

СМЕШАННАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА СОБОЛЕВА ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

Г. С. Акопян, Р. Л. Шахбагян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
том 30, № 1, 1995

В статье исследуется начально-краевая задача для вырождающихся нелинейных уравнений типа Соболева высокого порядка. При некоторых ограничениях на главные символы операторов и младшие члены доказывается существование и единственность решения смешанной краевой задачи в весовых функциональных пространствах. Доказывается существование аттракторов полугрупп, порожденных исследуемым классом операторов. При дополнительных ограничениях на младшие члены строится глобальная функция Ляпунова и с ее помощью описываются аттракторы полугрупп, порожденных этим классом операторов.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область евклидова пространства с достаточно гладкой границей $\Gamma = \partial\Omega$. Рассмотрим нелинейное дифференциальное уравнение порядка $2m + 1$ ($m \geq 1$) в частных производных вида

$$\frac{\partial}{\partial t} Lu + Mu = 0 \quad (0.1)$$

в цилиндре $Q_T = \Omega \times (0, T)$, где L и M – следующие операторы :

$$Lu = \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (b_{\alpha\beta}(x) D^\beta u), \quad (0.2)$$

$$Mu = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha a_\alpha(x, \dots, D^\beta u, \dots), \quad |\beta| \leq m. \quad (0.3)$$

Здесь суммирование производится по мультииндексам $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, а

$$D^{\alpha} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

В настоящей статье исследуется разрешимость и асимптотическое поведение решений смешанных краевых задач для вырождающихся на границе эволюционных уравнений высокого порядка вида (0.1). Статья является обобщением для уравнений высокого порядка результатов, полученных в работах авторов [1], [2], в которых вырождение носило частный характер. В настоящей работе (по сравнению с [1], [2]) обобщен также случай $m = 1$ (уравнение третьего порядка), а именно, младшие коэффициенты a_{α} уравнения (0.1) здесь удовлетворяют более общим условиям. Как известно (см. например, библиографии к [3] – [7]), проблема разрешимости краевых задач для вырождающихся уравнений тесно связана с теорией весовых функциональных пространств. По определению, функция, заданная на Ω , называется *весовой функцией*, если она положительна, непрерывна и, при приближении к границе Ω , бесконечно возрастает или стремится к нулю. *Весовое функциональное пространство* – это нормированное пространство измеримых функций, некоторая степень которых суммируема с наперед заданным весом на Ω , таких, что их производные обладают тем же свойством суммируемости. В этой статье роль весовых функций играют степени расстояния $\rho(x) = \text{dist}(x, \partial\Omega)$ от точки $x \in \Omega$ до $\partial\Omega$.

§1. КЛАСС ОПЕРАТОРОВ

Всюду ниже будем предполагать, что коэффициенты, определяющие операторы L и M , удовлетворяют следующим условиям:

I) Функции $b_{\alpha\beta}(x)$ являются вещественнозначными и непрерывными в Ω ; для любых α, β имеем $b_{\alpha\beta}(x) = b_{\beta\alpha}(x)$.

II) Эллиптичность. Существует положительное число κ_0 такое, что

$$\sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} b_{\beta\alpha}(x) \xi_{\alpha} \xi_{\beta} \geq \kappa_0 \rho(x)^{2\sigma} \left(\sum_{|\alpha|=m} |\xi_{\alpha}|^2 + 1 \right) \quad (1.1)$$

для любого $x \in \Omega$ и любого набора чисел $\{\xi_\alpha\}_{|\alpha| \leq m}$, где весовой показатель σ находится в следующих пределах :

$$-\frac{1}{2} < \sigma < m - \frac{1}{2}. \quad (1.2)$$

III) Ограниченность. Существует число $C > 0$ такое, что

$$|b_{\alpha\beta}(x)| \leq C\rho(x)^{2\sigma} \quad (1.3)$$

для любого $x \in \Omega$ и любых мультииндексов α, β ($|\alpha|, |\beta| \leq m$).

IV) Коэффициенты $a_\alpha(x, \dots, \xi_\beta, \dots)$ оператора M вещественнозначны и принадлежат пространству C^1 по переменным $x \in \bar{\Omega}$ и ξ_β ; при любых $x \in \bar{\Omega}$, ξ_α , η_α , τ_β справедливы неравенства

$$\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x, \dots, \xi_\beta, \dots) \xi_\alpha \geq \gamma_1 \rho(x)^{2\sigma} \left(\sum_{|\alpha|=m} |\xi_\alpha|^2 + 1 \right), \quad (1.4)$$

$$\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x, \dots, \tau_\beta, \dots) \xi_\alpha \leq \gamma'_1 \rho(x)^{2\sigma} \left(\sum_{|\alpha|=m} |\xi_\alpha|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{|\beta|=m} |\tau_\beta|^2 \right)^{1/2}, \quad (1.5)$$

$$\sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} \frac{\partial a_\alpha(x, \dots, \tau_\beta, \dots)}{\partial \tau_\beta} \xi_\alpha \xi_\beta \geq \gamma_2 \rho(x)^{2\sigma} \left(\sum_{|\alpha|=m} |\xi_\alpha|^2 + 1 \right), \quad (1.6)$$

$$\sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} \left| \frac{\partial a_\alpha(x, \dots, \tau_\beta, \dots)}{\partial \tau_\beta} \eta_\alpha \xi_\beta \right| \leq \gamma'_2 \rho(x)^{2\sigma} \left(\sum_{|\alpha|=m} |\eta_\alpha|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{|\beta|=m} |\xi_\beta|^2 \right)^{1/2}, \quad (1.7)$$

где $\gamma_1, \gamma'_1, \gamma_2, \gamma'_2$ — положительные постоянные.

Отметим, что условия (1.4) — (1.7), наложенные на младшие члены уравнения (0.1), называют условиями типа Леви.

§2. ВЕСОВЫЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

2.1. Вначале приведем необходимые обозначения (введенные в [3]) и опишем некоторые функциональные пространства. Символом $H_\sigma^m(\Omega)$ обозначим весовой класс функций $u(x)$, заданных на Ω , для которых конечна величина

$$\|u\|_{H_\sigma^m} = \left[\|u\|_{L_2(\Omega)}^2 + \sum_{|\alpha|=m} \int_\Omega \rho(x)^{2\sigma} |D^\alpha u(x)|^2 dx \right]^{1/2}. \quad (2.1)$$

Классы $H_\sigma^m(\Omega)$ являются гильбертовыми пространствами с нормой (2.1).

В дальнейшем нам понадобятся иные нормировки этих весовых пространств.

Положим

$$\|u\|_1 = \left[\sum_{|\alpha| \leq m} \|\rho(x)^\sigma D^\alpha u\|_{L_2(\Omega)}^2 \right]^{1/2}, \quad (2.2)$$

$$\|u\|_2 = \left[\|\rho(x)^\sigma u\|_{L_2(\Omega)}^2 + \sum_{|\alpha|=m} \|\rho(x)^\sigma D^\alpha u\|_{L_2(\Omega)}^2 \right]^{1/2}. \quad (2.3)$$

Нормами (2.2) и (2.3) порождаются гильбертовы пространства, которые будем обозначать, соответственно, через ${}_1H_\sigma^m(\Omega)$ и ${}_2H_\sigma^m(\Omega)$. Соотношения между введенными пространствами при различных весовых показателях σ были исследованы С. М. Никольским [6] – [8]. Ниже будем опираться на следующую теорему из [3].

Теорема А. ([3], Теорема 1.1.4) Положим

$$-\frac{1}{2} < \sigma \leq m, \quad (2.4)$$

тогда

$${}_1H_\sigma^m(\Omega) = {}_2H_\sigma^m(\Omega) = H_\sigma^m(\Omega), \quad (2.5)$$

где равенства понимаются, как обычно, с точностью до эквивалентности норм.

Пусть $\dot{H}_\sigma^m(\Omega)$ является замыканием в норме пространства $H_\sigma^m(\Omega)$ линейного многообразия $C_0^\infty(\Omega)$ финитных бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем. Справедлива следующая

Теорема Б. ([3], Теорема 1.2.1)

- 1) Если $\sigma < -1/2$ или $\sigma > m - 1/2$, то $\dot{H}_\sigma^m(\Omega) = H_\sigma^m(\Omega)$.
- 2) Если σ удовлетворяет условию (1.2), то пространства $\dot{H}_\sigma^m(\Omega)$ обладают следующей структурой :

$$\dot{H}_\sigma^m(\Omega) = \left\{ u \in H_\sigma^m(\Omega) : \frac{\partial^s u}{\partial n^s} \Big|_\Gamma = 0, \quad s = 0, 1, \dots, s_0 - 1 \right\}, \quad (2.6)$$

где $\frac{\partial}{\partial n}$ — производная в направлении внутренней нормали к границе, а s_0 — целое число, удовлетворяющее неравенствам

$$m - \sigma - \frac{1}{2} \leq s_0 < m - \sigma + \frac{1}{2}. \quad (2.7)$$

2.2. Введем, наконец, функциональное пространство, в котором действует оператор редуцированной задачи.

Лемма 2.1. *Оператор L , определенный на всюду плотном в $L_2(\Omega)$ множестве $C_0^\infty(\Omega)$, является симметрическим и положительно определенным.*

Доказательство. Симметричность оператора L следует из формулы интегрирования по частям. Покажем, что L — положительно определенный оператор. Для этого рассмотрим скалярное произведение (Lu, u) , где $u \in C_0^\infty(\Omega)$, а $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение в $L_2(\Omega)$. В силу теоремы А и формул (1.1), (1.2)

$$\begin{aligned} (Lu, u) &= \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} \int_{\Omega} b_{\alpha\beta}(x) D^\beta u D^\alpha u \, dx \geq \\ &\geq \kappa_0 \int_{\Omega} \rho(x)^{2\sigma} \left[|u(x)|^2 + \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u|^2 \right] dx = \\ &= \kappa_0 \|u\|_2^2 \geq c \|u\|_{H_T^m}^2 \geq c \|u\|_{L_2(\Omega)}^2, \end{aligned} \quad (2.8)$$

где $c > 0$ — постоянная (всюду ниже через c будем обозначать различные постоянные). Лемма 2.1 доказана.

На линейном многообразии $C_0^\infty(\Omega)$ введем скалярное произведение

$$[u, v] = (Lu, v) = \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} \int_{\Omega} b_{\alpha\beta}(x) D^\beta u D^\alpha v \, dx. \quad (2.9)$$

Далее, через H_L обозначим гильбертово пространство с нормой

$$\|u\|_{H_L} = \sqrt{[u, u]},$$

порожденной скалярным произведением (2.9), являющееся замыканием линейного многообразия $C_0^\infty(\Omega)$ в этой норме.

Лемма 2.2. Пусть σ удовлетворяет неравенству (1.2). Тогда пространства H_L и $\dot{H}_\sigma^m$ изоморфны.

Доказательство. Пусть $u \in C_0^\infty(\Omega)$. В силу оценки (2.8) имеем

$$\|u\|_{H_L} \geq c \|u\|_{H_\sigma^m},$$

где $c > 0$ – постоянная. Теперь докажем обратное неравенство. Действительно, из теоремы А и (1.3) следует, что

$$\begin{aligned} \|u\|_{H_L}^2 &\leq c \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} \int_{\Omega} \rho(x)^{2\sigma} |D^\alpha u| \cdot |D^\beta u| dx \leq \\ &\leq c_1 \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |\rho(x)^\sigma D^\alpha u|^2 dx \leq c_1 \|u\|_1^2 \leq c_2 \|u\|_{H_\sigma^m}^2. \end{aligned}$$

Таким образом, установлена эквивалентность норм на множестве, всюду плотном в $L_2(\Omega)$. Далее, стандартный процесс замыкания приводит к эквивалентности норм $\|u\|_{H_L}$ и $\|u\|_{H_\sigma^m}$. Лемма доказана.

2.3. Для уравнения (0.1) рассмотрим следующую краевую задачу :

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad x \in \bar{\Omega}, \quad (2.10)$$

$$\left. \frac{\partial^s u}{\partial n^s} \right|_{\Gamma} = 0, \quad s = 0, 1, \dots, s_0 - 1, \quad t > 0, \quad (2.11)$$

где s_0 удовлетворяет условию (2.7), а u_0 – произвольный элемент пространства H_L .

2.4. Приведем полученный в [3] результат об однозначной разрешимости обобщенной задачи Дирихле для оператора L , на который будем опираться ниже. Рассмотрим уравнение

$$Lu = f \quad (2.12)$$

с краевыми условиями (2.11). Для формулировки теоремы нам понадобится следующее

Определение 2.1. Функция $u \in \dot{H}_\sigma^m(\Omega)$ называется *обобщенным решением* задачи (2.11), (2.12), если для любого $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ имеет место тождество

$$[u, \varphi] = (f, \varphi). \quad (2.13)$$

Теорема В. ([3], Теорема 2.1.1) Пусть оператор L удовлетворяет условиям I), II) и (1.2), а f — произвольный элемент пространства $(\dot{H}_\sigma^m(\Omega))'$, сопряженного к пространству $\dot{H}_\sigma^m(\Omega)$. Тогда задача (2.11), (2.12) имеет единственное обобщенное решение $u \in \dot{H}_\sigma^m(\Omega)$ (или, что то же самое, $u \in H_L$), удовлетворяющее оценке

$$\|u\|_{H_\sigma^m} \leq c \|f\|_{(\dot{H}_\sigma^m(\Omega))'}, \quad (2.14)$$

где c — положительная постоянная.

В силу теоремы В, оператор L осуществляет гомеоморфизм пространств H_L и $(\dot{H}_\sigma^m(\Omega))'$. Поэтому существует ограниченный обратный оператор L^{-1} , отображающий $(\dot{H}_\sigma^m(\Omega))'$ на $\dot{H}_\sigma^m(\Omega)$ (и, стало быть, на H_L). Применяя к обеим частям уравнения (0.1) оператор L^{-1} , мы приходим к эквивалентному уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} + Au = 0,$$

где оператор $A = L^{-1}M$ определен на линейном многообразии $C_0^\infty(\Omega)$. Таким образом, задача (0.1), (2.10), (2.11) сведена к эквивалентной задаче

$$\frac{\partial u}{\partial t} + Au = 0, \quad (2.15)$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad x \in \bar{\Omega}. \quad (2.16)$$

Лемма 2.3. Область определения замыкания оператора A совпадает с пространством H_L .

Доказательство. Пусть $u \in H_L$, и пусть последовательность $\{u_k\}_{k=1}^\infty$, $u_k \in C_0^\infty(\Omega)$ такова, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k - u\|_{H_L} = 0. \quad (2.17)$$

Для любого $v \in C_0^\infty(\Omega)$ имеем

$$\begin{aligned} [Au_k, v] &= \int_{\Omega} LL^{-1}Mu_k \cdot v(x) \, dx = \\ &= \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (a_\alpha(x, \dots, D^\beta u_k, \dots)) v \, dx = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} a_\alpha(x, \dots, D^\beta u_k, \dots) D^\alpha v \, dx. \end{aligned}$$

Оценим выражение

$$\begin{aligned} [Au_k, v] - \int_{\Omega} \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} a_{\alpha\beta}(x, \dots, D^\beta u_k, \dots) D^\alpha v \, dx &= \\ &= \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} [a_\alpha(x, \dots, D^\beta u_k, \dots) - a_\alpha(x, \dots, D^\beta u, \dots)] D^\alpha v \, dx = \\ &= \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} \int_{\Omega} \int_0^1 \frac{\partial a_\alpha(x, \dots, D^\beta u + t(D^\beta u_k - D^\beta u), \dots)}{\partial t \beta} (D^\beta u_k - D^\beta u) D^\alpha v \, dt \, dx. \end{aligned}$$

В силу условия (1.7)

$$\begin{aligned} \left| [Au_k, v] - \int_{\Omega} \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} a_{\alpha\beta}(x, \dots, D^\beta u_k, \dots) D^\alpha v \, dx \right| &\leq \\ &\leq \gamma'_2 \left(\sum_{|\beta|=m} \|\rho(x)^\sigma D^\beta (u_k - u)\|_{L_2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{|\alpha|=m} \|\rho(x)^\sigma D^\alpha v\|_{L_2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \leq \\ &\leq \gamma'_2 \|u_k - u\|_2 \|v\|_2 \leq c \|u - u_k\|_{H_L} \|v\|_{H_L}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Из (2.17) следует, что правая часть последнего неравенства при $k \rightarrow \infty$ стремится к нулю. Поэтому последовательность $\{Au_k\}$ слабо сходится в пространстве H_L .

В силу единственности слабого предела можно расширить оператор A с $C_0^\infty(\Omega)$ на H_L , для любых $u, v \in H_L$, полагая

$$[Au, v] = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} a_\alpha(x, \dots, D^\beta u, \dots) D^\alpha v \, dx. \quad (2.19)$$

Лемма доказана.

§3. ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ

Здесь будет доказан основной результат статьи, а именно, однозначная разрешимость задачи (2.15), (2.16), к которой сведена задача (0.1), (2.10), (2.11).

Доказательство основано на так называемом "методе монотонности" (см. [9], [10]). Мы будем пользоваться обозначениями и определениями, введенными в этих работах, а также в статье авторов [2].

Теорема 3.1. Пусть операторы L и M удовлетворяют условиям I) – IV). Тогда оператор A , действующий в пространстве H_L , является монотонным, ограниченным и полунепрерывным. При этом, имеет место оценка

$$[Au, u] \geq c \|u\|_{H_L}^2$$

с некоторой постоянной $c > 0$.

Доказательство. Пусть $u, v \in C_0^\infty(\Omega)$. Из (1.6) следует, что

$$\begin{aligned} [Au - Av, u - v] &= \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} [a_\alpha(x, \dots, D^\beta u, \dots) - a_\alpha(x, \dots, D^\beta v, \dots)] D^\alpha(u - v) dx = \\ &= \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} \int_{\Omega} \int_0^1 \frac{\partial a_\alpha(x, \dots, D^\beta v + t(D^\beta u - D^\beta v), \dots)}{\partial \tau_\beta} D^\beta(u - v) D^\alpha(u - v) dt dx = \\ &= \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} \int_{\Omega} \frac{\partial a_\alpha(x, \dots, D^\beta v + t^*(D^\beta u - D^\beta v), \dots)}{\partial \tau_\beta} D^\beta(u - v) D^\alpha(u - v) dx \geq \\ &\geq \gamma_2 \|u - v\|_2^2 \geq c \|u - v\|_{H_L}^2. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Пусть теперь $u, v \in H_L$, а последовательности $\{u_k\}_{k=1}^\infty$, $\{v_k\}_{k=1}^\infty$, где $u_k, v_k \in C_0^\infty(\Omega)$ таковы, что

$$\|u_k - u\|_{H_L} \rightarrow 0, \quad \|v_k - v\|_{H_L} \rightarrow 0, \quad \text{при } k \rightarrow \infty. \quad (3.2)$$

Тогда из оценки (3.1) получаем

$$\begin{aligned} [Au_k - Av_k, u - v] &= [Au_k - Av_k, u - u_k] + [Au_k - Av_k, u_k - v_k] + [Au_k - Av_k, v_k - v] \geq \\ &\geq [Au_k - Av_k, u - u_k] + [Au_k - Av_k, v_k - v] + c \|u_k - v_k\|_{H_L}^2. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Из леммы 2.3 следует, что последовательности $\{Au_k\}_{k=1}^\infty$ и $\{Av_k\}_{k=1}^\infty$ слабо сходятся в H_L и, стало быть, ограничены. Учитывая (3.2), получаем

$$|[Au_k - Av_k, u - u_k]| \leq c \|u_k - u\|_{H_L} \rightarrow 0, \quad \text{при } k \rightarrow \infty.$$

Аналогично, второе слагаемое правой части неравенства (3.3) тоже стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$. Используя (3.3), заключаем, что при достаточно больших k справедливо неравенство

$$[Au_k - Av_k, u - v] \geq 0.$$

Отсюда предельным переходом получаем

$$[Au - Av, u - v] \geq 0. \quad (3.4)$$

Таким образом, оператор $\mathcal{A}$ является монотонным.

Докажем ограниченность оператора $\mathcal{A}$. Пусть B – произвольное ограниченное множество в H_L :

$$B = \{u \in H_L : \|u\|_{H_L} \leq R < \infty\}. \quad (3.5)$$

При любых $u \in B$ и $v \in C_0^\infty(\Omega)$ рассмотрим билинейную форму (2.19). В силу

$$\begin{aligned} |[\mathcal{A}u, v]| &\leq \gamma_1' \left(\sum_{|\alpha|=m} \int_{\Omega} |\rho(x)^\sigma D^\alpha v|^2 dx \right)^{1/2} \left(\sum_{|\beta|=m} \int_{\Omega} |\rho(x)^\sigma D^\beta u|^2 \right)^{1/2} \leq \\ &\leq \gamma_1' \|u\|_2 \|v\|_2 \leq c \|u\|_{H_L} \|v\|_{H_L} \leq cR \|v\|_{H_L}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Отсюда следует, что для любых $u \in B$

$$\|\mathcal{A}u\|_{H_L} \leq cR, \quad (3.7)$$

следовательно, оператор $\mathcal{A}$ ограничен.

Докажем, наконец, полунепрерывность оператора $\mathcal{A}$. В самом деле, пусть $u \in H_L$ и $v \in C_0^\infty(\Omega)$, а последовательность $\{u_k\}_{k=1}^\infty$, $u_k \in H_L$, такова, что $\|u_k - u\|_{H_L} \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Тогда из леммы 2.3 следует

$$[\mathcal{A}u_k, v] \rightarrow [\mathcal{A}u, v], \quad \text{при } k \rightarrow \infty,$$

что и означает трсбуемую полунепрерывность.

Для завершения доказательства теоремы 3.1, установим оценку снизу для $[\mathcal{A}u, u]$. Из теоремы А, леммы 2.2 и формулы (1.4) следует, что

$$\begin{aligned} [\mathcal{A}u, u] &\geq \gamma_1 \left(\int_{\Omega} \sum_{|\alpha|=m} |\rho(x)^\sigma D^\alpha u|^2 dx + \int_{\Omega} |\rho(x)^\sigma u(x)|^2 dx \right) = \gamma_1 \|u\|_2^2 \geq \\ &\geq c \|u\|_{H_L}^2, \end{aligned} \quad (3.8)$$

где $c > 0$ – постоянная. Теорема 3.1 доказана.

Прежде чем сформулировать основной результат этого параграфа обозначим через $L_2(0, T; H_L)$ гильбертово пространство определенных в цилиндре Q_T

функций $u(t, x)$, со скалярным произведением

$$\{u, v\} = \int_0^T [u, v] dt. \quad (3.9)$$

Норму, порожденную этим скалярным произведением обозначим символом $I \cdot I$.

Теорема 3.2. Пусть выполнены условия I) – IV). Тогда для любых начальных данных $u_0 \in H_L$ задача (2.15), (2.16) имеет единственное решение в пространстве $L_2(0, T; H_L)$.

Доказательство. Из неравенства (3.4) легко следует, что для любых $u, v \in L_2(0, T; H_L)$

$$\{Au - Av, u - v\} \geq 0. \quad (3.10)$$

Поэтому оператор A монотонный. Далее, пусть B – ограниченное множество в $L_2(0, T; H_L)$:

$$B = \{u \in L_2(0, T; H_L) : IuI \leq R\}.$$

Тогда, в силу (3.6), для любых $u \in B$ и $t \in [0, T]$ имеем

$$\|Au\|_{H_L} \leq c \|u\|_{H_L},$$

где $c > 0$ – постоянная. Интегрируя обе части по $t \in [0, T]$, получим

$$IAuI \leq c IuI \leq cR,$$

то есть оператор A ограничен в $L_2(0, T; H_L)$.

Теперь докажем полунепрерывность оператора A в $L_2(0, T; H_L)$. Пусть u – произвольный элемент пространства $L_2(0, T; H_L)$, а последовательность $\{u_k\}_{k=1}^\infty$, $u_k \in L_2(0, T; H_L)$, такова, что

$$Iu_k - uI \rightarrow 0, \quad \text{при } k \rightarrow \infty. \quad (3.11)$$

В силу (2.18) и (2.19) для любого $v \in C_0^\infty([0, T] \times \Omega)$ и любого $t \in [0, T]$ имеем

$$|[Au_k - Au, v]| \leq c \|u_k - u\|_{H_L} \|v\|_{H_L}.$$

Интегрируя обе части этого неравенства по $t \in [0, T]$ и учитывая (3.11) получим,

что

$$\begin{aligned} |\{Au_k - Au, v\}| &\leq \int_0^T |[Au_k - Au, v]| dt \leq c \int_0^T \|u_k - u\|_{H_L} \|v\|_{H_L} dt \leq \\ &\leq c \|u_k - u\|_{H_L} \cdot \|v\|_{H_L} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

то есть последовательность $\{Au_k\}_{k=1}^{\infty}$ слабо сходится в $L_2(0, T; H_L)$. Итак, оператор A полунепрерывен в $L_2(0, T; H_L)$ и удовлетворяет условиям теоремы 13 работы [9] (см. также [2]). Отсюда следует существование решения $u(t, x) \in L_2(0, T; H_L)$ задачи (2.15), (2.16) при любых начальных данных $u_0 \in H_L$.

Единственность решения доказывается стандартной процедурой. Пусть $u_1, u_2 \in L_2(0, T; H_L)$ — два решения задачи (2.15), (2.16). Тогда разность $u_1 - u_2$ удовлетворяет тождеству

$$\frac{\partial(u_1 - u_2)}{\partial t} + Au_1 - Au_2 = 0.$$

Умножая обе части последнего тождества на $u_1 - u_2$ и интегрируя по $[0, \tau]$, $0 \leq \tau \leq T$, получаем

$$\int_0^{\tau} \left[\frac{\partial(u_1 - u_2)}{\partial t}, u_1 - u_2 \right] dt + \int_0^{\tau} [Au_1 - Au_2, u_1 - u_2] dt = 0.$$

В силу монотонности оператора A

$$\int_0^{\tau} \left[\frac{\partial(u_1 - u_2)}{\partial t}, u_1 - u_2 \right] dt = \frac{1}{2} \int_0^{\tau} \frac{\partial}{\partial t} \|u_1 - u_2\|_{H_L}^2 dt \leq 0.$$

Учитывая начальное условие $(u_1 - u_2)|_{t=0} = 0$, получаем

$$\|u_1(\tau, x) - u_2(\tau, x)\|_{H_L} = 0.$$

Так как τ произвольно, то отсюда следует, что $u_1 = u_2$ в цилиндре Q_T , что завершает доказательство теоремы 3.2.

§4. ПОСТРОЕНИЕ АТТРАКТОРОВ

В этом параграфе будет доказано существование аттракторов полугрупп, порожденных задачами (2.15), (2.16). Доказательство этого аналогично доказательству теоремы 1 из работы [2], в связи с чем мы опускаем некоторые подробности. Определение аттракторов и некоторые общие теоремы об их существовании и структуре можно найти в [11], [12].

Из теоремы 3.2 следует, что задача (2.15), (2.16), и, стало быть, задача (0.1),

(2.10), (2.11) порождает семейство операторов $\{S_t, t \geq 0\}$, заданных на множестве начальных данных $u_0 \in H_L$ и определяемых следующим образом :

$$S_t u_0 = u(t, x), \quad (4.1)$$

где $u(t, x)$ – решение задачи. Это семейство является полугруппой.

Теорема 4.1. Пусть операторы L и M удовлетворяют условиям I) – IV) и (1.2). Тогда полугруппа S_t , порожденная задачей (0.1), (2.10), (2.11) обладает аттрактором, компактным в пространстве H_L .

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 1.1 из [11], сначала покажем равномерную ограниченность семейства $\{S_t\}$. Пусть

$$U_0 = \{u_0 \in H_L : \|u_0\|_{H_L} \leq K < \infty\}$$

– произвольное ограниченное множество в H_L , и $t > 0$ – фиксированное число.

Подставляя решение $u(t, x)$ задачи (0.1), (2.10), (2.11) в уравнение (2.15) и скалярно умножая обе его части на u , получим

$$\left[\frac{\partial u}{\partial t}, u \right] + [Au, u] = 0, \quad \text{или} \quad \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \|u\|_{H_L}^2 + [Au, u] = 0. \quad (4.2)$$

Тем самым, в силу (3.8) и неравенства Гронуолла, приходим к оценке

$$\|S_t u_0\|_{H_L}^2 \leq \|u_0\|_{H_L}^2 e^{-2ct}. \quad (4.3)$$

Отсюда следует, что семейство $\{S_t\}$ равномерно ограничено.

Для завершения доказательства покажем, что оператор $S_t : H_L \rightarrow H_L$ непрерывен при любых $t \geq 0$. В самом деле, при любых начальных данных $u_0^1(x), u_0^2(x) \in H_L$ соответствующие им решения $u_1(t, x), u_2(t, x) \in L_2(0, T; H_L)$ задачи (2.15), (2.16) при любом $t \in [0, T]$ удовлетворяют тождеству

$$\frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial}{\partial \tau} \|u_1 - u_2\|_{H_L}^2 d\tau + \int_0^t [Au_1 - Au_2, u_1 - u_2] d\tau = 0. \quad (4.4)$$

Теперь, учитывая монотонность оператора A , получаем

$$\|u_1(t, x) - u_2(t, x)\|_{H_L} \leq \|u_1(0, x) - u_2(0, x)\|_{H_L}$$

или

$$\|S_t u_0^1 - S_t u_0^2\|_{H_L} \leq \|u_0^1 - u_0^2\|_{H_L}.$$

Воспользовавшись произвольностью $t \geq 0$, убеждаемся в непрерывности семейства $\{S_t\}$. Таким образом, выполнены все условия теоремы 1.1 из [11], что влечет утверждение теоремы 4.1.

§5. СУЩЕСТВОВАНИЕ ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА

В этом параграфе построена функция Ляпунова уравнения (0.1) и с ее помощью описаны аттракторы полугрупп, порожденных рассматриваемым классом операторов. Будем предполагать, что оператор M следующего частного вида :

$$Mu = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha a_\alpha(x, D^\alpha u). \quad (5.1)$$

Введем обозначения

$$h_\alpha(x, w) = \int_0^w a_\alpha(x, \xi) d\xi, \quad (5.2)$$

$$a(x, \tau) = \sum_{|\alpha| \leq m} h_\alpha(x, \tau_\alpha). \quad (5.3)$$

На пространстве H_L рассмотрим функционал

$$\Phi(u) = \int_\Omega a(x, u, \dots, D^\alpha u, \dots) dx, \quad (5.4)$$

где $|\alpha| \leq m$.

Теорема 5.1. Пусть оператор M имеет вид (5.1) и выполнены условия теоремы 4.1. Тогда функционал Φ , задаваемый выражением (5.4), является функцией Ляпунова полугруппы S_t , порожденной задачей (0.1), (2.10), (2.11).

Доказательство. В силу теоремы 4.1 полугруппа $\{S_t, t \geq 0\}$, порожденная задачей (0.1), (2.10), (2.11), обладает аттрактором $\mathcal{M}$, компактным в H_L . Сначала

докажем, что функционал (5.4) непрерывен на множестве $\mathcal{M}$ (см. [11], определение 10.3 функции Ляпунова). Для этого рассмотрим выражение

$$\begin{aligned}\Phi(u) - \Phi(v) &= \int_{\Omega} [a(x, u + v, \dots, D^{\alpha}(u + v), \dots) - a(x, u, \dots, D^{\alpha}u, \dots)] dx = \\ &= \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} \int_0^1 \frac{\partial a(x, \dots, D^{\alpha}v + t(D^{\alpha}u - D^{\alpha}v), \dots)}{\partial \tau_{\alpha}} (D^{\alpha}u - D^{\alpha}v) dt dx = \\ &= \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} \int_0^1 a_{\alpha}(x, D^{\alpha}v + t(D^{\alpha}u - D^{\alpha}v)) D^{\alpha}(u - v) dt dx = \\ &= \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} a_{\alpha}(x, D^{\alpha}w^*) (D^{\alpha}u - D^{\alpha}v) dx, \quad (5.5)\end{aligned}$$

где $w^* = v + t^*(u - v)$ и $0 < t^* < 1$. Воспользовавшись неравенством (1.5) и определением нормы $\|\cdot\|_2$, откуда получим

$$\begin{aligned}|\Phi(u) - \Phi(v)| &\leq \gamma'_1 \|w^*\|_2 \|u - v\|_2 \leq c \|w^*\|_{H_L} \|u - v\|_{H_L} \leq \\ &\leq c_1 (\|u\|_{H_L} + \|v\|_{H_L}) \|u - v\|_{H_L}.\end{aligned}$$

В силу ограниченности множества $\mathcal{M}$ в H_L имеет место неравенство

$$|\Phi(u) - \Phi(v)| \leq c_2 \|u - v\|_{H_L}$$

с некоторой постоянной $c_2 > 0$. Поэтому функционал Φ непрерывен на $\mathcal{M}$. Покажем, что этот функционал дифференцируем в смысле Фреше и его производная $\Phi'(u)$ действует на элементы $v \in \mathcal{M}$ следующим образом :

$$\left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial u}, v \right\rangle = [Au, v]. \quad (5.6)$$

Для доказательства (5.6) выделим линейную часть в выражении (5.5). В силу (3.5), (5.2) и (5.3)

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial u}, v \right\rangle &= \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} \frac{\partial a(x, \dots, D^{\alpha}u, \dots)}{\partial \tau_{\alpha}} D^{\alpha}v dx = \\ &= \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} a_{\alpha}(x, D^{\alpha}u) D^{\alpha}v dx = [Au, v].\end{aligned}$$

В соответствии с определением функции Ляпунова покажем, что функция $\Phi(S_t u)$ убывает по t при $t \geq 0$ и что множество решений уравнения $Au = 0$ совпадает

с множеством неподвижных точек полугруппы S_t . Действительно, для любого $u_0 \in \mathcal{M}$, в силу (5.6) и (2.15), имеем

$$\partial_t \Phi(S_t u_0) = \partial_t \Phi(u(t, x)) = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u}, \frac{\partial u}{\partial t} \right) = \left[\mathcal{A}u, \frac{\partial u}{\partial t} \right] = -\|\mathcal{A}u\|_{H_L}^2 \leq 0. \quad (5.7)$$

Таким образом, функция $\Phi(S_t u)$ убывает при $t \geq 0$. Наконец, пусть при некотором $t = \tau > 0$ $\Phi(u(\tau, x)) = \Phi(u(0, x)) = \Phi(u_0)$. Тогда, интегрируя (5.7) по $[0, \tau]$ получим

$$0 = \Phi(u(\tau, x)) - \Phi(u_0) = \int_0^\tau \partial_t \Phi(u(t, x)) dt = - \int_0^\tau \|\mathcal{A}u\|_{H_L}^2 dt,$$

откуда следует, что $\mathcal{A}u = 0$ при $t \in [0, \tau]$. Покажем, что $z = u_0(x)$ является неподвижной точкой полугруппы S_t . Действительно, поскольку $\mathcal{A}u_0 = \mathcal{A}u(0, x) = 0$, а $\frac{\partial u_0}{\partial t} = 0$, то функция $z(x)$ является решением задачи (2.15), (2.16) и, стало быть, $S_t z = z$ для любого $t \geq 0$. Это завершает доказательство теоремы.

Согласно теореме 10.2 [11], как следствие из теоремы 5.1, справедлива следующая

Теорема 5.2. Пусть выполнены условия теорем 4.1 и 5.1, а множество $\mathcal{N} = \{z_1(x), \dots, z_s(x)\}$ решений уравнения

$$\mathcal{A}u = 0$$

конечно. Тогда аттрактор $\mathcal{M}$ является объединением неустойчивых инвариантных многообразий $N(z_i)$, $i = 1, \dots, s$, выходящих из точки z_i , т. е.

$$\mathcal{M} = \bigcup_{z_i \in \mathcal{N}} N(z_i).$$

§6. ПРИМЕР МОДЕЛЬНОГО

ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ УРАВНЕНИЯ

Пусть основанием цилиндра Q_T служит единичный шар $K = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$ с границей $S = \partial K$. Для уравнения третьего порядка

$$\frac{\partial}{\partial t} Lu + Mu = 0, \quad (6.1)$$

где

$$Lu = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left[(1 - |x|^2)^\sigma \frac{\partial u}{\partial x_i} \right] + b(x)u, \quad (6.2)$$

$$Mu = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left[(1 - |x|^2)^\sigma a_i \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \right] + a(x)u, \quad (6.3)$$

$$a_i(\xi_i) = \frac{1 + p_i \xi_i^{2k}}{1 + q_i \xi_i^{2k}} \xi_i, \quad p_i > q_i > 0,$$

k – натуральное число и $i = 1, \dots, n$, рассмотрим следующую начально-краевую задачу :

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad x \in \bar{K}, \quad (6.4)$$

$$u|_S = 0, \quad t \geq 0. \quad (6.5)$$

Уравнение (6.1) является простейшим частным случаем общего уравнения (0.1).

В соответствии с условием (2.7) предположим, что

$$-\frac{1}{2} < \sigma < \frac{1}{2}.$$

Функции $a(x)$ и $b(x)$ непрерывны на $\bar{K}$ и удовлетворяют условиям

$$c_1(1 - |x|^2)^\sigma \leq \frac{a(x)}{b(x)} \leq c_2(1 - |x|^2)^\sigma, \quad (6.6)$$

при некоторых положительных постоянных c_1 и c_2 . Нетрудно проверить, что операторы L и M удовлетворяют условиям I) – III) из §1. Проверим, например, справедливость неравенства (1.6). В силу (6.6), для любых $\xi, \tau \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$\begin{aligned} (1 - |x|^2)^\sigma \sum_{i=1}^n a'_i(\tau_i) \xi_i^2 + a(x) &\geq (1 - |x|^2)^\sigma \left(c_1 + \sum_{i=1}^n a'_i(\tau_i) \xi_i^2 \right) = (1 - |x|^2)^\sigma \left\{ c_1 + \right. \\ &+ \sum_{i=1}^n \left[(1 + p_i \tau_i^{2k})(1 + q_i \tau_i^{2k})^{-1} + 2k(p_i - q_i) \tau_i^{2k} (1 + q_i \tau_i^{2k})^{-2} \right] \xi_i^2 \left. \right\} \geq \\ &\geq \gamma (1 - |x|^2)^\sigma \left(1 + \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \right), \end{aligned}$$

где $\gamma = \min(1; c_1)$, и неравенство (1.6) доказано. Поскольку оператор M имеет вид (5.1), то заключаем, что для задачи (6.1), (6.4), (6.5) справедливы все утверждения статьи.

ABSTRACT. In the paper initial boundary value problem for high order Sobolev type nonlinear degenerate equations is investigated. Under

certain conditions concerning the principal symbols of the operators and the lower terms the existence and uniqueness of solutions of mixed problems in the weight functional spaces is proved. The existence of attractors of semigroups generated by this class of operators is established. Under additional restrictions on the lower terms, global Lyapunov function is constructed and the structure of attractors of the corresponding semigroups is described.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. С. Акопян, Р. Л. Шахбагян, "Смешанная краевая задача для нелинейных систем типа Соболева", Изв. АН Армении, Математика, том 28, № 3, стр. 18 – 30, 1993.
2. Г. С. Акопян, Р. Л. Шахбагян, "Аттракторы эволюционных систем типа Соболева", Изв. АН Армении, Математика, том 29, № 5, стр. 18 – 30, 1994.
3. С. М. Никольский, П. И. Лизоркин, Н. В. Мирошин, "Весовые функциональные пространства и их приложения к исследованию краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений", Изв. Вузов, сер. матем., том 8(315), стр. 4 – 30, 1988.
4. П. И. Лизоркин, С. М. Никольский, "Коэрцитивные свойства эллиптического уравнения с вырождением (случай обобщенных решений)", Труды МИАН СССР, том 157, стр. 90 – 118, 1981.
5. П. И. Лизоркин, С. М. Никольский, "Коэрцитивные свойства эллиптического уравнения с вырождением и обобщенной правой частью", Труды МИАН СССР, том 163, стр. 157 – 183, 1983.
6. С. М. Никольский, Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, Наука, Москва, 1977.
7. Х. Трибель, Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы, Мир, Москва, 1980.
8. С. М. Никольский, "Об одной теореме вложения для функций из весовых классов", Пробл. мат. физ. и вычисл. мат., Наука, Москва, стр. 254 – 264, 1977.
9. Ю. А. Дубинский, "Квазилинейные эллиптические и параболические уравнения любого порядка", УМН, том 23, № 1(123), стр. 45 – 90, 1968.
10. Ж.-Л. Лионс, Некоторые методы решения нелинейных краевых задач, Мир, Москва, 1972.
11. А. В. Бабин, М. И. Вишик, "Аттракторы эволюционных уравнений с частными производными и оценки их размерности, УМН, том. 38, № 4 (232), стр. 133 – 187, 1983.
12. А. В. Бабин, М. И. Вишик, Аттракторы эволюционных уравнений, Наука, Москва, 1989.

17 января 1995

Ереванский государственный университет