АЛГОРИТМЫ ВЫСОКОЙ ТОЧНОСТИ ДЛЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С РАЗНОСТНЫМИ ЯДРАМИ

А. Б. Нерсесян, Н. В. Оганесян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, т. 29, № 6, 1994

В статье к уравнениям Фредгольма второго рода с гладкими разностными ядрами применено некоторое усовершенствование стандартного метода типа IMT-квадратуры. Показано, что при этом сложность и характеристика памяти улучшаются. Для решения возмущенной линейной алгебраической системы Теплица использована схема Шермана–Моррисона. Приведены численные результаты.

Ключевые слова. *формула Эйлера-Маклорена, численные квадратуры, интегральные уравнения, теплицева матрица, быстрые алгоритмы*

ВВЕДЕНИЕ

Метод квадратур (метод Нистрёма, см. [1]) является, по существу, одним из наиболее эффективных алгоритмов численного решения одномерных интегральных уравнений. В случае линейного уравнения

$$y(x) = \int_{-1}^{1} K(x,t)y(t)\,dt + f(x), \quad x \in [-1,1] \tag{1}$$

приближенное решение $y_N \approx y$ находится из интерполяционной формулы

$$y_N(x) = \sum_{j=-N}^{N} \alpha_j K(x,t_j) y_N(t_j) + f(x), \tag{1'}$$

где $\{t_j\}$ и $\{\alpha_j\}$ – узлы и весовые функции соответствующей квадратурной формулы, значения $y_N(t_j)$ $(j = 0, \pm1, \ldots, \pm N)$ определяются из (1′) при $x = t_i$

Данное исследование частично финансировано грантом № RYS000 Международного научного фонда.

$(i = 0, \pm 1, \ldots, \pm N)$ посредством решения алгебраической системы. При переходе от (1) к (1′) уровень ошибки зависит как от квадратурной формулы, так и от гладкости ядра K.[1]

Для получения высокой точности, вообще говоря, необходимо решать системы очень высокого порядка. Это приводит к жестким ограничениям на скорость и память вычислительных систем. Именно, сложность прямых алгоритмов решения алгебраических систем с $N \times N$-матрицей $(N \to \infty)$ имеет порядок $O(N^3)$. Требуемая же компьютерная память имеет порядок $O(N^2)$. В случае разностного ядра $K = K(x - t)$ эти параметры можно значительно улучшить. Так, в [2, 3] применен метод "непрерывного вложения", обеспечивающий разрешимость всех урезанных уравнений, полученных из [1] заменой отрезка интегрирования $[-1, 1]$ на $[-1, \tau]$, $-1 < \tau \leq 1$. При этом, одношаговый алгоритм на равномерной сетке $\{t_j\}$ имеет сложность $O(N^2)$, однако, для гладкого ядра его точность имеет лишь порядок $O(N^{-2})$.

В работе [4] разработан метод "дискретного вложения", требующий разрешимости всех урезанных уравнений лишь на выбранной сети $\{\tau_j\}$. Соответствующие алгоритмы могут быть любого степенного порядка точности при сложности $O(N^2)$. Например, если $K(x) \in C^6[-1, 1]$ и порядок точности равен $O(N^{-6})$, то сложность алгоритма равна $O(N^2)$ при используемой памяти порядка $O(N)$, $N \to \infty$. В этом случае основой дискретизации является квадратурная формула Гаусса шестого порядка точности и соответствующая сетка состоит из равномерно распределенных трехточечных панелей.

Отметим, что на основе формул Гаусса для уравнения (1) могут быть построены алгоритмы точности $O(N^{2p})$ с любым p $(N \to \infty,\ K = K(x - t) \in$ $\in C^{2p})$. Но в этом случае матрица соответствующей алгебраической системы

[1]Гладкость f в правой части (1) не играет решающей роли, поскольку можно ввести новую неизвестную функцию $z = y - f$.

имеет $(p \times p)$–блочную теплицеву структуру, и сложность алгоритма имеет порядок $C(p)N^2+O(N)$ (см. [5]), где $C(p)=O(p)$ $(p\to\infty)$. Быстрое преобразование Фурье (FFT), в принципе, позволяет довести сложность этих алгоритмов до порядка $O(N\ln^2 N)$, $N\to\infty$, однако для больших значений p их практическая эффективность резко падает.

В данной статье разработаны алгоритмы любой степенной точности с улучшенными характеристиками. Примененный здесь метод аналогичен подходу, развитому в 1972 М. Ири, С. Моригути и И. Такасава [6]. В нашем случае метод основан на выборе сетки t_j, равномерной почти на всем отрезке [-1, 1], кроме окрестностей крайних точек $x=\pm1$, где сеть сгущается.

§ 1. ФОРМУЛА ЭЙЛЕРА–МАКЛОРЕНА И КВАДРАТУРЫ НА ПОЧТИ РАВНОМЕРНОЙ СЕТКЕ

1.1. Пусть T_N – формула трапеций

$$T_N(f)=\frac{h}{2}(f(-1)+f(1))+h\sum_{k=-N+1}^{N-1} f\left(\frac{k}{N}\right),\quad h=1/N,\quad N\geq 1. \tag{2}$$

Формула Эйлера–Маклорена. *(см. [7], § 2). При любом $f(x)\in C^{2p+1}[-1,1]$*

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = T_N(f)-\sum_{k=1}^{p}\frac{B_{2k}}{(2k)!}h^{2k}\left(f^{2k-1}(1)-f^{2k-1}(-1)\right)-$$
$$-(2h)^{2p+1}\int_{-1}^{1} P_{2p+1}\left(\frac{N(x-1)}{2}\right)f^{2p+1}(x)dx, \tag{3}$$

где $P_k(x)$ – полиномы Бернулли, представимые в виде

$$P_{2k}(x)=(-1)^{m-1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cos 2\pi nx}{(2\pi n)^{2m}},\quad P_{2k+1}(x)=(-1)^{m-1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\sin 2\pi nx}{(2\pi n)^{2m+1}}, \tag{3'}$$

а $B_{2n}=(2n)!\,P_{2n}(0)$ – числа Бернулли.

В основе вывода дальнейших квадратурных формул лежит тождество (3). Нам понадобится следующий аналог этого тождества для “формулы средней точки” :

$$M_N(f)=h\sum_{j=-N+1}^{N} f\left(\frac{2j-1}{2N}\right). \tag{4}$$

Из очевидного соотношения $T_{2N}(f)=\frac{1}{2}(T_N(f)+M_N(f))$ вытекает

Вторая формула Эйлера–Маклорена *Для любой функции* $f \in C^{2p+1}[0,1]$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = M_N(f) + \sum_{k=1}^{p} \frac{B_{2k}(1-2^{1-2k})}{(2k)!} h^{2k} \left(f^{(2k-1)}(1) - f^{(2k-1)}(-1)\right) +$$

$$+(2h)^{2p+1} \int_{-1}^{1} \left[P_{2p+1}(N(x-1)) - 2^{-2p} P_{2p+1}\left(\frac{N(x-1)}{2}\right)\right] f^{(2p+1)}(x)\,dx. \quad (5)$$

Замечание 1. Преимуществом формулы (5) являются не только ее большая точность, но и то, что в ней не использованы значения $f(x)$ в крайних точках $x = \pm 1$. Это практически позволяет применить (4) к функции $f(x)$, обладающей особенностями в точках $x = \pm 1$ (см. ниже, п. 3.2, а также [2], § 2.10.6).

1.2. Формулы (3) и (5), вообще говоря, имеют точность порядка $O(N^{-2})$, $N \to \infty$. Однако их точность резко возрастает, если $f^{(2s-1)}(1) - f^{(2s-1)}(-1) = 0$, $s = 1,\ldots,p$; $p \geq 2$. Для периодических гладких функций (см. [2], § 2.9) эта точность выше любой степенной, т. е. имеет "бесконечный порядок".

Метод IMT основан на формуле замены переменной (см. [6], или [7], § 2.9.2)

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} f(g(x))g'(x)\,dx. \quad (6)$$

Если функция $g(x) \in C^\infty$ выбрана так, чтобы $g(\pm 1) = \pm 1$ и $g^{(k)}(\pm 1) = 0$ ($k = 0, 1, \ldots$), то, применив (3) и (4) к функции $F(x) = f(g(x))g'(x)$, приходим к квадратурной формуле бесконечного порядка точности. В [2], § 2.9.2 для этого была предложена функция $g(x) = 2\varphi(\frac{x+1}{2})/\varphi(1) - 1$, где

$$\varphi(x) = \int_{-1}^{x} \exp\{-a(1+t)^{-\alpha} - b(1-t)^{-\beta}\}\,dt, \quad \alpha, \beta, a, b > 0. \quad (7)$$

С практической точки зрения достаточно потребовать, чтобы при $p \gg 2$ и $g \in C^{2p}$ выполнялись условия

$$g(\pm 1) = \pm 1, \quad g^{(k)}(\pm 1) = 0, \quad k = 1, \ldots, 2p-1. \quad (8)$$

Обозначив $F(x) = f(x)g'(x)$ ($f \in C^{2p}$), получаем

$$\begin{aligned} &F^{(k)}(\pm 1) = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, 2p-1), \\ &F^{(2p)}(\pm 1) = f(\pm 1)g^{(2p)}(\pm 1). \end{aligned} \quad (8')$$

Из (3) и (5) следует, что

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = T_N^*(f) + O(h^{2p+1}) = M_N^*(f) + O(h^{2p+1}), \tag{9}$$

где

$$\begin{aligned} T_N^*(F) &= T_N(F) - \frac{B_{2p}}{(2p)!}h^{2p}\left\{f(1)g^{(2p)}(1) - f(-1)g^{(2p)}(-1)\right\}, \\ M_N^*(f) &= M_N(F) + \frac{B_{2p}(1-2^{1-2p})}{(2p)!}h^{2p}\left\{f(1)g^{(2p)}(1) - f(-1)g^{(2p)}(-1)\right\}. \end{aligned} \tag{9'}$$

1.3. Квадратурные формулы (9) удобны для решения уравнения (1) с гладким ядром общего типа. Однако, в случае разностного ядра $K = K(x-t)$, применение этих формул нарушает теплицеву структуру матрицы линейной системы, соответствующей (2). Наложим на функцию $g(x)$, определенную из (8), дополнительное ограничение

$$g'(x) = \text{const} > 0, \qquad |x| \le \theta, \quad 0 < \theta < 1. \tag{10}$$

Тогда в $(9')$ значения $f(x)$ используются при $|x| \le \theta$ на равномерной сети, а при $\theta < |x| \le 1$ – на сети, сгущающейся в крайних точках $x = \pm 1$.

Для построения такой функции сначала рассмотрим случай $p = \infty$, когда $g \in C^\infty$, $g(\pm 1) = \pm 1$, $g^{(k)}(\pm 1) = 0$, $k = 1, 2, \ldots$ и выполнено условие (10). Пусть $g_0(x)$ – функция, удовлетворяющая всем условиям, за исключением (10) (например, функция (7)). Пусть

$$\rho(x) = \int_\theta^x \left[g_0\left(\frac{2(t-\theta)}{1-\theta} - 1\right) + 1\right] dt. \tag{11}$$

Далее, пусть $\rho(1) \ne 0$ и $k > 1$. Непосредственная проверка показывает, что функция

$$g_1(x) = \begin{cases} kx, & \text{при } |x| \le \theta, \\ kx - (\alpha x + \beta)\rho(x), & \text{при } \theta < |x| < 1, \end{cases} \tag{12}$$

где

$$\alpha = \frac{2(1-k)}{\rho(1)^2}, \quad \beta = \frac{(\rho(1)+2)(k-1)}{\rho(1)^2},$$

удовлетворяет требуемым условиям. Дадим конкретные примеры функций, удовлетворяющих условиям (8) и (10) :

$$g_2(x) = \begin{cases} kx, & \text{при } |x| \le \theta; \\ kx - (ax^3 + cx + d)(x-\theta)^m, & \text{при } \theta < |x| \le 1. \end{cases} \tag{13}$$

Здесь $m \ge 2$ – целое число и

$$\begin{aligned} a &= -\frac{m(m^2-1)}{6(1-\theta)^{m+1}(2-m-m^2-6\theta-2m\theta+2\theta^2)}, \\ c &= -\frac{(1-m)(6+5m+m^2-8\theta-4m\theta+2\theta^2)}{2(1-\theta)^{m+1}(2-m-m^2-6\theta-2m\theta+2\theta^2)}, \\ d &= \frac{(-6-11m-6m^2-m^3+24\theta+24m\theta+6m^2\theta-24\theta^2-12m\theta^2+6\theta^3)}{3(1-\theta)^{m+1}(2-m-m^2-6\theta-2m\theta+2\theta^2)}, \\ k &= \frac{(1+m)(\theta-m-3)}{(2-m-m^2-6\theta-2m\theta+2\theta^2)}, \end{aligned} \tag{13'}$$

$$g_3(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{1+\theta}, & \text{при } |x| \le \theta, \\ \dfrac{2x}{1+\theta} - \dfrac{1-\theta}{1+\theta}\exp\dfrac{2(x-1)}{x-\theta}, & \text{при } \theta < |x| \le 1. \end{cases} \tag{14}$$

Функция g_2 удовлетворяет условиям (8), (10) при $p = 2$, но g_3 удовлетворяет тем же условиям при $p = 1$ и $g_3''(\pm 1) = 0$. При $m \ge 5$ также имеем (см. ниже, (23))

$$g_2^{(4)}(1) = \frac{m(-2-m+2m^2+m^3)(-3-m+2\theta)}{(-1+\theta)^3(2-m-m^2-6\theta-2m\theta+2\theta^2)}. \tag{15}$$

Отметим, что $g_1, g_2 \in C^{m-1}$, а $g_3 \in C^\infty$. Для построения аналогичных примеров для больших значений p полезна следующая

Лемма 1. *Пусть функции $r_i(x) \in C^m$, $r_i([-1,1]) = [-1,1]$, удовлетворяют условиям (8) при $p = p_i \ge 1$ ($i = 1,2$). Тогда функция $R(x) = r_2(r_1(x))$ при $m \ge 2p_1 + 2p_2(2p_2 - 1)$ удовлетворяет тем же условиям с $p = 4p_1p_2 - 1$.*

Доказательство. Очевидно $R(\pm 1) = \pm 1$. Из соотношения $R'(x) = r_2'(r_1(x))r_1'(x)$, например при $x \to 1$, заключаем, что

$$R'(x) \sim r_2'(1 - O((1-x)^{2p_1}(1-x)^{2p_2-1}) \sim O\left((1-x)^{2p_1(2p_2-1)+2p_1-1}\right).$$

1.4. Рассмотрим формулу (9′) в случае, когда $\theta = \theta(N) \to 1$ ($N \to \infty$). Это позволит строить экономичные алгоритмы.

Теорема. *Пусть $g(x)$ – одна из функций g_i $(i = 2, 3)$ и $f \in C^{2p+1}$. Тогда при $\epsilon(N) = 1 - \theta(N) \to 0$ $(N \to \infty)$*

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = T_N^*(f) + O([N\epsilon(N)]^{-2p-1}) = M_N^*(f) + O([N\epsilon(N)]^{-2p-1}), \tag{16}$$

где $p = 1$ при $g(x) = g_2$ и $p = 2$ при $g(x) = g_3$.

Доказательство. Докажем сначала оценку

$$|g_3^{(k)}(x)| \le d_k(1-\theta)^{-2k}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, 2p, \quad d_k = \text{const}. \tag{16'}$$

Для этого введем в рассмотрение функцию

$$h(x) = \exp\frac{2(x-1)}{x-\theta}, \quad 0 < \theta \le 1. \tag{17}$$

Ее производные имеют вид

$$h^{(k)}(x) = \frac{P_k(x)}{(x-\theta)^{2k}} h(x), \tag{17'}$$

где $P_k(x)$ – многочлены, удовлетворяющие рекуррентной формуле

$$P_{k+1}(x) = P_k'(x)(x-\theta)^2 + 2P_k(x)[kx - k\theta + (1-\theta)]. \tag{18}$$

Имеем

$$\max_{\theta \le x \le 1}\left(\frac{h(x)}{(x-\theta)^{2k}}\right) = \frac{k^k e^{2-k}}{2^k(1-\theta)^{2k}}. \tag{19}$$

Из оценки

$$|P_k(x)| \le A_k \sum x^k, \quad \theta \le x \le 1$$

и (18) следует, что

$$|P_k(x)| \le A_k \sum_{m=1}^{k} m + k\,\text{const}. \tag{20}$$

Тем самым, достаточно брать

$$A_k = \text{const}\,(k!)^2. \tag{21}$$

В случае, когда $g = g_3$ в (16) можно брать

$$d_k = (\text{const})^k (k!)^3. \tag{21'}$$

Отсюда и из (9), (3) и (5) следуют оценки (16). В случае полиномиальной функции $g = g_2$ в правой части (16′) надо брать степень k вместо $2k$.

Замечание 2. Для функции $g = g_1(x)$ в (16) число p может быть любым. Однако, применение функций вида (11) не удобно, поскольку их вычисление связано с квадратурами.

Замечание 3. При $\varepsilon(N) = 1 - \theta(N) \to 0$, $N \to \infty$ точность квадратур T_N^* и M_N^*, вообще говоря, уменьшается. Однако оценки (16′) достаточно грубы. В частности, они не учитывают того, что $g^{(k)}(x) \equiv 0 (k \geq 2)$ при $|x| \leq \theta(N)$.

Для дальнейшего изложения нам понадобится следующий очевидный результат.

Лемма 2. *Пусть* $\phi_i(x) = k_i x$, $|x| \leq \theta_i < 1$ *и* $k_i = const \geq 1$ $(i = 1,2)$. *Тогда* $\phi_2(\phi_1(x)) = k_1 k_2 x$ *при* $|x| < \theta_2/k_1$.

§ 2. АЛГОРИТМЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С РАЗНОСТНЫМИ ЯДРАМИ

2.1. Рассмотрим уравнение

$$(\mathcal{I} - \mathcal{K})y \overset{\text{def}}{\equiv} y(x) - \int_{-1}^{1} K(x-t)y(t)\,dt = f(x), \quad |x| \leq 1, \tag{22}$$

где $K(x) \in C^{2p}[-2,2], f(x) \in C^{2p}[-1,1]$ и $p \geq 1$. Метод решения основан на применении квадратуры $M_N^*(F)$ (см. (9′) при $\theta = \theta(N)$).

Из вышеприведенного следует, что для приближенного решения $y_N = y$ интерполяционная формула (1′) принимает вид

$$y_N(x) = f(x) + \sum_{j=1-N}^{N-1} K\left(x - g\left(\frac{2j+1}{N} - 1\right)\right) g'\left(\frac{2j+1}{N} - 1\right) + \frac{B_{2p}(1 - 2^{1-2p})}{(2p)!} \times$$

$$\times N^{-2p}\left\{K(x-1)g^{(2p)}(1) - K(x+1)g^{(2p)}(-1)\right\}, \quad (\theta = \theta(N)). \tag{23}$$

Обозначим

$$t_s(\theta) = \begin{cases} \left(\dfrac{2s+1}{N} - 1\right)k, & |s| \leq \theta(N)N; \\ g\left(\dfrac{2s+1}{N} - 1\right), & \theta N < |s| \leq N. \end{cases} \tag{23′}$$

Для определения $y = \{y_N(t_s)\}$ $(s = 0, \pm 1, \ldots, \pm N)$ получим алгебраическую систему с матрицей

$$A = T + B, \tag{24}$$

где T - теплицева матрица размерности $(2N \times 2N)$:

$$T = \left\| K\left(\frac{2k(i-j)}{N}\right)\right\|_{i,j=-N}^{N}, \tag{24'}$$

а B имеет вид

$$B = B_1 D_1 + B_2 D_2,$$

где B_1 и B_2 – матрицы размерности $(2N \times 2m(\theta)N)$, D_1, D_2 – размерности $(2m(N) \times 2N)$. Здесь $m(\theta) = [N - \theta(N)]$. При $m(\theta) = o(N)$ $(N \to \infty)$ B является матрицей малого ранга. Таким образом, матрица A является возмущением теплицевой матрицы.

Для решения уравнения $Ay = f$ применим схему Шермана–Моррисона (см., напр., [8]). Обозначив $z_1 = D_1 y$ и $z_2 = D_2 y$ (z_1 и z_2 – векторы размерности $2m(N)N$), перепишем эту систему в виде

$$\begin{aligned} z_1 - D_1T^{-1}B_1z_1 + D_1T^{-1}B_2z_2 = D_1T^{-1}f, \\ z_2 - D_2T^{-1}B_1z_1 + D_2T^{-1}B_2z_2 = D_2T^{-1}f. \end{aligned} \tag{25}$$

Легко видеть, что (25) – система с матрицей размерности $(4m(N)N \times 4m(N)N)$. Ясно, что матрицы A и T невырождены, если оператор $\mathcal{I} - \mathcal{K}$ обратим и число N достаточно большое. Алгоритмы решения систем с теплицевой матрицей размерности $N \times N$ имеют сложность порядка $O(N^2)$ $(N \to \infty)$ (см. [5]). Для решения систем с матрицами размерности $p \times p$ общего типа существуют устойчивые алгоритмы сложности $O(p^3)$ $(p \to \infty)$. Оценка матриц $T^{-1}B_i$ $(i = 1, 2)$ при $Nm(N) \to \infty$ $(N \to \infty)$ требует (см. [5]) $O(m(N)N^3)$ операций. Остальные операции имеют меньший порядок $O(N^2 + m(N)^3N^3)$, и, например, при $m(N) = O(N^{-1/3})$ общая сложность равна $O(N^{8/3})$. Однако, общая сложность в некоторых случаях может быть существенно уменьшена. Именно, если иметь в виду то, что значение $\bar{h}_i = t_{i+1}(\theta) - t_i(\theta))$ при $|i| = N-1, N-2, \ldots, \theta(N)N$ очень мало по сравнению с $h_i = \frac{2}{N}$ при $|i| = 0, 1, \ldots, \theta(N)N$, то становится ясно, что нет необходимости в вычислении столбцов матрицы $T^{-1}B_i$ $(i = 1, 2)$. Для сохранения требуемой точности достаточно вычислить лишь столбцы при больших $|i|$, остальные найти методом интерполяции, используя лишь $O(N)$ операций на каждый столбец. Другой способ нахождения этих столбцов состоит в использовании формулы для резольвентного ядра уравнения (22) (см. [4]). Отметим также, что предложенные алгоритмы удобны для реализации на параллельных компьютерных системах. Реализация этих подходов лежит за пределами исследуемых в данной статье вопросов. Ниже на некоторых примерах мы покажем, что при вычислении по предложенному методу, по сравнению с методом, основанным на правиле средней точки, в принципе, возможно увеличение точности.

§3. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

3.1. Эффективность квадратурного метода была проверена для уравнения

$$f(x) = \frac{x}{(0.03 + (x - 0.8)^2)} + (0.04 + (x + 0.5)^2) \tag{26}$$

при

$$I = \int_{-1}^{1} f(x)dx = 21.99141165.... \tag{26'}$$

Функция $f(x)$ имеет резко выраженные пики в точках $x = 0.8$ и $x = -0.5$. Такие функции поддаются квадратурам с трудом, и поэтому удобны для тестирования (см., напр., [7]). Результаты некоторых численных экспериментов можно найти в таблицах 1 – 5. Результат применения правила средней точки для оценки интеграла (26′) дан во втором столбце таблицы 3 (при $\theta = 1$).

Ниже через n обозначено общее число точек сетки, а через n' – число точек неравномерной сети.

Таблица 1.

Ошибка δ_n для интеграла (26′) с $g = g_2(x)$ при $\theta(n) = 1 - 2n^{-1/3}$.

n	$m=4$	5	6	8	10
8	2.0e + 0	1.7e + 0	0.7e − 1	1.0e + 0	1.6e + 0
16	2.8e − 2	2.7e − 2	1.7e − 2	3.3e − 2	1.3e − 2
32	1.9e − 4	2.0e − 5	1.9e − 6	6.2e − 5	1.4e − 4
64	1.9e − 5	2.0e − 7	3.0e − 7	2.0e − 6	7.0e − 6
128	2.3e − 6	6.5e − 8	2.1e − 8	9.6e − 8	3.3e − 7
256	1.3e − 7	7.7e − 9	9.1e − 10	4.6e − 9	1.6e − 8
512	3.8e − 8	2.7e − 11	2.9e − 11	2.2e − 10	7.8e − 10
1024	3.7e − 9	2.5e − 11	2.2e − 12	1.0e − 11	3.8e − 11

В таблицах 1 – 5 ошибка равна $\delta_n = |I - I_n|$, где I_n – приближенное значение интеграла (26′). Результаты приводят к заключению о том, что применение полиномиальных функций $g_2(x)$ предпочтительно ввиду слабого роста их производных (см. оценку (16)). Кроме того, вычисление суперпозиций таких функций проще и точнее. Таблицы ясно показывают, что большая скорость уменьшения $g(x)$ в $x = \pm 1$ требует бóльшей гладкости в $(-1, 1)$.

В таблицах 2, 4, 5 для определения числа точек неравномерной сети мы должны применить лемму 2.

Таблица 2.

Ошибка δ_n для интеграла (26′) при $g = g_2(g_2(x))$, с $\theta(n) = 1 - 2n^{-1/3}$.

n	$m=6$	$m=8$	$m=12$	$m=16$	$m=24$
8	1.3e − 1	7.0e − 1	1.6e + 0	9.5e − 1	1.1e + 0
16	2.5e − 1	4.4e − 2	6.1e − 2	5.8e − 1	9.0e − 2
32	9.0e − 4	3.2e − 4	1.4e − 6	4.4e − 4	4.8e − 3
64	3.6e − 7	5.7e − 10	9.3e − 9	3.5e − 7	5.3e − 5
128	4.3e − 9	1.5e − 11	3.6e − 12	2.5e − 10	3.8e − 8
256	4.9e − 10	6.3e − 13	4.2e − 14	1.4e − 13	4.2e − 11
512	2.2e − 11	1.8e − 14	3.2e − 14	1.1e − 14	8.5e − 14
1024	4.0e − 13	5.3e − 14	3.9e − 14	1.7e − 14	2.5e − 13

Таблица 3.

Ошибка δ_n для интеграла (26′) при $g = g_3(x)$

n	$\theta = 1$	$\theta = 1 - 2 \cdot n^{-1/3}$		$\theta = 1 - n^{-1/3}$	
	$\delta_n(0)$	$\delta_n(1)$	$\delta_n(2)$	$\delta_n(1)$	$\delta_n(2)$
8	$5.0e-2$	$1.7e+0$	$8.4e+0$	$2.2e+0$	$2.9e+0$
16	$5.4e-2$	$4.0e-2$	$1.0e+0$	$4.5e-2$	$1.4e-1$
32	$1.3e-2$	$2.0e-4$	$9.4e-3$	$3.8e-3$	$7.1e-4$
64	$3.2e-3$	$6.3e-7$	$1.5e-6$	$1.1e-4$	$6.3e-4$
128	$8.1e-4$	$2.2e-7$	$1.5e-7$	$2.9e-6$	$6.8e-6$
256	$2.0e-4$	$2.5e-8$	$1.5e-10$	$2.0e-7$	$2.1e-8$
512	$5.1e-5$	$3.0e-9$	$1.8e-14$	$2.2e-8$	$8.9e-11$
1024	$1.3e-5$	$3.6e-10$	$3.6e-15$	$2.7e-9$	$5.7e-14$

Таблица 4.

Ошибка δ_n для интеграла (26′) с $g = g_2(g_3(x))$ при $\theta(n) = 1 - n^{-1/3}$.

n	θ_n	$m = 6$	$m = 8$	$m = 12$	$m = 16$	$m = 24$
8	0.5	$1.9e+0$	$1.4e+0$	$4.2e-1$	$1.4e+0$	$1.9e+0$
16	0.6	$8.3e-2$	$1.2e-1$	$1.2e-1$	$5.6e-2$	$0.8e-2$
32	0.68	$3.5e-3$	$5.0e-3$	$3.8e-3$	$2.9e-3$	$3.5e-3$
64	0.75	$1.2e-4$	$1.4e-4$	$1.1e-4$	$1.0e-4$	$1.2e-4$
128	0.8	$4.1e-6$	$3.6e-6$	$4.0e-6$	$4.0e-6$	$4.1e-6$
256	0.84	$2.1e-8$	$1.3e-8$	$1.9e-8$	$2.0e-8$	$2.1e-8$
512	0.88	$7.9e-11$	$6.2e-11$	$7.5e-11$	$7.7e-11$	$7.8e-11$
1024	0.9	$1.2e-13$	$3.9e-14$	$1.0e-13$	$1.1e-13$	$1.2e-13$

Таблица 5.

Ошибка δ_n для интеграла (26′) при $g = g_3(g_2(x))$, с $\theta(n) = 1 - n^{-1/3}$.

n	θ_n	$m = 6$	$m = 8$	$m = 12$	$m = 16$	$m = 24$
8	0.50	$2.8e+0$	$1.9e+0$	$0.6e-1$	$2.3e-1$	$1.1e+0$
16	0.60	$5.3e-2$	$5.0e-2$	$7.9e-2$	$5.3e-2$	$1.2e-2$
32	0.69	$8.6e-4$	$9.4e-3$	$4.1e-3$	$7.5e-3$	$2.6e-3$
64	0.75	$2.0e-4$	$1.0e-4$	$1.6e-4$	$2.2e-4$	$2.7e-4$
128	0.80	$4.7e-6$	$7.4e-6$	$3.4e-6$	$6.3e-6$	$3.2e-6$
256	0.84	$5.8e-8$	$2.3e-8$	$2.8e-8$	$4.9e-8$	$2.6e-8$
512	0.88	$4.2e-11$	$1.5e-10$	$1.0e-10$	$6.9e-12$	$6.3e-11$
1024	0.90	$3.1e-12$	$9.6e-14$	$5.7e-14$	$3.6e-14$	$6.0e-14$

3.2. Точность предложенного метода решения интегральных уравнений проверена на следующих двух примерах.

Задача 1.

$$K_1(x-t)=\frac{1}{1/9+(x-t)^2)},\quad y_1(x)\equiv 1,$$
$$f_1(x)=1-3\mathrm{arctg}[3(1+x)]-3\mathrm{arctg}[3(1-x)]. \tag{26}$$

Задача 2.

$$K_2(x-t)=\frac{1}{(4-(x-t)^2)^{\frac{1}{2}}},\quad y_2(x)\equiv 1,$$
$$f_2(x)=1-\arcsin\left[\frac{11+x}{2}\right]-\arcsin\left(\frac{1-x}{2}\right). \tag{27}$$

Ядра типа $K_1(x-t)$, имеющие резкие пики в точке $x=0$, часто применяются в качестве тестовых (см., напр., [1]). Функция $K_2(x)$ имеет особенность в точке $x=\pm 2$.

В таблицах 6 и 7 среднеквадратическая ошибка d_n и абсолютная ошибка γ_n вычислены по формулам

$$d_n(i)=\left(\sum_k (y(x_k)-\tilde{y}(x_k))\right)^{\frac{1}{2}},$$
$$\gamma_n(i)=\max_k |y(x_k)-\tilde{y}(x_k)|,\quad (i=0,1,2), \tag{28}$$

где $\{x_n\}$ – соответствующая n-сеть, $y(x)$ – точное решение, а $\widetilde{y}(x_n)$ – приближенное решение. В (29) при $i=0,1,2$ имеем $g=x$ (формула средней точки) и, соответственно, $g=g_3(x)$ и $g=g_3(g_3(x))$.

Таблица 6.

Среднеквадратичная и абсолютная ошибки для задачи 1.

	$\theta=1$	$\theta=1-2^{-\frac{2}{3}}$		$\theta=1-2\cdot 2^{-\frac{2}{3}}$	
n	$d_n(0)$	$d_n(1)$	$d_n(2)$	$d_n(1)$	$d_n(2)$
	$\gamma_n(0)$	$\gamma_n(1)$	$\gamma_n(2)$	$\gamma_n(1)$	$\gamma_n(2)$
8	$1.3e-1$	$1.7e-1$	$6.4e-1$	$3.6e-2$	$4.3e+0$
	$1.7e-1$	$2.4e-1$	$9.0e-1$	$6.6e-2$	$5.0e+0$
16	$4.5e-2$	$5.3e-2$	$3.3e-1$	$3.4e-2$	$1.1e-1$
	$6.9e-2$	$7.6e-2$	$4.1e-1$	$4.2e-2$	$1.4e-1$
32	$1.0e-2$	$3.5e-3$	$2.2e-2$	$2.0e-3$	$8.1e-3$
	$1.7e-2$	$5.0e-3$	$2.7e-2$	$2.7e-3$	$9.4e-3$
64	$2.5e-3$	$1.2e-4$	$2.2e-3$	$1.2e-5$	$5.0e-5$
	$4.3e-3$	$1.7e-4$	$2.9e-3$	$1.5e-5$	$5.9e-5$

Таблица 7.

Среднеквадратичная и абсолютная ошибки для задачи 2.

	$\theta = 1$	$\theta = 1 - 2 \cdot 2^{-\frac{n}{3}}$		$\theta = 1 - 2^{-\frac{n}{3}}$	
n	$d_n(0)$	$d_n(1)$	$d_n(2)$	$d_n(1)$	$d_n(2)$
	$\gamma_n(0)$	$\gamma_n(1)$	$\gamma_n(2)$	$\gamma_n(1)$	$\gamma_n(2)$
8	$3.2e-2$	$2.7e-2$	$3.4e-1$	$.2e-1$	$6.1e-1$
	$3.4e-2$	$3.8e-2$	$3.8e-1$	$1.4e-1$	$7.7e-1$
16	$1.2e-2$	$1.9e-3$	$2.6e-2$	$5.3e-3$	$4.7e-2$
	$1.3e-2$	$4.7e-3$	$3.0e-2$	$7.3e-3$	$5.8e-2$
32	$4.8e-3$	$3.6e-4$	$5.2e-4$	$9.3e-4$	$1.3e-3$
	$5.2e-3$	$1.4e-3$	$6.3e-4$	$3.2e-3$	$1.7e-3$
64	$1.9e-3$	$1.0e-4$	$1.6e-6$	$1.8e-4$	$2.1e-4$
	$2.0e-3$	$5.8e-4$	$2.1e-6$	$1.0e-3$	$2.8e-4$

Предложенный подход эффективен, в частности, если ядро $K(x)$ имеет особенности в точках $x = \pm 2$.

Таблица 8.

Среднеквадратическая и абсолютная ошибки для задачи 1 с $g = g_2(g_2(x))$ при $\theta = 1 - 2 \cdot 2^{-n/3}$.

	$m=10$	$m=12$	$m=14$	$m=16$
d_8	$6.5e-1$	$2.0e-1$	$9.1e-2$	$1.2e-1$
γ_8	$9.1e-1$	$3.1e-1$	$1.5e-1$	$1.7e-1$
d_{16}	$1.6e-2$	$1.7e-2$	$7.9e-2$	$9.0e-2$
γ_{16}	$1.9e-2$	$2.1e-2$	$1.0e-1$	$1.2e-1$
d_{32}	$4.6e-6$	$1.6e-4$	$2.3e-4$	$2.3e-3$
γ_{32}	$5.8e-6$	$2.1e-4$	$3.0e-4$	$3.1e-3$
d_{64}	$4.7e-9$	$5.1e-8$	$1.1e-7$	$2.4e-6$
γ_{64}	$6.0e-9$	$6.7e-8$	$1.5e-7$	$3.2e-6$

Таблица 8 подтверждает предпочтительность применения полиномиальных функций g.

ABSTRACT. A development of a standard IMT-type quadrature method is applied to the second kind Fredholm equations with smooth displacement kernels. Rather good complexity and memory characteristics are demonstrated. Sherman-Morrison scheme for the solution of the perturbed linear algebraic Toeplitz system is used. Numerical examples are given.

ЛИТЕРАТУРА

1. L. M. Delves, J. L. Mohamed, "Computational methods for integral equations," Cambridge Univ. Press, 1985
2. T. Kailath, L. Ljung, M. Morf, "Generalized Krein–Levinson equations for efficient

calculation of Fredholm resolvents of nondisplacement kernels", Topics in Funct. Anal. Advances in Math. Suppl. Studies, 3, pp. 169 - 183, 1978
3. I. Gohberg, I. Koltracht, P. Lancaster, "Second order parallel algorithms for Fredholm integral equations with displacement kernels, integral equations and operator theory", vol. 10, pp. 577 - 594, 1987.
4. А. Б. Нерсесян, "Об эффективном численном решении интегральных уравнений", Известия Акад. Наук Армении, Математика, т. 27, № 2, стр. 1 - 40, 1992.
5. В. В. Воеводин, Е. Е. Тыртышников, Вычисления с теплицевымы матрицами (под редакцией Г. И. Марчука), стр. 124 - 266, вып. 1, Москва, "Наука", 1987.
6. M. Iri, S. Moriguti, Y. Takasawa, "On a certain quadrature formula", [in Japanese], Kokyuroku of the Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto Univ., no. 91, pp. 82 - 118, 1970
7. P. J. Davis, P. Rabinowitz, "Methods of numerical integration", 2nd ed., Academic Press, London, 1984.
8. Y. Wallach, "Alternating sequential / parallel processing. Springer-Verlag, 1982.

20 декабря 1994

Институт математики
Национальной Академии Наук Армении