \tag{184}$$

где $b_{m_0k}(\lambda)$ и $c_{0k}(\lambda)$ – коэффициенты (164) из представлений (138) и (139) решений $u^+_{m_0}(x,\lambda)$ и $u^-_0(x,\lambda)$ уравнения (1).

Доказательство. В случае нечетного m решение $w(x,\lambda)$ ($Im\,\lambda = 0, \lambda \neq 0$) уравнения (1), обладающее асимптотикой (165), пронормируем условием $A^+_0(\lambda) = 1$. Тогда $w(x,\lambda) = u(x,\lambda)$, где $u(x,\lambda)$ – решение уравнения (1), указанное в лемме 2. Из (176) получим, что $H_{k0}(\lambda) = A^+_k(\lambda)$, $k = 1, \ldots, m_0$, а из представлений (162), (174) и (175) – что $A^+_k(\lambda) = a_k(\lambda)$ ($\lambda > 0$) и $A^+_k(\lambda) = a_{m-k}(\lambda)$ ($\lambda < 0$),

$k = 1, \ldots, m_0$. Тем самым, верны равенства (182). В силу равенств (183) и леммы 4, набор элементов (144) и (145) матрицы $S(\lambda)$ и набор элементов $H_{k0}(\lambda)$, $k = 1, \ldots, m_0$, матрицы $H(\lambda)$ однозначно определяют друг друга. Однако, согласно теоремам 1 и 2, матрица $S(\lambda)$ вполне определяется набором своих элементов (144) и (145). В силу (177), $H(\lambda)$ вполне определяется набором своих элементов $H_{k0}(\lambda)$, $k = 1, \ldots, m_0$. Следовательно, матрицы рассеяния $S(\lambda)$ и $H(\lambda)$ однозначно определяют друг друга.

В случае четного m при $\lambda > 0$ рассмотрим решения $u^+_{m_0}(x, \lambda)$ и $u^-_0(x, \lambda)$ уравнения (1), полученные по формуле (73) из указанных в лемме 2 решений $u^\pm(x, \lambda)$ того же уравнения. Для этих решений имеют место представления (81), (83), (138) и (139), т. е. при $\lambda > 0$

$$u^+_{m_0}(x, \lambda) = b_{m_0 0}(\lambda) y^+(x, \lambda) + y^+(x, -\lambda) + \sum_{k=1}^{m_0-1} b_{m_0 k}(\lambda) y^+(x, \lambda\omega_k), \tag{185}$$

$$u^+_{m_0}(x, \lambda) = b_{m_0 m_0}(\lambda) y^-_{m_0}(x, \lambda) + \sum_{k=m_0+1}^{m-1} b_{m_0 k}(\lambda) y^-_k(x, \lambda), \tag{186}$$

$$u^-_0(x, \lambda) = y^+(x, \lambda) + c_{0 m_0}(\lambda) y^+(x, -\lambda) + \sum_{k=1}^{m_0-1} c_{0k}(\lambda) y^+(x, \lambda\omega_k), \tag{187}$$

$$u^-_0(x, \lambda) = c_{00}(\lambda) y^-_0(x, \lambda) + \sum_{k=m_0+1}^{m-1} c_{0k}(\lambda) y^-_k(x, \lambda). \tag{188}$$

Тем самым, в силу равенств (99) и (100),

$$|b_{m_0 0}(\lambda)|^2 + |b_{m_0 m_0}(\lambda)|^2 = 1, \; |c_{00}(\lambda)|^2 + |c_{0 m_0}(\lambda)|^2 = 1, \; b_{m_0 0}(\lambda) = \overline{c_{0 m_0}(\lambda)}. \tag{189}$$

Обозначим

$$w_1(x, \lambda) = u^+_{m_0}(x, \lambda), \quad w_2(x, \lambda) = \frac{1}{c_{00}(\lambda)} u^-_0(x, \lambda) - \frac{c_{0 m_0}(\lambda)}{c_{00}(\lambda)} u^+_{m_0}(x, \lambda).$$

В силу представлений (185) – (188) выбранные решения $w_1(x, \lambda)$ и $w_2(x, \lambda)$ уравнения (1) обладают асимптотикой (168), где функции $B^\pm_{\nu 0}(\lambda)$ и $B^\pm_{\nu m_0}(\lambda)$ таковы, что вторая из матриц (171) – единичная. В силу (92), (93) и (189) для коэффициентов $B^+_{\nu k}(\lambda)$ представления (178) имеем

$$B^+_{10}(\lambda) = b_{m_0 0}(\lambda) = \overline{c_{0 m_0}(\lambda)} = -S_{m_0 0}(\lambda) = \overline{S_{0 m_0}(\lambda)}, \tag{190}$$

$$B^+_{20}(\lambda) = \overline{c_{00}(\lambda)}, \quad B^+_{1 m_0}(\lambda) = 1, \quad B^+_{2 m_0}(\lambda) = 0, \tag{191}$$

$$B^+_{1k}(\lambda) = b_{m_0k}(\lambda), \quad B^+_{2k}(\lambda) = \frac{c_{0k}(\lambda)}{c_{00}(\lambda)} - \frac{c_{0m_0}(\lambda)}{c_{00}(\lambda)} b_{m_0k}(\lambda), \quad k = 1, \dots, m_0 - 1. \quad (192)$$

Равенства (183) и (184) легко следуют из (179) и (190) – (192). Из (183) и (184), в силу леммы 4, вытекает, что набор элементов (144), (145) и $S_{m_00}(\lambda)$, $\lambda > 0$, матрицы $S(\lambda)$ и набор элементов $H_{0m_0}(\lambda)$, $H_{km_0}(\lambda)$, $H_{k0}(\lambda)$, $k = 1, \dots, m_0 - 1$, матрицы $H(\lambda)$ однозначно определяют друг друга. Однако, согласно теоремам 1 и 2, матрица $S(\lambda)$ вполне определяется указанным набором своих элементов, а в силу равенств (180) и (181) матрица $H(\lambda)$ тоже вполне определяется указанным набором своих элементов. Следовательно, в случае четного m матрицы $S(\lambda)$ и $H(\lambda)$ однозначно определяют друг друга. Теорема доказана.

ABSTRACT. A differential operator L of arbitrary order $m \geq 3$ acting in the space $L^2(-\infty, \infty)$ with summable on the line coefficients is considered. The spectrum and resolvent of operator L are investigated. The connection between two different statements of the inverse scattering problem is found out.

ЛИТЕРАТУРА

10. М. А. Наймарк, Линейные дифференциальные операторы, Москва, Наука, 1969.
11. И. Г. Хачатрян, "О существовании оператора преобразования для дифференциальных уравнений высших порядков, сохраняющего асимптотику решений", Известия Акад. Наук Армении, Математика, т. 14, № 6, стр. 424 – 445, 1979.
12. С. В. Бабасян, И. Г. Хачатрян, "Об операторе преобразования для интегро–дифференциальных операторов высших порядков", Известия Акад. Наук Армении, Математика, т. 24, № 6, стр. 557 – 569, 1989.
13. И. Г. Хачатрян, "Об операторах рассеяния для пары дифференциальных операторов высших порядков", Известия Акад. Наук Армении, Математика, т. 21, № 1, стр. 3 – 17, 1986.
14. А. Р. Казарян, И. Г. Хачатрян, "Об обратной задаче рассеяния для дифференциального оператора произвольного порядка с суммируемыми на всей оси коэффициентами, I", Известия Акад. Наук Армении, Математика, т. 29, № 5, стр. 50 – 75, 1994.

10 августа 1994

Ереванский государственный университет