РАЗРЕШИМОСТЬ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОПЕРАТОРАМИ ТИПА $\mathcal{L}$-СВЕРТКИ

А. Г. Камалян, И. Г. Хачатрян, А. Б. Нерсесян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, т. 29, № 6, 1994

В статье исследованы одномерные интегральные операторы типа $\mathcal{L}$-свертки с ядрами, удовлетворяющими некоторым дифференциальным уравнениям в частных производных. Результаты статьи являются обобщением классической теории для операторов свертки на прямой и полупрямой. Результаты получены на основе спектральной теории обыкновенных дифференциальных операторов и теории сингулярных интегральных операторов.

Ключевые слова. ***интегральные оперетоpы, операторы Винера–Хопфа, спектральная теория дифференциальных операторов, разрешимость***

Содержание

Данное исследование частично финансировано грантом № RYS000 Международного научного фонда.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть l – следующая дифференциальная операция порядка $m \geq 2$:

$$l = \frac{1}{i^m}\frac{d^m}{dx^m} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{i^{2k}} \frac{d^k}{dx^k} p_{2k}(x) \frac{d^k}{dx^k} + \\ + \sum_{k=0}^{n'-1} \frac{1}{2i^{2k+1}} \left\{ \frac{d^k}{dx^k} p_{2k+1}(x) \frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}} + \frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}} p_{2k+1}(x) \frac{d^k}{dx^k} \right\}, \qquad (0.1)$$

где $n = \left[\frac{m}{2}\right]$, $n' = \left[\frac{m-1}{2}\right]$ и каждый коэффициент $p_k(x)$, $0 \leq k \leq m-2$ – вещественная функция на $\mathbb{R}$, обладающая непрерывными производными до порядка $\left[\frac{k+1}{2}\right]$ включительно и удовлетворяющая условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} |p_k(x)|\, dx < \infty, \quad k = 0, 1, \ldots, m-2. \qquad (0.2)$$

Обозначим через $l^{\#}$ операцию дифференцирования, полученную из (0.1) подстановкой $-i$ вместо i. Пусть $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}^{\#}$ – максимальные дифференциальные операторы в $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$, порожденные l и $l^{\#}$ соответственно. Операторы $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}^{\#}$ самосопряженные.

Рассмотрим интегральные операторы $\mathcal{K}$ и $\mathcal{K}^{+}$, действующие, соответственно, в пространствах $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ и $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+)$ $(\mathbb{R}_+ = (0, \infty))$:

$$\mathcal{K}y = \int_{-\infty}^{\infty} K(x,t)\, y(t)\, dt, \quad x \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}), \qquad (0.3)$$

$$\mathcal{K}^{+}y = \int_{0}^{\infty} K(x,t)\, y(t)\, dt, \quad x \in \mathbb{R}_+, \quad y \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+), \qquad (0.4)$$

где полагаем, что ядро $K(x,t)$ удовлетворяет уравнению в частных производных

$$l_x(K(x,t)) = l_t^{\#}(K(x,t)), \quad x, t \in \mathbb{R}. \qquad (0.5)$$

Нижний индекс при l и $l^{\#}$ указывает переменную, по которой действует соответствующая операция. В простейшем случае, когда $l = \frac{1}{i}\frac{d}{dx}$, функция $K(x,t)$ является разностным ядром : $K(x,t) = h(x-t)$). Если $h \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R})$, то интегральное уравнение

$$(\mathcal{I} + \mathcal{K})y = f \qquad (0.6)$$

посредством преобразования Фурье $\mathcal{F}$ сводится к линейному алгебраическому уравнению с коэффициентом $c(\lambda) = 1 + (\mathcal{F}h)(\lambda)$. В этом случае условия разрешимости уравнения (0.6) вполне описываются свойствами символа $c(\lambda)$. Условия разрешимости интегрального уравнения Винера–Хопфа

$$(\mathcal{I} + \mathcal{K}^+)y = f \tag{0.7}$$

описываются посредством факторизации символа $c(\lambda)$. Метод факторизации приводит к необходимым и достаточным условиям фредгольмовости оператора $\mathcal{I}+\mathcal{K}^+$, а также к формуле для его индекса. Этот метод также позволяет описать ядро (нулевое подпространство), ко-ядро, и построить обобщенное обратное оператора $\mathcal{I}+\mathcal{K}^+$, (см. [1], а также [2], где рассмотрен случай разрывного символа).

В работах [3, 4] были исследованы интегральные операторы с матричными ядрами, удовлетворяющими дифференциальным уравнениям типа (0.5). Там же исследована структура резольвентного оператора $(\lambda\mathcal{I} - \mathcal{K})^{-1}$ и дана схема быстрого численного решения для соответствующих интегральных уравнений на конечном сегменте. Как было отмечено в этих работах, разрешимость уравнений, ядра которых удовлетворяют дифференциальным уравнениям типа (0.5), зависит от результатов спектральной теории обыкновенных дифференциальных операторов. В этом случае роль преобразования Фурье играют спектральные преобразования, связанные с операторами, порожденными дифференциальной операцией l. Ниже эта программа реализуется для интегральных уравнений (0.6) и (0.7) с указанным оператором $\mathcal{L}$. С этой целью вводится понятие ядра $\mathcal{L}$–свертки, т. е. функции $K \in \mathbf{C}^m(\mathbb{R}^2)$, являющейся решением уравнения (0.5), принадлежащим области определения $\mathcal{L}^\#$ по отношению ко второму аргументу и удовлетворяющим некоторым условиям суммируемости. Посредством ядер $\mathcal{L}$–свертки и формул (0.3) и (0.4) вводятся интегральные операторы $\mathcal{K}$ и $\mathcal{K}^+$. Они, соответственно, называются оператором полной $\mathcal{L}$–свертки и интегральным оператором $\mathcal{L}$–свертки на полупрямой. В этой работе исследуются интегральные уравнения (0.6) и (0.7), обобщающие, соответственно, интегральное уравнение полной свертки и интегральное уравнение Винера–Хопфа.

В §1 даны некоторые, необходимые для дальнейшего изложения, результаты относительно спектров самосопряженных дифференциальных операторов $\mathcal{L}$, разложении по собственным функциям и существовании оператора преобразования для $\mathcal{L}$.

В §2 рассмотрен интегральный оператор $\mathcal{K}$ полной $\mathcal{L}$–свертки. Специальным образом вводится матрица–функция $A(\lambda)$, определенная на непрерывном спектре $\mathcal{L}$, и семейство матриц Φ_μ с μ, принадлежащим точечному спектру $\mathcal{L}$. Набор $\{A(\lambda),\ \Phi_\mu\}$ играет роль символа оператора $\mathcal{I}+\mathcal{K}$. В терминах этого набора сформулированы необходимые и достаточные условия ограниченности и фредгольмовости $\mathcal{I}+\mathcal{K}$. В случае ограниченного $\mathcal{I}+\mathcal{K}$ построен обобщенный обратный оператор. Напомним, что оператор $\mathcal{A}\colon\ X \longmapsto Y$, где X и Y – банаховы пространства, называется фредгольмовым, если его образ $\mathrm{Im}\mathcal{A}$ замкнут, а пространства $\dim\ker\mathcal{A}$ и $\dim\mathrm{Coker}\mathcal{A}$ конечномерны. Если существует оператор $\mathcal{A}^{(-1)}$: $Y \longmapsto X$, удовлетворяющий условиям $\mathcal{A}\mathcal{A}^{(-1)}\mathcal{A}=\mathcal{A}$, $\mathcal{A}^{(-1)}\mathcal{A}\mathcal{A}^{(-1)}=\mathcal{A}^{(-1)}$, то его мы будем называть ***обобщенным обратным*** оператора $\mathcal{A}$.

В §3 исследован интегральный оператор $\mathcal{K}^+$ $\mathcal{L}$-свертки на полупрямой, в случае, когда $\mathcal{L}$ обладает оператором преобразования (см. [5]). Здесь приходится рассматривать также матрицу рассеяния (см. [6]) и спектральное преобразование оператора $\mathcal{L}$. Когда точечный спектр оператора $\mathcal{L}$ конечен, задача фредгольмовости для $\mathcal{I}+\mathcal{K}^+$ сведена к аналогичной задаче для операторов типа свертки и сингулярных интегральных операторов со сдвигом.

В §4 рассмотрен случай, когда $\mathcal{L}$ – оператор Штурма–Лиувилля, т. е. $l=-\frac{d^2}{dx^2}+p_0(x)$. В этом случае для $\mathcal{I}+\mathcal{K}^+$, в терминах матриц рассеяния и $A(\lambda)$, установлен критерий фредгольмовости.

В §5 рассмотрен случай, когда $\mathcal{L}$ – оператор Штурма–Лиувилля с безотражательным потенциалом p_0 (см., напр., [7]). Для оператора $\mathcal{I} + \mathcal{K}^+$, при дополнительном условии, что $K(x, x-t) \to 0$ при $x \to \infty$, построена полная теория разрешимости.

§1. НЕОБХОДИМЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ СПЕКТРАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

1.1. Сформулируем некоторые необходимые результаты, относящиеся к описанию спектра оператора $\mathcal{L}$ и разложениям по его собственным функциям.

Лемма 1.1. *(см. [10]) Для любого комплексного $\lambda \neq 0$ дифференциальное уравнение*

$$l(y) = \lambda^m y \tag{1.1}$$

имеет две фундаментальные системы решений : $y_k^+(x,\lambda)$ и $y_k^-(x,\lambda)$ ($k = 0, 1, \dots, m-1$), обладающие асимптотикой

$$y_k^{\pm}(x,\lambda) = e^{i\omega_k \lambda x}(1 + o(1)), \quad x \to \pm\infty, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \tag{1.2}$$

где

$$\omega_k = \exp\left(\frac{2\pi k}{m}\right). \tag{1.3}$$

Следствие 1.1. Если $\lambda \neq 0$, то решение $z(x,\lambda)$ дифференциального уравнения (1.1) принадлежит $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{x \to \pm\infty} z(x,\lambda) = 0.$$

Если число $\lambda^m \neq 0$ вещественно и решение $z(x,\lambda)$ уравнения (1.1) принадлежит $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, то

$$z(x,\lambda) = O\left(\exp(-|x\lambda| \sin\frac{\pi}{m}\right), \quad x \to \pm\infty.$$

Теорема 1.1. *(см. [6]). 1) При выполнении условий (0.2) непрерывный спектр оператора $\mathcal{L}$ в случае нечетного m совпадает с осью $\mathbb{R}$, а в случае четного m – с* *полупрямой $\mathbb{R}_+$. Точечный спектр ограничен и в качестве точки сгущения может иметь лишь $\lambda = 0$. Если $m = 2n+1$, то кратность любого собственного значения $\lambda \neq 0$ не превосходит n. Если же $m = 2n$, то кратность отрицательных (или положительных) собственных значений не превосходит n (или $n-1$). В случае, когда $m = 2$, оператор $\mathcal{L}$ не имеет положительных собственных значений.*

2) Если выполнено одно из нижеследующих условий

$$\int_{-\infty}^{0} |p_k(x)|\,dx + \int_0^\infty (1+x)^{m-1-k}|p_k(x)|\,dx < \infty, \quad k = 0,1,\dots,m-2, \tag{1.4}$$

$$\int_{-\infty}^{0} (1-x)^{m-1-k}|p_k(x)|\,dx + \int_0^\infty |p_k(x)|\,dx < \infty, \quad k = 0,1,\dots,m-2, \tag{1.5}$$

то ноль не является собственным значением оператора $\mathcal{L}$.

3) При выполнении условия

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1+|x|)^{m-1-k}|p_k(x)|\,dx < \infty, \quad k = 0,1,\dots,m-2, \tag{1.6}$$

в случае четного m число отрицательных собственных значений оператора $\mathcal{L}$ конечно. В случаях $m = 3$ и $m = 4$ суммарное число собственных значений конечно.

Приведем формулу разложения по собственным функциям оператора $\mathcal{L}$. Обозначим $T = \{\lambda\colon \lambda^m$ является собственным значением $\mathcal{L}$, $\operatorname{Im}\lambda = 0$, если m нечетно; $\lambda \geq 0$ или $\arg\lambda = \frac{\pi}{m}$, если m четно$\}$. Пусть r_λ, $(\lambda \in T)$ – кратность собственного значения λ^m, а $v_s(x,\lambda), s = 1,2,\dots,r_\lambda$ – ортонормальная система собственных функций оператора $\mathcal{L}$, соответствующая собственному значению λ^m.

Лемма 1.2. *(см. [6], [9]). При $m = 2n+1$ из условий (0.2) следует, что для каждого $\lambda \in \mathbb{R} \setminus (T \cup \{0\})$ дифференциальное уравнение (1.6) имеет единственное,* *с точностью до постоянного множителя, нетривиальное решение $u(x,\lambda)$, ограниченное на $\mathbb{R}$. При соответствующей нормировке это решение обладает асимптотикой*

$$u(x,\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} A_0^{\pm}(\lambda) e^{i\lambda x} + o(1), \quad x \to \pm\infty, \tag{1.7}$$

где $A_0^+(\lambda) = |A_0^-(\lambda)| = 1$. Функция $u(x,\lambda)$ непрерывна по обеим переменным в точке $x \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus (T \cup \{0\})$ и допускает непрерывное продолжение на значения $\lambda \in T \setminus \{0\}$. Для каждого $\lambda \in T \setminus \{0\}$ функция $u(x,\lambda)$ является решением уравнения (1.1), удовлетворяющего условию (1.7). На каждом конечном сегменте равномерно по x выполняется соотношение

$$u(x,\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\lambda x} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right), \quad \lambda \to \pm\infty, \tag{1.8}$$

где $O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ ограничено на $\{(x,\lambda): \quad x \in \mathbb{R}, \lambda \in (-\infty,-\varepsilon) \cup (\varepsilon,\infty)\}$ при любом $\varepsilon > 0$.

Указанное решение $u(x,\lambda)$ уравнения (1.1) является нормированной обобщенной собственной функцией оператора $\mathcal{L}$, соответствующей непрерывному спектру.

Теорема 1.2. *(см. [6]). Пусть $m = 2n+1$ и выполнены условия (0.2). Тогда для каждой функции $g \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ интеграл*

$$(\mathcal{U}_0 g)(\lambda) = \tilde{g}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{u(x,\lambda)}\, g(x)\, dx, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \tag{1.9}$$

сходится по норме пространства $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ и определяет частично изометрический оператор $\mathcal{U}_0$. Оператор $\mathcal{U}_0$ отображает $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ на себя, его нулевое подпространство $\mathbf{H}_0$ совпадает с замыканием линейной оболочки всех собственных функций оператора $\mathcal{L}$, а $\mathcal{U}_0 \mathcal{L} \mathcal{U}_0^*$ является оператором умножения на функцию λ^m.

Из этой теоремы вытекает равенство Парсеваля

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|^2\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{g}(\lambda)|^2 d\lambda + \sum_{\lambda \in T} \sum_{s=1}^{r_\lambda} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \overline{v_s(t,\lambda)}\, g(t)\, dt \right|^2, \tag{1.10}$$

а также следующее разложение по собственным функциям оператора $\mathcal{L}$:

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,\lambda)\widetilde{g}(\lambda)d\lambda + \sum_{\lambda\in T}\sum_{s=1}^{r_\lambda} v_s(x,\lambda)\int_{-\infty}^{\infty}\overline{v_s(t,\lambda)}g(t)\,dt, \tag{1.11}$$

где первый интеграл и ряд сходятся по норме пространства $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$.

Лемма 1.3. *(см. [6], [9]). Если $m = 2n$ и выполнены условия (0.2), то для каждого $\lambda \in \mathbb{R}_+ \setminus T$ дифференциальное уравнение (1.1) обладает двумя линейно независимыми, ограниченными на $\mathbb{R}$ решениями : $u_1(x,\lambda)$ и $u_2(x,\lambda)$ такими, что любое другое ограниченное на $\mathbb{R}$ решение линейно зависимо от них. Эти два решения единственным образом определяются асимптотическими равенствами*

$$u_j(x,\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{B_{j0}^{\pm}(\lambda)\,e^{i\lambda x} + B_{jn}^{\pm}(\lambda)\,e^{-i\lambda x}\right\} + o(1), \quad x\to\pm\infty, \quad j=1,2, \tag{1.12}$$

где $B_{10}^{-}(\lambda) = B_{2n}^{+}(\lambda) = 1$, $B_{20}^{-}(\lambda) = B_{1n}^{+}(\lambda) = 0$. При этом матрица

$$\begin{pmatrix} B_{10}^{+}(\lambda) & B_{1n}^{-}(\lambda) \\ B_{20}^{+}(\lambda) & B_{2n}^{-}(\lambda)\end{pmatrix}$$

унитарна. Функции $u_j(x,\lambda)$, $j = 1,2$ непрерывны на множестве $x \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}_+ \setminus T$ по обеим переменным и допускают непрерывное продолжение на положительные $\lambda \in T$. Для каждого положительного $\lambda \in T$ функции $u_j(x,\lambda)$, $j = 1,2$ удовлетворяют уравнению (1.1) и обладают асимптотикой (1.12). На любом конечном сегменте равномерно по x выполнены соотношения

$$u_1(x,\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{i\lambda x} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right), \quad \lambda\to\infty, \tag{1.13}$$

$$u_2(x,\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-i\lambda x} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right), \quad \lambda\to\infty, \tag{1.14}$$

где выражения $O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ ограничены на множестве $\{(x,\lambda):\ x\in\mathbb{R}, \lambda > \varepsilon\}$ при любом фиксированном $\varepsilon > 0$.

Решения $u_1(x,\lambda)$, $u_2(x,\lambda)$ являются нормированными обобщенными собственными функциями оператора $\mathcal{L}$, соответствующими непрерывному спектру.

Теорема 1.3. *(см. [6]). Если $m = 2n$ и выполнены условия (0.2), то для любой функции $g \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ интегралы*

$$(\mathcal{U}_j g)(\lambda) = \widetilde{g}_j(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{u_j(x,\lambda)}\, g(x)\, dx, \quad \lambda \in \mathbb{R}_+, \quad j = 1, 2 \tag{1.15}$$

сходятся по норме пространства $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+)$ и определяют частично изометрические операторы $\mathcal{U}_1$ и $\mathcal{U}_2$, отображающие $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ на $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+)$. Пространство $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ представляется в виде ортогональной суммы $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}) = \mathbf{H}_0 \oplus \mathbf{H}_1 \oplus \mathbf{H}_2$, где $\mathbf{H}_0$ – замыкание линейной оболочки всех собственных функций оператора $\mathcal{L}$, а $\mathbf{H}_0 \oplus \mathbf{H}_1$ и $\mathbf{H}_0 \oplus \mathbf{H}_2$ – нулевые подпространства операторов $\mathcal{U}_1$ и $\mathcal{U}_2$, соответственно, и, в частности, $\mathcal{U}_1\mathcal{U}_2^* = \mathcal{U}_2^*\mathcal{U}_1 = 0$. Кроме того, $\mathcal{U}_1\mathcal{L}\mathcal{U}_1^*$ и $\mathcal{U}_2\mathcal{L}\mathcal{U}_2^*$ являются операторами умножения на λ^m в пространстве $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+)$, и в частности $\mathcal{U}_1\mathcal{L}\mathcal{U}_1^* = \mathcal{U}_2\mathcal{L}\mathcal{U}_2^*$.

Из этой теоремы вытекает равенство Парсеваля

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|^2\, dx = \int_0^{\infty} |\widetilde{g}_1(\lambda)|^2\, d\lambda + \int_0^{\infty} |\widetilde{g}_2(\lambda)|^2\, d\lambda + \sum_{\lambda \in T} \sum_{s=1}^{r_\lambda} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \overline{v_s(t,\lambda)}\, g(t)\, dt \right|^2, \tag{1.16}$$

а также формула разложения по собственным функциям оператора $\mathcal{L}$:

$$g(x) = \int_0^{\infty} u_1(x,\lambda)\widetilde{g}_1(\lambda)\, d\lambda + \int_0^{\infty} u_2(x,\lambda)\widetilde{g}_2(\lambda)\, d\lambda +$$
$$+ \sum_{\lambda \in T} \sum_{s=1}^{r_\lambda} v_s(x,\lambda) \int_{-\infty}^{\infty} \overline{v_s(t,\lambda)}\, g(t)\, dt, \tag{1.17}$$

где интеграл и ряд сходятся по норме пространства $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$.

1.2. Следующий результат относится к спектральной теории операторов Штурма–Лиувилля.

Теорема 1.4. *(см. [11], [12]). Пусть в уравнении*

$$-z'' + p_0(x)\, z = \lambda^2 z, \quad x \in \mathbb{R} \tag{1.18}$$

$p_0(x)$ – комплекснозначная функция, удовлетворяющая условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1 + |x|)\, |p_0(x)|\, dx < \infty. \tag{1.19}$$

Тогда для всех λ из левой полуплоскости $Im\lambda \geq 0$ (или $Im\lambda \leq 0$) это уравнение обладает решением $z^+(x,\lambda)$ (или $z^-(x,\lambda)$), представимое для всех $x \in \mathbb{R}$ в виде

$$z^+(x,\lambda) = e^{i\lambda x} + \int_x^\infty G^+(x,t)e^{i\lambda t}\,dt, \quad Im\lambda \geq 0,$$
$$z^-(x,\lambda) = e^{i\lambda x} + \int_{-\infty}^x G^-(x,t)e^{i\lambda t}\,dt, \quad Im\lambda \leq 0, x \in \mathbb{R}. \tag{1.20}$$

Функции $G^+(x,t)$ $(-\infty < x \leq t < \infty)$ и $G^-(x,t)$ $(-\infty < t \leq x < \infty)$ удовлетворяют неравенствам

$$|G^\pm(x,t)| \leq \frac{1}{2}\sigma^\pm\left(\frac{x+t}{2}\right)\exp\left\{\sigma_1^\pm(x) - \sigma_1^\pm\left(\frac{x+t}{2}\right)\right\}, \tag{1.21}$$

где

$$\sigma^+(x) = \int_x^\infty |p_0(t)|\,dt, \quad \sigma_1^+(x) = \int_x^\infty \sigma^+(t)\,dt,$$
$$\sigma^-(x) = \int_{-\infty}^x |p_0(t)|\,dt, \quad \sigma_1^-(x) = \int_{-\infty}^x \sigma^-(t)\,dt. \tag{1.22}$$

Отметим, что если $p_0(x)$ – вещественная функция, то функции $G^\pm(x,t)$ тоже вещественны. Из неравенств (1.21), (1.22) следует, что при любом $\alpha \in \mathbb{R}$ и $1 \leq p \leq \infty$ ядро $G^+(x,t)$ порождает ограниченный интегральный оператор $\mathcal{G}^+$ в пространстве $\mathbf{L}^p(\alpha,\infty)$, а ядро $G_-(x,t)$ – такой же оператор $\mathcal{G}^-$ в пространстве $\mathbf{L}^p(-\infty,\alpha)$. Операторы $\mathcal{I}+G^+$ и $\mathcal{I}+G^-$ называются операторами преобразования.

1.3. Сформулируем аналогичный результат для дифференциального уравнения порядка выше двух.

Пусть l – дифференциальная операция (0.1) порядка $m \geq 3$. На комплексной ζ-плоскости рассмотрим открытые секторы

$$\Omega^+ = \left\{\zeta;\ |\arg\zeta| < \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{m}\right\}, \quad \Omega^- = \left\{\zeta;\ |\arg\zeta| > \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{m}\right\}$$

и предположим, что каждый коэффициент $p_k(x)$ дифференциальной операции l является сужением на вещественную ось голоморфной в секторах Ω^+ и Ω_- функции $p_k(\zeta)$, удовлетворяющей неравенствам

$$\int_0^{\infty} (1+t)^{m-2-k} |p_k(\zeta+t)| \, dt < h^+(\mathrm{Re}\zeta), \quad \zeta \in \Omega^+,$$
$$\int_{-\infty}^{0} (1-t)^{m-2-k} |p_k(\zeta+t)| \, dt < h^-(\mathrm{Re}\zeta), \quad \zeta \in \Omega^-.$$

Здесь $h_0^+(x)$ - невозрастающая, суммируемая на $\mathbb{R}_+$ функция, а $h_0^-(x)$ – невозрастающая, суммируемая функция на $R_- = (-\infty, 0)$. Заметим, что из этих неравенств вытекает (1.6).

Теорема 1.5. *(см. [5], [9]). Пусть коэффициенты $p_k(x)$, $k = 0, 1, \ldots, m-2$, дифференциальной операции l порядка $m \geq 3$ удовлетворяют вышеприведенным условиям. Тогда дифференциальное уравнение (1.1) при любых λ из замкнутой верхней (или нижней) полуплоскости имеет решение $z^+(x,\lambda)$ (или $z^-(x,\lambda)$), представимое в виде*

$$z^+(x,\lambda) = e^{i\lambda x} + \int_x^{\infty} G^+(x,t)\, e^{i\lambda t}\, dt, \quad x \geq 0, \ Im\lambda \geq 0,$$
$$(1.23)$$
$$z^-(x,\lambda) = e^{i\lambda x} + \int_{-\infty}^{x} G^-(x,t)\, e^{i\lambda t}\, dt, \quad x \leq 0, \ Im\lambda \leq 0.$$

Функции $G^+(x,t)$ и $G^-(x,t)$ определены на $(0 \leq x \leq t < \infty,\ x+t \neq 0)$ и $(-\infty < t \leq x \leq 0,\ x+t \neq 0)$, функция же $G_0^+(\zeta,\xi) = G^+(\zeta,\zeta+\xi)$ $(\zeta \geq 0,\ \xi \geq 0,\ \zeta+\xi \neq 0)$ при любом $\xi \geq 0$ голоморфна по ζ в секторе Ω^+ и имеет конечный предел при ζ стремящемся к граничной точке параллельно вещественной оси. Аналогичное утверждение верно для функции $G_0^-(\zeta,\xi) = G^-(\zeta,\zeta+\xi)$ $(\zeta \leq 0,\ \xi \leq 0,\ \zeta+\xi \neq 0)$, $\xi \leq 0$ и Ω^-. Функции $G_0^+(\zeta,\xi)$ и $G_0^-(\zeta,\xi)$ бесконечно дифференцируемы на множествах $\zeta \in \Omega^+$, $\xi \geq 0$ и $\zeta \in \Omega^-$, $\xi \leq 0$ соответственно и удовлетворяют неравенствам

$$\left|G_0^+(\zeta,\xi)\right| \leq h^+\left(Re\zeta + \frac{\xi}{2}\right), \quad \zeta \in \Omega^+, \quad \xi \geq 0, \tag{1.24}$$

$$\left|G_0^-(\zeta,\xi)\right| \leq h^-\left(Re\zeta + \frac{\xi}{2}\right), \quad \zeta \in \Omega^-, \quad \xi \leq 0, \tag{1.25}$$

где $h^+(x)$ – невозрастающая, суммируемая функция на $\mathbb{R}_+$, а $h^-(x)$ – не убывающая, суммируемая функция на R_-.

Замечание 1.1. (см. [6]). При выполнении условий теорем 1.4 и 1.5, в случае $m = 2n + 1$ обобщенная собственная функция $u(x, \lambda)$ оператора $\mathcal{L}$, определенная в лемме 1.2, представляется посредством $z^+(x, \lambda)$ и $z^-(x, \lambda)$ в виде

$$
\begin{aligned}
u(x, \lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{n} A_k^+(\lambda) z^+(x, \lambda\omega_k), \quad x \geq 0, \quad \lambda > 0, \\
u(x, \lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{n} A_k^+(\lambda) z^+(x, \lambda\overline{\omega_k}), \quad x \geq 0, \quad \lambda < 0, \\
u(x, \lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{n} A_k^-(\lambda) z^-(x, \lambda\overline{\omega_k}), \quad x \leq 0, \quad \lambda > 0, \\
u(x, \lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{n} A_k^-(\lambda) z^-(x, \lambda\omega_k), \quad x \leq 0, \quad \lambda < 0.
\end{aligned}
\tag{1.26}
$$

Здесь числа ω_k определяются из формулы (1.3), а функции $A_k^\pm(\lambda)$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ непрерывны на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. В случае, когда $m = 2n$, обобщенные собственные функции $u_j(x, \lambda)$ $(j = 1, 2)$ оператора $\mathcal{L}$, определенные в лемме 1.3, представимы в виде

$$
\begin{aligned}
u_j(x, \lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{n} B_{jk}^+(\lambda) z^+(x, \lambda\omega_k), \quad x \geq 0, \quad \lambda > 0, \quad j = 1, 2, \\
u_j(x, \lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{n} B_{jk}^-(\lambda) z^-(x, \lambda\overline{\omega_k}), \quad x \leq 0, \quad \lambda > 0, \quad j = 1, 2,
\end{aligned}
\tag{1.27}
$$

где функции $B_{jk}^\pm(\lambda)$ $(j = 1, 2,\ k = 0, 1, \ldots, n)$ непрерывны на $\mathbb{R}_+$.

Многие из вышеприведенных формул справедливы при предположении, что $p_k(x)$ вещественные, суммируемые на $\mathbb{R}$ функции. При отсутствии гладкости $l(y)$ определяется с использованием квазипроизводных $y(x)$ (см. [8], [9]).

§2. ИНТЕГРАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР ПОЛНОЙ $\mathcal{L}$–СВЕРТКИ

2.1. Всюду в этом параграфе будем предполагать, что оператор $\mathcal{L}$ удовлетворяет условию

A) нуль не является собственным значением $\mathcal{L}$, т. е. $0 \notin T$.

Из теоремы 1.1 следует, что условие A) выполнено, если верно (1.4) или (1.5).

Пусть $l^{\#}$ – операция дифференцирования, полученная из (0.1) подстановкой $-i$ вместо i. Функцию $K(x,t) \in \mathbf{C}^m(\mathbb{R}^2)$ будем называть ***ядром $\mathcal{L}$-свертки***, если оно удовлетворяет следующим условиям :

а) $K(x,t)$ является решением дифференциального уравнения

$$l_x\,(K(x,t)) = l_t^{\#}\,(K(x,t)), \qquad x,t \in \mathbb{R}; \tag{2.1}$$

б) $K(x,t)$ и $l_t^{\#}\,(K(x,t))$, как функции от t, при любом x принадлежат пространству $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$;

в) существует число $M > 0$ такое, что при любых $x \in \mathbb{R}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |K(x,t)|\, dt \le M, \tag{2.2}$$

и при любых α и β $(-\infty < \alpha < \beta < \infty)$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \int_{\alpha}^{\beta} |K(x,t)|\, dt = 0; \tag{2.3}$$

г) на каждом конечном интервале интегралы

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial^\nu}{\partial x^\nu} K(x,t) \right| dt, \quad \nu = 0, 1, \ldots, m$$

сходятся равномерно по x.

Через $\mathbf{D}_{\mathcal{K}}$ обозначим множество таких функций $y \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$, для которых интеграл

$$(\mathcal{K}y)\,(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x,t)\, y(t)\, dt \tag{2.4}$$

принадлежит $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$.

Оператор $\mathcal{K}$, действующий в $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ по формуле (2.4), с областью определения $\mathbf{D}_{\mathcal{K}}$, назовем *оператором полной $\mathcal{L}$-свертки.*

Из условия (2.2) следует, что формулой (2.4) определяется ограниченный оператор, действующий в $\mathbf{L}^\infty(\mathbb{R})$ и с нормой $\|\cdot\|_\infty \le M$. Удобно обозначать этот оператор снова через $\mathcal{K}$.

Ниже через $\mathbf{H}_{0\lambda} \subset \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ ($\lambda \in T$) будем обозначать собственное подпространство оператора $\mathcal{L}$, соответствующее собственному значению λ^m. Следующее утверждение показывает, что $\mathbf{H}_{0\lambda}$ содержится в $\mathbf{D}_{\mathcal{K}}$ и является инвариантным подпространством оператора $\mathcal{K}$.

Лемма 2.1. *Пусть r_λ ($\lambda \in T$) – кратность собственного значения λ^m оператора $\mathcal{L}$, $v_j(x,\lambda)$ ($j = 1,2,\ldots,r_\lambda$) – ортонормальный базис в $\mathbf{H}_{0\lambda}$ и*

$$w_k(x,\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x,t)\, v_k(t,\lambda)\, dt, \quad \lambda \in T; \quad k = 1,2,\ldots,r_\lambda. \tag{2.5}$$

Тогда

$$w_k(x,\lambda) = \sum_{j=1}^{r_\lambda} c_{jk}(\lambda)\, v_j(x,\lambda), \quad \lambda \in T; \quad k = 1,2,\ldots,r_\lambda, \tag{2.6}$$

где

$$c_{jk}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} w_k(x,\lambda)\overline{v_j(x,\lambda)}dx, \quad \lambda \in T; \quad j,k = 1,2,\ldots,r_\lambda. \tag{2.7}$$

Доказательство. Собственная функция $v_k(x,\lambda)$ оператора $\mathcal{L}$ имеет асимптотику, описанную в следствии 1.1. Ядро $K(x,t)$ удовлетворяет условиям в) и г). Из равенства (2.5) следует, что

$$\lim_{x\to\pm\infty} w_k(x,\lambda_0) = 0, \tag{2.8}$$

$$l_x\left(w_k(x,\lambda)\right) = \int_{-\infty}^{\infty} v_k(t,\lambda) l_x\left(K(x,t)\right) dt,$$

и, в силу условия а)

$$l_x\left(w_k(x,\lambda)\right) = \int_{-\infty}^{\infty} v_k(t,\lambda)\, l_t^{\#}\left(K(x,t)\right) dt. \tag{2.9}$$

Далее, из равенства

$$\overline{l_t^{\#}\left(K(x,t)\right)} = l_t\left(\overline{K(x,t)}\right), \tag{2.10}$$

и условия б) следует, что функция $\overline{K(x,t)}$ принадлежит области определения $\mathcal{L}$ по переменной x. Таким образом

$$l_t\left(\overline{K(x,t)}\right) = \mathcal{L}_t\left(\overline{K(x,t)}\right). \tag{2.11}$$

Поэтому правая сторона (2.9) является скалярным произведением $v_k(t,\lambda)$ и $\mathcal{L}_t\left(\overline{K(x,t)}\right)$. Ввиду того, что $\mathcal{L}$ – самосопряженный оператор, из (2.9) получим

$$l_x\left(w_k(x,\lambda)\right) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x,t)\mathcal{L}_t\left(v_k(t,\lambda)\right)dt =$$
$$= \lambda^m \int_{-\infty}^{\infty} K(x,t)\,v_k(t,\lambda)\,dt = \lambda^m w_k(x,\lambda).$$

Итак, функция $w_k(x,\lambda)$ является решением уравнения (1.1) и удовлетворяет условию (2.8). В силу следствия 1.1, $w_k \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ и $w_k(x,\lambda)$ – собственная функция $\mathcal{L}$, т. е. $w_k \in \mathbf{H}_{0\lambda}$. Справедливость равенств (2.6) и (2.7) очевидна. Лемма доказана.

Следствие 2.1. Если собственное значение λ^m $(\lambda \in T)$ простое $(r_\lambda = 1)$, то в (2.6) имеем $|c_{11}(\lambda)| \le M$ (см. (2.2).

Фактически, в этом случае $c_{11}(\lambda)$ является собственным значением ограниченного оператора $\mathcal{K}$, действующего в $\mathbf{L}^\infty(\mathbb{R})$, откуда и следует, что $|c_{11}(\lambda)| \le$ $\le \|K\|_\infty \le M$.

При $y \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ обозначим

$$\widetilde{y}_k(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{v_k(t,\lambda)}y(t)\,dt, \quad \lambda \in T; \quad k = 1,2,\ldots,r_\lambda.$$

Для каждого $x \in R$ значение $(\mathcal{K}y)(x)$ есть скалярное произведение $y(t)$ и $\overline{K(x,t)}$ в $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$. Из обобщенного равенства Парсеваля (вытекающего из (1.10) или (1.16)) и леммы 2.1 заключаем, что при $y \in \mathbf{H}_0$

$$(\mathcal{K}y)(x) = \sum_{\lambda\in T}\sum_{k=1}^{r_\lambda} \widetilde{y}_k(\lambda)w_k(x,\lambda) = \sum_{\lambda\in T}\sum_{j=1}^{r_\lambda} v_j(x,\lambda)\sum_{k=1}^{r_\lambda} c_{jk}(\lambda)\widetilde{y}_k(\lambda). \tag{2.12}$$

При этом

$$\|\mathcal{K}v_k\|^2 = \|w_k\|^2 = \sum_{j=1}^{r_\lambda} |c_{jk}(\lambda)|^2, \quad \lambda \in T; \quad k = 1,2,\ldots,r_\lambda. \tag{2.13}$$

Из (2.12) следует, что все функции $y \in \mathbf{H}_0$, удовлетворяющие условию

$$\sum_{\lambda\in T}\sum_{j=1}^{r_\lambda}\left|\sum_{k=1}^{r_\lambda} c_{jk}(\lambda)\widetilde{y}_k(\lambda)\right|^2 < \infty,$$

принадлежат множеству $\mathbf{D}_{\mathcal{K}}$. Из (2.12) и (2.13) приходим к следующей лемме.

Лемма 2.2. *Сужение интегрального оператора $\mathcal{K}$ полной $\mathcal{L}$–свертки на подпространство H_0 является ограниченным оператором в том и только том случае, когда ограничено множество $\Delta = \{|c_{jk}(\lambda)|;\quad \lambda \in T, \quad j,k = 1,2,\ldots,r_\lambda\}$.*

2.2. Случай $m = 2n+1$. Предположим, что $u(x,\lambda)$ – нормированная обобщенная собственная функция оператора $\mathcal{L}$ (см. лемму 1.2), а $\mathcal{U}_0$ – оператор, определенный равенством (1.9) и $\widetilde{y} = \mathcal{U}_0 y \quad (y \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}))$.

Лемма 2.3. *Функция*

$$w(x,\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t,\lambda) K(x,t)\, dt, \quad x \in R, \quad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \tag{2.14}$$

удовлетворяет равенству

$$w(x,\lambda) = c(\lambda) u(x,\lambda), \tag{2.15}$$

где $c(\lambda)$ – функция, ограниченная и непрерывная на множестве $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, $|c(\lambda)| \le \le M$, где M – указанное в условии (2.2) число, и

$$\lim_{\lambda \to \pm\infty} \lambda^m c(\lambda) = 0. \tag{2.16}$$

Как функции от λ, $w(x,\lambda)$ и $\lambda^m w(x,\lambda)$ принадлежат $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$.

Доказательство. Функция $u(x,\lambda)$ ограничена по x. Повторяя рассуждения доказательства леммы 2.1 находим, что из (2.14) и условий в), г) и а) следует равенство

$$l_x\,(w(x,\lambda)) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t,\lambda) l_t^{\#}\,(K(x,t))\, dt.$$

Из (2.10) получаем

$$\overline{l_x\,(w(x,\lambda))} = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{u(t,\lambda)} l_t \left(\overline{K(x,t)}\right) dt. \tag{2.17}$$

Ввиду (2.11), при любом $x \in \mathbb{R}$ формулы (2.14) и (2.17) могут быть записаны в виде

$$\overline{w} = \mathcal{U}_0\left(\overline{K}\right), \quad \overline{l(w)} = \mathcal{U}_0 \mathcal{L}\left(\overline{K}\right). \tag{2.18}$$

Далее, в силу теоремы 1.2, $\mathcal{U}_0\mathcal{L} = \Lambda\mathcal{U}_0$, где Λ – оператор умножения на λ^m в $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$. Поэтому второе равенство в (2.18) переходит в $\overline{l(w)} = \Lambda\mathcal{U}_0\left(\overline{K}\right)$. Пользуясь первым равенством из (2.18) последнее можно переписать как

$$l_x\left(w(x,\lambda)\right) = \lambda^m w(x,\lambda). \tag{2.19}$$

Нами доказано, что функция $w(x,\lambda)$ является решением уравнения (1.1). Из (2.14), неравенства (2.2) и ограниченности $u(t,\lambda)$ по переменной t следует, что эта функция ограничена по переменной x. Далее, в силу леммы 1.2, для каждого $\lambda \in \mathbb{R} \setminus (T \cup \{0\})$ любые два ограниченных решения дифференциального уравнения (1.1) нечетного порядка линейно зависимы. Поэтому справедливо (2.15) ($u(x,\lambda) \not\equiv 0$). Из (2.14) и леммы 1.2 следует, что функция $w(x,\lambda)$ непрерывна по переменной λ на множестве $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Из (2.18) и (2.19) вытекает, что $w(x,\lambda)$ и $\lambda^m w(x,\lambda)$ принадлежат $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$. В силу (1.7), для каждого $\lambda_0 \neq 0$ существует x_0 такое, что $u(x_0,\lambda) \neq 0$ для всех λ из некоторой окрестности λ_0. Тем самым, из равенства (2.15) следует, что функция $c(\lambda)$ непрерывна на $\mathbb{R} \setminus (T \cup \{0\})$ и допускает непрерывное продолжение на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Доказательство ограниченности аналогично доказательству следствия 2.1. Для доказательства (2.16) воспользуемся равенством

$$\lambda^m c(\lambda)u(x,\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t,\lambda)l_x\left(K(x,t)\right)dt, \tag{2.20}$$

полученным из (2.14) при помощи (2.15) и (2.19), а также условий в) и г), наложенных на $K(x,t)$. Поскольку $l_x\left(K(x,t)\right)$,как функция от t, принадлежит $\mathbf{L}^1(\mathbb{R})$, из (2.20) и (1.8) получаем

$$\lim_{\lambda\to\pm\infty} \lambda^m c(\lambda)u(x,\lambda) = \lim_{\lambda\to\pm\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} l_x\left(K(x,t)\right)dt = 0.$$

Снова воспользовавшись (1.8) приходим к формуле (2.16). Лемма доказана.

Приведем теперь несколько следствий.

Следствие 2.2. При $m = 2n+1$ ядро $K(x,t)$ оператора $\mathcal{L}$–свертки допускает представление

$$K(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}u(x,\lambda)\overline{u}(t,\lambda)c(\lambda)d\lambda+\sum_{\lambda\in T}\sum_{j,k=1}^{r_\lambda}c_{jk}(\lambda)v_j(x,\lambda)\overline{v_k(t,\lambda)}. \tag{2.21}$$

Доказательство следует из (2.6), (2.15) и формулы разложения (1.11), примененной к $\overline{K(x,t)}$ при фиксированном x.

Следствие 2.3. Для $\mathcal{K}y$, определенной равенством (2.4), $m=2n+1$ и $y\in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ имеем

$$(\mathcal{K}y)(x)=\int_{-\infty}^{\infty}u(x,\lambda)c(\lambda)\widetilde{y}(\lambda)d\lambda+\sum_{\lambda\in T}\sum_{j=1}^{r_\lambda}v_j(x,\lambda)\sum_{k=1}^{r_\lambda}c_{jk}(\lambda)\widetilde{y}_k(\lambda). \tag{2.22}$$

Доказательство следует из (2.6) и (2.15), после применения обобщенного равенства Парсеваля (см. (1.10)) к скалярному произведению $y(t)$ и $\overline{K(x,t)}$.

Из леммы 2.3 следует, что $\mathbf{H}_0^{\perp}$ является инвариантным подпространством оператора $\mathcal{K}$. Точнее, справедливо следующее утверждение.

Следствие 2.4. При любом $y\in\mathbf{H}_0^{\perp}$ имеет место равенство

$$\mathcal{K}y=\mathcal{U}_0^*\Lambda_c\mathcal{U}_0y, \tag{2.23}$$

где Λ_c – оператор умножения на функцию $c(\lambda)$ в пространстве $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$, т. е. $(\Lambda_c\phi)(\lambda)=c(\lambda)\phi(\lambda)$ при $\phi\in\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$. Тем самым, $\mathbf{H}_0^{\perp}$ содержится в $\mathbf{D}_{\mathcal{K}}$ и является инвариантным подпространством оператора $\mathcal{K}$. Сужение оператора $\mathcal{K}$ на $\mathbf{H}_0^{\perp}$ является ограниченным оператором, и множество $\mathbf{D}_{\mathcal{K}}$ плотно в $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$.

Доказательство. Равенство (2.23) вытекает из (2.22), поскольку $c(\lambda)$ ограничено и $\widetilde{y}_k(\lambda)=0$ ($\lambda\in T;\quad k=1,2,\dots,r_\lambda$) при $y\in\mathbf{H}_0^{\perp}$. Последнее утверждение следует из вложений $\mathbf{H}_0^{\perp}\subset\mathbf{D}_{\mathcal{K}}$ и $\mathbf{H}_{0\lambda}\subset\mathbf{D}_{\mathcal{K}}$, справедливых при любых $\lambda\in T$.

В силу леммы 2.2 имеет место следующее утверждение.

Лемма 2.4. *При $m=2n+1$ интегральный оператор $\mathcal{K}$ полной $\mathcal{L}$–свертки ограничен тогда и только тогда, когда ограничено множество Δ.*

Следствие 2.5. Если имеет место одно из следующих двух условий

1) множество всех собственных значений оператора $\mathcal{L}$ конечно,

2) все собственные значения оператора $\mathcal{L}$ простые,

то оператор $\mathcal{K}$ ограничен.

Теорема 2.1. *Пусть $m = 2n+1$, $\mathcal{K}$ – интегральный оператор полной $\mathcal{L}$–свертки, $f \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$, функция $c(\lambda)$ $(\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$ и числа $c_{jk}(\lambda)$ $(\lambda \in T; \quad j,k = 1,\dots,r_\lambda)$ определены равенствами (2.5), (2.7), (2.14) и (2.15). Пусть выполняются также следующие два условия :*

1) функция $\tilde{f}(\lambda)/(1+c(\lambda))$ принадлежит $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$;

2) при любом $\lambda \in T$ система алгебраических уравнений

$$z_j(\lambda) + \sum_{k=1}^{r_\lambda} c_{jk}(\lambda) z_k(\lambda) = \tilde{f}_j(\lambda), \quad j = 1,2,\dots,r_\lambda \tag{2.24}$$

имеет решение $\{z_j\}$ и

$$\sum_{\lambda \in T} \sum_{j=1}^{r_\lambda} |z_j(\lambda)|^2 < \infty. \tag{2.25}$$

Тогда функция

$$y(x) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,\lambda) \frac{\tilde{f}(\lambda)}{1+c(\lambda)} d\lambda + \sum_{\lambda \in T} \sum_{j=1}^{r_\lambda} v_j(x,\lambda) z_j(\lambda) \tag{2.26}$$

принадлежит $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ и является решением интегрального уравнения

$$(I + \mathcal{K}) y = f. \tag{2.27}$$

В случае, когда $\mathcal{K}$ ограничено, условия 1) и 2) необходимы для разрешимости уравнения (2.23) в $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$.

Доказательство. В силу (2.25) ряд, стоящий в правой стороне (2.26), определяет функцию из $\mathbf{H}_0$, и по условию 1) интеграл является функцией из $\mathbf{H}_0^\perp$. Поэтому $y \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$. Из формулы разложения (1.11) следует, что $\tilde{y}(\lambda) = \tilde{f}(\lambda)/(1+c(\lambda))$ и $\tilde{y}_k(\lambda) = z_k(\lambda)$ $(\lambda \in T,\ k = 1,\dots,r_\lambda)$. Подставив эти выражения в (2.22) и сложив полученное с (2.26), получим

$$y(x)+(\mathcal{K}y)(x)=\int_{-\infty}^{\infty}u(x,\lambda)\tilde{f}(\lambda)d\lambda+\sum_{\lambda\in T}\sum_{j=1}^{r_\lambda}v_j(x,\lambda)\left(z_j(\lambda)+\sum_{k=1}^{r_\lambda}c_{jk}(\lambda)z_k(\lambda)\right).$$

Ввиду (2.24), правая сторона этой формулы является разложением $f(x)$ по собственным функциям оператора $\mathcal{L}$. Тем самым, верно (2.27).

Пусть теперь $\mathcal{K}$ – ограниченный оператор. По лемме 2.4 множество Δ ограничено, и для $y\in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ представление (2.22) является разложением функции $\mathcal{K}y$ по собственным функциям оператора $\mathcal{L}$. Пусть $y\in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ – решение уравнения (2.27). Разлагая правую и левую части по собственным функциям оператора $\mathcal{L}$, получим $(1+c(\lambda))\tilde{y}(\lambda)=\tilde{f}(\lambda)$ и

$$\tilde{y}_j(\lambda)+\sum_{k=1}^{r_\lambda}c_{jk}(\lambda)\tilde{y}_k(\lambda)=\tilde{f}_j(\lambda),\quad \lambda\in T;\quad j=1,2,\ldots,r_\lambda.$$

Из этих равенств следует необходимость условий 1), 2). Теорема доказана.

Из формулы (2.23) вытекает матричное тождество

$$\begin{pmatrix}\mathcal{I}_{|\mathrm{H}_0} & 0\\ 0 & \mathcal{U}_{o}|_{\mathrm{H}_0^\perp}\end{pmatrix}(\mathcal{I}+\mathcal{K})\begin{pmatrix}\mathcal{I}_{|\mathrm{H}_0} & 0\\ 0 & \mathcal{U}_0^*\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(\mathcal{I}+\mathcal{K}_0)_{|\mathrm{H}_0} & 0\\ 0 & \Lambda_{1+c}\end{pmatrix}. \tag{2.28}$$

Обозначим через Φ_λ $(\lambda\in T)$ матрицу $(c_{jk})_{j,k=1}^{r_\lambda}$, а через $\|\Phi_\lambda\|$ – ее норму, индуцированную евклидовой нормой конечномерного пространства. Отметим, что ограниченность множества Δ эквивалентна ограниченности множества $\{\|\Phi_\lambda\|\,;\lambda\in T\}$, и для фредгольмовости оператора $\Lambda_{(1+c)}$ необходимо, чтобы $\inf_{\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}}|1+c(\lambda)|>0$ (см. [13]). Обозначим через E_k единичную матрицу порядка $(k\times k)$. Теперь из (2.28) и теоремы 2.1 получим следующие утверждения.

Теорема 2.2. *Пусть $m=2n+1$, и пусть $\mathcal{K}$ – ограниченный интегральный оператор полной $\mathcal{L}$–свертки. Для фредгольмовости $\mathcal{I}+\mathcal{K}$ в $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ необходимо и достаточно выполнение следующих условий :*

1) $\inf_{\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}}|1+c(\lambda)|>0\,;$

2) для всех $\lambda\in T\setminus T'$, где T' – конечное множество, матрица $E_{r_\lambda}+\Phi_\lambda$ обладает обратной и $\sup_{\lambda\in T}\|(E_{r_\lambda}+\Phi_\lambda)^{(-1)}\|<\infty.$

При выполнении условий 1) — 2)

$$Ind\,(\mathcal{I}+\mathcal{K})=0,\quad \dim\ker(\mathcal{I}+\mathcal{K})=\sum_{\lambda\in T}\dim\ker(E_{r_\lambda}+\Phi_\lambda),$$

и

$$(\mathcal{I}+\mathcal{K})^{(-1)}y=y(x)-\int_{-\infty}^{\infty}R(x,t)\,y(t)\,dt,$$

где

$$R(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}u(x,\lambda)\overline{u(t,\lambda)}\frac{c(\lambda)}{1+c(\lambda)}\,d\lambda+\sum_{\lambda\in T}\sum_{j,k=1}^{r_\lambda}d_{jk}(\lambda)v_j(x,\lambda)\overline{v_k(t,\lambda)},$$

а $d_{jk}(\lambda)$ *($\lambda\in T$; $j,k=1,\ldots,r_\lambda$) – элементы матрицы* $E_{r_\lambda}-(E_{r_\lambda}+\Phi_\lambda)^{(-1)}$.

Следствие 2.6. Пусть $m=2n+1$. Тогда обратимость матриц $E_{r_\lambda}+\Phi_\lambda$ при всех $\lambda\in T$ вместе с условиями 1), 2) теоремы 2.2 необходимы и достаточны для обратимости оператора $\mathcal{I}+\mathcal{K}$.

2.3. Случай $m=2n$. Пусть $u_j(x,\lambda)$ $(j=1,2)$ – нормированные обобщенные собственные функции оператора $\mathcal{L}$ (см. лемму 1.3) и $\mathcal{U}_j$ $(j=1,2)$ – операторы, определенные равенствами (1.15). Для $y\in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ положим $\widetilde{y}^{(j)}=\mathcal{U}_jy$, $j=1,2$.

Лемма 2.5. *Имеют место равенства*

$$w^{(k)}(x,\lambda)=a_{1k}(\lambda)u_1(x,\lambda)+a_{2k}(\lambda)u_2(x,\lambda),\quad k=1,2,\tag{2.29}$$

где

$$w^{(k)}(x,\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}u_k(t,\lambda)K(x,t)dt,\quad k=1,2,\ x\in\mathbb{R},\ \lambda\in\mathbb{R}_+,\tag{2.30}$$

а $a_{sk}(\lambda)$ $(s,k=1,2)$ *– функции, непрерывные на* $\mathbb{R}_+$, *для которых*

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda^m a_{sk}(\lambda)=0,\quad s,\,k=1,2.\tag{2.31}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\varphi(\xi,\eta,\lambda)=\det\begin{pmatrix}u_1(\xi,\lambda)&u_1(\eta,\lambda)\\u_2(\xi,\lambda)&u_2(\eta,\lambda)\end{pmatrix},\quad \xi,\eta\in\mathbb{R},\quad \lambda\in\mathbb{R}_+.$$

Из леммы 1.3 следует, что $\varphi(\xi,\eta,\lambda)$ представима в виде суммы

$$\varphi(\xi,\eta,\lambda)=\frac{i}{\pi}\sin(\xi-\eta)\lambda+\psi(\xi,\eta,\lambda),\tag{2.32}$$

где при $\lambda \to \infty$ функция $\psi(\xi, \eta, \lambda)$ стремится к нулю равномерно относительно ξ и η, принадлежащих произвольному конечному сегменту $[\alpha, \beta]$.

Выберем α, β и ν таким образом, чтобы $\beta - \alpha \geq \pi/2$, $\nu > 1$ и $|\psi(\xi, \eta, \lambda)| < 1/2\pi$ для всех $\xi, \eta \in [\alpha, \beta]$ и $\lambda \in (\nu, \infty)$. Тогда для каждого $\lambda \in (\nu, \infty)$, выбрав $\xi, \eta \in [\alpha, \beta]$ так, чтобы $\xi - \eta = \frac{\pi}{2\lambda}$, получим

$$|\varphi(\xi, \eta, \lambda)| \geq \frac{1}{2\pi}. \tag{2.33}$$

Пользуясь теоремой 1.3 можно доказать, что при любом $\lambda \in \mathbb{R}_+$ функции $w^{(k)}(x, \lambda)$ $(k = 1, 2)$ являются ограниченными решениями уравнения (1.1), непрерывными по $\lambda \in \mathbb{R}_+$. В силу леммы 1.3, при любом $\lambda \in \mathbb{R}_+ \setminus T$ функции $w^{(k)}(x, \lambda)$ линейно зависимы от $u_1(x, \lambda)$ и $u_2(x, \lambda)$, т. е. при $\lambda \in \mathbb{R}_+ \setminus T$ имеют место равенства (2.29).

Пусть $\lambda_0 \in \mathbb{R}_+ \setminus T$. Из равенства (2.32) и свойств ψ следует, что существуют числа ξ и η такие, что $\varphi(\xi, \eta, \lambda) \neq 0$ для всех λ из некоторой окрестности $(\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon)$ точки λ_0, не содержащей точек из T.

Подставляя значения $x = \xi$ и $x = \eta$ в (2.29) и разрешив полученную систему относительно $a_{ks}(\lambda)$, получим

$$\begin{cases} a_{1k}(\lambda) = \left[u_2(\eta, \lambda) w^{(k)}(\xi, \lambda) - u_2(\xi, \lambda) w^{(k)}(\eta, \lambda)\right] / \varphi(\xi, \eta, \lambda), \\ a_{2k}(\lambda) = \left[-u_1(\eta, \lambda) w^{(k)}(\xi, \lambda) + u_1(\xi, \lambda) w^{(k)}(\eta, \lambda)\right] / \varphi(\xi, \eta, \lambda), \end{cases} \tag{2.34}$$

$$k = 1, 2; \quad \lambda \in (\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon) \setminus T.$$

Функции $u_k(x, \lambda)$, $w^{(k)}(x, \lambda)$ $(k = 1, 2)$ и $\varphi(\xi, \eta, \lambda)$ непрерывны по λ. Из (2.34) следует, что функции $a_{ks}(\lambda)$ непрерывны на $\mathbb{R}_+ \setminus T$ и по непрерывности определяются для всех $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Равенства (2.29) и (2.34) имеют место также для всех $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Имеем (ср. с леммой 2.3)

$$\lambda^m w^{(k)}(x, \lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} u_k(t, \lambda) l_x\left(K(x, t)\right) dt \quad (k = 1, 2).$$

Интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|l_x\left(K(x, t)\right)\right| dt$$

сходится равномерно по x на каждом конечном сегменте. Пользуясь асимптотическими формулами (1.13) и (1.14) нетрудно доказать, что функции $\lambda^m w^{(k)}(x,\lambda)$ стремятся к нулю при $\lambda \to \infty$, равномерно по x на каждом конечном сегменте $[\alpha,\beta]$. При достаточно большом λ выберем ξ и η так, чтобы выполнялось равенство (2.33). Далее, подставим значения λ, ξ и η в (2.34) и умножим обе его части на λ^m. Устремляя λ к бесконечности приходим к (2.31). Доказательство завершено.

Замечание 2.1. Функции $w^{(k)}(x,\lambda)$ и $\lambda^m w^{(k)}(x,\lambda)$ $(k=1,2)$, как функции от λ, принадлежат $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+)$.

Доказательство аналогично нечетному случаю.

Следствие 2.7. В случае $m=2n$ ядро $K(x,t)$ $\mathcal{L}$–свертки представимо в виде

$$\begin{aligned}K(x,t)=\int_0^\infty &[a_{11}(\lambda)u_1(x,\lambda)+a_{21}(\lambda)u_2(x,\lambda)]\,\overline{u_1(t,\lambda)}d\lambda+\\ &+\int_0^\infty [a_{12}(\lambda)u_1(x,\lambda)+a_{22}(\lambda)u_2(x,\lambda)]\,\overline{u_2(t,\lambda)}\,d\lambda+\\ &+\sum_{\lambda\in T}\sum_{j,k=1}^{r_\lambda} c_{jk}(\lambda)v_j(x,\lambda)\overline{v_k(t,\lambda)}.\end{aligned}\tag{2.35}$$

Доказательство следует из формулы разложения (1.17), примененной к $\overline{K(x,t)}$ при фиксированном x и формул (2.6), (2.29).

Следствие 2.8. Пусть $m=2n$ и $y\in\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$. Тогда для $\mathcal{K}y$, определенной равенством (2.4), имеет место представление

$$\begin{aligned}(\mathcal{K}y)(x)=\int_0^\infty &u_1(x,\lambda)\left(a_{11}(\lambda)\widetilde{y}^{(1)}(\lambda)+a_{12}(\lambda)\widetilde{y}^{(2)}(\lambda)\right)d\lambda+\\ &+\int_0^\infty u_2(x,\lambda)\left(a_{21}(\lambda)\widetilde{y}^{(1)}(\lambda)+a_{22}(\lambda)\widetilde{y}^{(2)}(\lambda)\right)d\lambda+\\ &+\sum_{\lambda\in T}\sum_{j=1}^{r_\lambda} v_j(x,\lambda)\sum_{k=1}^{r_\lambda} c_{jk}(\lambda)\widetilde{y}_k(\lambda)\end{aligned}\tag{2.36}$$

Доказательство следует из (2.6), (2.30) и обобщенного равенства Парсеваля, вытекающего из формулы (1.16).

В обозначениях теоремы 1.3 имеем $\mathbf{H}_0^{\perp} = \mathbf{H}_1 \oplus \mathbf{H}_2$. Из (2.36) следует, что для каждого $k = 1, 2$ функции $y \in \mathbf{H}_k$, удовлетворяющие условиям

$$a_{sk}(\lambda)\widetilde{y}^{(k)}(\lambda) \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+), \quad s = 1, 2, \tag{2.37}$$

принадлежат $\mathbf{D}_{\mathcal{K}}$. В частности, при любом $k = 1, 2$ все функции $y \in \mathbf{H}_k$, для которых $\widetilde{y}^{(k)}(\lambda) = 0$ в окрестности нуля, принадлежат линеалу $\mathbf{D}_{\mathcal{K}}$. Тем самым, и в случае $m = 2n$ линеал $\mathbf{D}_{\mathcal{K}}$ плотен в $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$.

Определим оператор $\mathcal{W}\colon \mathbf{H}_1 \oplus \mathbf{H}_2 \to \mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+) \oplus \mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+)$:

$$\mathcal{W} = \begin{pmatrix} \mathcal{U}_1|_{\mathbf{H}_1} & 0 \\ 0 & \mathcal{U}_2|_{\mathbf{H}_2} \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\mathcal{W}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathcal{U}_1^* & 0 \\ 0 & \mathcal{U}_2^* \end{pmatrix}.$$

Из представления (2.36) вытекает следующее утверждение.

Следствие 2.9. Для любой функции $y \in \mathbf{H}_1 \oplus \mathbf{H}_2$, удовлетворяющей условиям (2.37), справедливо равенство

$$\mathcal{K}y = \mathcal{W}^{-1}\Lambda_A \mathcal{W}y, \tag{2.38}$$

где $\Lambda_A : \mathbf{L}_2^2(\mathbb{R}_+) \to \mathbf{L}_2^2(\mathbb{R}_+)$ – оператор умножения на матрицу–функцию

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} a_{11}(\lambda) & a_{12}(\lambda) \\ a_{21}(\lambda) & a_{22}(\lambda) \end{pmatrix}. \tag{2.39}$$

Из (2.38) следует, что сужение $\mathcal{K}$ на $\mathbf{H}_1 \oplus \mathbf{H}_2$ ограничено тогда и только тогда, когда ограничен оператор Λ_A. В силу леммы 2.3 приходим к следующему утверждению.

Лемма 2.6. *При $m = 2n$ интегральный оператор $\mathcal{K}$ полной $\mathcal{L}$–свертки ограничен тогда и только тогда, когда ограничено множество Δ и*

$$\sup_{\lambda \in (0,\infty)} |a_{sk}(\lambda)| < \infty \quad (s, k = 1, 2). \tag{2.40}$$

Воспользовавшись формулами (1.17), (2.36) и леммой 2.6 можно доказать следующее утверждение (ср. с теоремой 2.1).

Теорема 2.3. *Пусть $m = 2n$, $\mathcal{K}$ – интегральный оператор полной $\mathcal{L}$–свертки и $f \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$. Далее, пусть функции $a_{sk}(\lambda)$ $(s, k = 1, 2; \quad \lambda \in \mathbb{R}_+)$ и числа $c_{jk}(\lambda)$*

($\lambda \in T$; $j, k = 1, \dots, r_\lambda$) определены равенствами (2.29), (2.30), (2.14), (2.15), и пусть выполнены также следующие два условия :

1) система алгебраических уравнений

$$\begin{cases} (1 + a_{11}(\lambda))\widetilde{z}^{(1)}(\lambda) + a_{12}(\lambda)\widetilde{z}^{(2)}(\lambda) = \widetilde{f}^{(1)}(\lambda), \\ a_{21}(\lambda)\widetilde{z}^{(1)}(\lambda) + (1 + a_{22}(\lambda))\widetilde{z}^{(2)}(\lambda) = \widetilde{f}^{(2)}(\lambda) \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}_+,$$

имеет решение $\left(\widetilde{z}^{(1)}(\lambda), \widetilde{z}^{(2)}(\lambda)\right)$ с компонентами из $L^2(\mathbb{R}_+)$;

2) системы алгебраических уравнений (2.24) имеют решения, удовлетворяющие условию (2.25).

Тогда функция

$$y(x) = \int_0^\infty u_1(x, \lambda)\widetilde{z}^{(1)}(\lambda) d\lambda + \int_0^\infty u_2(x, \lambda)\widetilde{z}^{(2)}(\lambda))\, d\lambda + \sum_{\lambda \in T} \sum_{j=1}^{r_\lambda} u_j(x, \lambda) z_j(\lambda)$$

принадлежит $L^2(\mathbb{R})$ и является решением интегрального уравнения (2.27).

Если оператор $\mathcal{K}$ ограничен, то условия 1) и 2) также необходимы для того, чтобы уравнение (2.27) имело решение в $L^2(\mathbb{R})$.

Теорема 2.4. *Пусть $m = 2n$ и $\mathcal{K}$ – ограниченный интегральный оператор полной $\mathcal{L}$–свертки. Оператор $\mathcal{I}+\mathcal{K}$ фредгольмовый в $L^2(\mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда*

1) $\inf\limits_{\lambda > 0} |\det(E_2 + A(\lambda))| > 0,$

2) для всех $\lambda \in T$, за исключением конечного множества $T' \subset T$, матрица $E_{r_\lambda} + \Phi_\lambda$ обратима и $\sup\limits_{\lambda \in T \setminus T'} \|(E_{r_\lambda} + \Phi_\lambda)^{-1}\| < \infty.$

При выполнении этих условий

$$Ind(I + \mathcal{K}) = 0, \quad \dim\ker(\mathcal{I} + \mathcal{K}) = \sum_{\lambda \in T} \dim\ker(E_{r_\lambda} + \Phi_\lambda)$$

и обобщенный обратный оператор $(\mathcal{I} + \mathcal{K})^{(-1)}$ определяется формулами

$$\left((\mathcal{I} + \mathcal{K})^{(-1)} y\right)(x) = y(x) - \int_{-\infty}^{\infty} R(x, t)\, y(t)\, dt,$$

$$\begin{aligned} R(x, t) = &\int_0^\infty [b_{11}(\lambda) u_1(x, \lambda) + b_{21}(\lambda) u_2(x, \lambda)]\, \overline{u_1(t, \lambda)}\, d\lambda + \\ &+ \int_0^\infty [b_{12}(\lambda) u_1(x, \lambda) + b_{22}(\lambda) u_2(x, \lambda)]\, \overline{u_2(t, \lambda)} d\lambda + \\ &+ \sum_{\lambda \in T} \sum_{j,k=1}^{r_\lambda} d_{jk}(\lambda) v_j(x, \lambda) \overline{v_k(t, \lambda)}, \end{aligned}$$

где функции $b_{jk}(\lambda)$ $(j,k=1,2)$ – элементы матрицы-функции $E_2-(E_2+A(\lambda))^{-1}$, а $d_{jk}(\lambda)$ $(\lambda\in T;\ \ j,k=1,\dots,r_\lambda)$ – элементы матрицы $E_{r_\lambda}-(E_{r_\lambda}+\Phi_\lambda)^{(-1)}$.

Доказательство аналогично случаю с нечетным m.

Следствие 2.10. Пусть $m=2n$. Оператор $\mathcal{I}+\mathcal{K}$ обратим тогда и только тогда, когда для всех $\lambda\in T$ обратима матрица $E_{r_\lambda}+\Phi_\lambda$ и выполнены условия 1), 2) теоремы 2.4.

§3. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ $\mathcal{L}$–СВЕРТКИ НА ПОЛУОСИ

3.1. Пусть $K(x,t)$ – ядро $\mathcal{L}$–свертки. Всюду в этом параграфе будем предполагать выполненными следующие условия :

Б) *в случае $m=2$ справедливо (1.19), а в случае $m\geq 3$ выполнены условия пункта 1.3;*

В) *оператор $\mathcal{K}$ полной $\mathcal{L}$-свертки, порожденный ядром $K(x,t)$, ограничен.*

Отметим, что из условия Б) следуют неравенства (1.6). Следовательно, по теореме 1.1 имеет место условие А), и поэтому остаются в силе все результаты §2. В зависимости от четности m, условие В) эквивалентно выполнению утверждений леммы 2.4 $(m=2n+1)$, либо леммы 2.6 $(m=2n)$.

В этом параграфе мы будем рассматривать операторы $\mathcal{I}+\mathcal{K}^+ : \mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+)\longmapsto \mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+)$, определенные равенством

$$(\mathcal{I}+\mathcal{K}^+)y=y(x)+\int_0^\infty K(x,t)y(t)dt \tag{3.1}$$

и называемые *интегральными операторами $\mathcal{L}$–свертки на полупрямой.*

Определим операторы $\theta_+ : \mathbf{L}^2(\mathbb{R})\longmapsto \mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+)$, $\theta_- : \mathbf{L}^2(\mathbb{R})\longmapsto \mathbf{L}^2(\mathbb{R}_-)$, $\theta_+^0 : \mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+)\longmapsto \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$, $\theta_-^0 : \mathbf{L}^2(\mathbb{R}_-)\longmapsto \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ следующим образом : $(\theta_+y)(x)=y(x)$, $(x\in\mathbb{R}_+)$, $(\theta_-y)(x)=y(x)$, $(x\in\mathbb{R}_-)$,

$$(\theta_+y)(x)=\begin{cases} y(x), & x>0,\\ 0, & x<0,\end{cases}\qquad (\theta_-y)(x)=\begin{cases} 0, & x>0,\\ y(x), & x<0.\end{cases}$$

Оператор $\mathcal{I}+\mathcal{K}^+$ ограничен, поскольку $\mathcal{I}+\mathcal{K}^+ = I+\theta_+\mathcal{K}\theta_+^0$. Наряду с $\mathcal{I}+\mathcal{K}^+$ рассмотрим также оператор $\mathcal{I}+\mathcal{K}_1^+ : \mathrm{L}^2(\mathbb{R}) \longmapsto \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, определенный равенством $\mathcal{I}+\mathcal{K}_1^+ = \mathcal{I}+K\Lambda_{\chi_+}$ (здесь и далее χ_+ (χ_-) – характеристическая функция полупрямой $\mathbb{R}_+$ $(\mathbb{R}_-)$). Операторы $\mathcal{I}+\mathcal{K}^+$ и $\mathcal{I}+\mathcal{K}_1^+$ взаимосвязаны :

$$\begin{pmatrix} \mathcal{I} & 0 \\ 0 & \mathcal{I}+\mathcal{K}_1^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{I} & -\theta_+ \\ \mathcal{K}\theta_+^0 & -(\mathcal{I}+\mathcal{K}_1^+) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{I}+\mathcal{K}^+ & 0 \\ 0 & \mathcal{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{I} & -\theta_+ \\ \mathcal{K}\theta_+^0 & -(\mathcal{I}+\mathcal{K}_1^+) \end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

где

$$\begin{pmatrix} \mathcal{I} & -\theta_+ \\ \mathcal{K}\theta_+^0 & -(\mathcal{I}+\mathcal{K}_1^+) \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathcal{I}+\mathcal{K}^+ & -\theta_+ \\ \mathcal{K}\theta_+^0 & -\mathcal{I} \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

3.2. Лемма 3.1. *Пусть $h(x) \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}_+)$ – убывающая, неотрицательная функция, $q(x,t)$ $(0 < t \le x < \infty)$ – функция, удовлетворяющая неравенству*

$$|q(x,t)| \le h(x+t) \quad (0 < t \le x < \infty), \tag{3.4}$$

и пусть $Q : \mathrm{L}^2(\mathbb{R}_+) \longmapsto \mathrm{L}^2(\mathbb{R}_+)$ – интегральный оператор

$$(Qy)(x) = \int_0^x q(x,t)y(t)\,dt.$$

Тогда оператор $\mathcal{I}-Q$ обратим и $(\mathcal{I}-Q)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} Q^n$.

Доказательство. Сначала докажем оценку

$$|(Q^k y)(x)| \le \|y\|_+ \left[\frac{h(x)}{(k-1)!\,2^{k-1}} \left(\int_0^x h(\tau)\,d\tau\right)^{2k-1}\right]^{\frac{1}{2}}, \quad k = 1,2,3,\ldots \tag{3.5}$$

где $\|y\|_+$ – норма функции $y \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}_+)$. Если $k=1$, то (3.5) получается из (3.4) применением неравенства Гельдера, ввиду монотонности $h(x)$. Пусть $j \ge 1$ – некоторое натуральное число. Предположим, что (3.5) верно для $k=j$. Тогда

$$|(Q^{j+1}y)(x)| \le \|y\|_+ \int_0^x h(x+t) \left[\frac{h(t)}{(j-1)!\,2^{j-1}} \left(\int_0^t h(\tau)\,d\tau\right)^{2j-1}\right]^{\frac{1}{2}} dt \le$$

$$\le \|y\|_+ \left[\int_0^x h(x+t)\,dt\right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_0^x \frac{h(x+t)h(t)}{(j-1)!\,2^{j-1}} \left(\int_0^t h(\tau)\,d\tau\right)^{2j-1} dt\right]^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le \|y\|_+ \left[\int_x^{2x} h(\tau)\,d\tau\right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{h(x)}{(j-1)!\,2^{j-1}} \int_0^x h(t) \left(\int_0^t h(\tau)\,d\tau\right)^{2j-1} dt\right]^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le \|y\|_+ \left[\frac{h(x)}{j!\,2^j} \left(\int_0^x h(\tau)\,d\tau\right)^{2j+1}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Следовательно, оценка (3.5) справедлива также при $k = j + 1$, и поэтому она справедлива для всех $k \geq 1$. Из (3.5) для нормы $\|Q^k\|_+$ оператора Q^k получаем

$$\|Q^k\|_+ \leq \frac{1}{\sqrt{k!2^k}} \left(\int_0^\infty h(x)\, dx \right)^k, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Лемма доказана.

Можно доказать, что оператор Q компактен. Однако, нам этот факт не понадобится, и его доказательство мы пропускаем.

Рассмотрим операторы $\Gamma_+ : \mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+) \longmapsto \mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+)$, $\Gamma_- : \mathbf{L}^2(\mathbb{R}_-) \longmapsto \mathbf{L}^2(\mathbb{R}_-)$, $\Gamma : \mathbf{L}^2(\mathbb{R}) \longmapsto \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$, определенные равенствами

$$(\Gamma_+ y)(x) = y(x) + \int_0^x G^+(t, x) y(t)\, dt, \quad (\Gamma_- y)(x) = y(x) + \int_x^0 G^-(t, x) y(t)\, dt,$$

$$\Gamma = \theta_+^0 \Gamma_+ \theta_+ + \theta_-^0 \Gamma_- \theta_- .$$

Из теоремы 1.4 (случай $m = 2$), теоремы 1.5 (случай $m \geq 3$) и леммы 3.1 вытекает следующее утверждение.

Следствие 3.1. Операторы $\Gamma_\pm, \Gamma$ обратимы и

$$\Gamma_\pm^{-1} = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n (1 - \Gamma_\pm)^n, \quad \Gamma^{-1} = \theta_+^0 \Gamma_+^{-1} \theta_+ + \theta_-^0 \Gamma_-^{-1} \theta_- .$$

Пусть $\mathcal{F}$ (от $\mathcal{F}^{-1}$) – прямое (обратное) преобразование Фурье

$$(\mathcal{F}^{\pm 1} y)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty e^{\pm ixt} y(t)\, dt, \quad y \in \mathbf{L}^2(R),$$

и пусть $\mathcal{S} : \mathbf{L}^2(\mathbb{R}) \longmapsto \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ ($\mathcal{S}_0 : \mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+) \longmapsto \mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+)$) – оператор сингулярного интегрирования вдоль прямой (полупрямой) :

$$(\mathcal{S} y)(x) = \frac{1}{\pi i} v.p. \int_{-\infty}^\infty \frac{y(t)}{t - x}\, dt, \quad (\mathcal{S}_0 y)(x) = \frac{1}{\pi i} v.p. \int_0^\infty \frac{y(t)}{t - x}\, dt.$$

Наконец, пусть $\mathcal{P}_\pm = \frac{1}{2}(1 \pm \mathcal{S})$ – проекторы, соответствующие разложению $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}) = \mathbf{H}_2^+ \oplus \mathbf{H}_2^-$ где $\mathbf{H}_2^+$ и $\mathbf{H}_2^-$, соответственно – классы Харди в верхней и нижней полуплоскостях.

Решения $z^\pm(x, \lambda)$ уравнения (1.1) в случае $m = 2$ определим по формуле (1.20), а в случае $m \geq 3$ – по формуле (1.23).

Лемма 3.2. *Для произвольной функции $y \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ справедливы следующие равенства :*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty \overline{z^+(x,\mu)}y(x)\,dx = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{t+\overline{\mu}}(\mathcal{F}\Gamma y)(t)\,dt, \quad Im\,\mu>0, \tag{3.6}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty \overline{z^+(x,\pm\lambda)}y(x)\,dx = (\mathcal{P}_\mp\mathcal{F}^{\mp1}\Gamma y)(\lambda), \quad \lambda\in\mathbb{R}, \tag{3.7}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^0 \overline{z^-(x,\mu)}y(x)\,dx = -\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{t+\overline{\mu}}(\mathcal{F}\Gamma y)(t)\,dt, \quad Im\,\mu<0, \tag{3.8}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^0 \overline{z^-(x,\pm\lambda)}y(x)\,dx = (\mathcal{P}_\pm\mathcal{F}^{\mp1}\Gamma y)(\lambda), \quad \lambda\in\mathbb{R}. \tag{3.9}$$

Доказательство. Из (1.20), (1.23) и теоремы Пэли–Винера (см., напр., [14]) следует, что

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^0 \overline{z^+(x,\mu)}y(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{-i\overline{\mu}x}(\theta_+^0\Gamma_+\theta_+y)(x)\,dx =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{t+\overline{\mu}}(\mathcal{F}\theta_+^0\Gamma_+\theta_+y)(x)\,dx.$$

Поскольку $\mathcal{F}\theta_-^0\Gamma_-\theta_-y\in\mathbf{H}_2^-$, то

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{t+\overline{\mu}}(\mathcal{F}\theta_-^0\Gamma_-\theta_-y)(t)\,dt=0,$$

и, тем самым, верно равенство (3.6). Равенство (3.8) доказывается аналогично. Пользуясь тем, что $\mathcal{F}\Lambda_{\chi+}=\mathcal{P}_+\mathcal{F}$, $\mathcal{F}^{-1}\Lambda_{\chi+}=\mathcal{P}_-\mathcal{F}^{-1}$ (см., напр., [2]), из (1.21) и (1.23) находим

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty \overline{z^+(x,\pm\lambda)}y(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{\mp i\lambda x}(\Gamma_+\theta_+y)(x)\,dx =$$
$$= (\mathcal{P}_\pm\mathcal{F}^{\mp1}\theta_+^0\Gamma_+\theta_+y)(\lambda).$$

Отсюда, учитывая что $\mathcal{F}^{-1}\theta_-^0\Gamma_-\theta_-\in\mathbf{H}_2^+$, $\mathcal{F}\theta_-^0\Gamma_-\theta_-y\in\mathbf{H}_2^-$, получим (3.7). Формула (3.9) доказывается аналогично. Лемма доказана.

Рассмотрим операторы $\tilde{\mathcal{N}}_\omega:\mathbf{L}^2(\mathbb{R})\longmapsto\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ и $\mathcal{N}_\omega:\mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+)\longmapsto\mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+)$ ($|\omega|=1$), определенные формулами

$$(\tilde{\mathcal{N}}_\omega y)(\lambda)=\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^\infty \frac{y(t)}{t-\omega\lambda}\,dt, \quad \mathcal{N}_\omega=\theta_+\tilde{\mathcal{N}}_\omega\theta_+^0.$$

Заметим, что $\tilde{\mathcal{N}}_1$ и $\mathcal{N}_1$ совпадают с сингулярными интегральными операторами $\mathcal{S}$ и $\mathcal{S}_0$ соответственно.

Пусть $\mathcal{M}:\mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+)\longmapsto\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ и $\mathcal{M}^{-1}:\mathbf{L}^2(\mathbb{R})\longmapsto\mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+)$ соответственно – прямое и обратное преобразования Меллина :

$$(\mathcal{M}y)(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty t^{\frac12-i\lambda}y(t)\,dt,\quad \lambda\in\mathbb{R},$$
$$(\mathcal{M}^{-1}y)(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty t^{i\lambda-\frac12}y(\lambda)\,d\lambda,\quad t\in\mathbb{R}_+.$$

Доказательство нижеприведенного утверждения можно найти в [15] или [16].

Лемма 3.3. *Если $\omega=e^{i\beta}$ $(0\le\beta<2\pi)$, то справедливы равенства*

$$\mathcal{M}\mathcal{N}_\omega\mathcal{M}^{-1}=\Lambda_{n_\beta},\tag{3.10}$$

где

$$n_\beta(x)=\begin{cases}\operatorname{tg} h\pi x, & \beta=0,\\ \dfrac{e^{-i\frac{\beta}{2}}e^{(\pi-\beta)x}}{\cosh\pi x}, & \beta\in(0,2\pi).\end{cases}\tag{3.11}$$

В зависимости от четности m рассмотрим два различных случая.

3.3. Случай $m=2n+1$. Пусть $u(x,\lambda)$ – обобщенная собственная функция оператора $\mathcal{L}$, определенная в лемме 1.2, а $A_j^\pm(\lambda)$ определены равенствами (1.26). Рассмотрим функции

$$\alpha^o_{-1}(\lambda)=\frac12\left[\overline{A_0^+(\lambda)}+\overline{A_0^-(\lambda)}\right],\quad \alpha^o_0(\lambda)=\frac12\left[\overline{A_0^-(\lambda)}-\overline{A_0^+(\lambda)}\right],\quad \lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\},$$
$$\alpha^o_i(\lambda)=\frac12\begin{cases}\overline{A_i^-(\lambda)}, & \lambda>0,\\ -\overline{A_i^+(\lambda)}, & \lambda<0,\end{cases}\quad \alpha^o_j(\lambda)=\frac12\begin{cases}-\overline{A_{m-j}^+(\lambda)}, & \lambda>0,\\ \overline{A_{m-j}^-(\lambda)}, & \lambda<0,\end{cases}$$
$$i=1,\ldots,n,\quad j=n+1,\ldots,m-1.\tag{3.12}$$

Лемма 3.4. *Оператор $\mathcal{U}_o$, определенный по формуле (1.9), допускает представление*

$$\mathcal{U}_o=\mathcal{V}_o\mathcal{F}\Gamma,\tag{3.13}$$

где

$$\mathcal{V}_o=\left(\Lambda_{\alpha^o_{-1}}+\sum_{j=0}^{m-1}\Lambda_{\alpha^o_j}\tilde{\mathcal{N}}_{\omega_j}\right)\tau,\tag{3.14}$$

а $\tau:\mathrm{L}^2(\mathbb{R})\longmapsto\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ – *оператор отражения* : $(\tau y)(x)=y(-x)$.

Доказательство. Из (1.26) следует, что если $y\in\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ и $\lambda\in\mathbb{R}_+$, то

$$(\mathcal{U}_oy)(\lambda)=\overline{A_0^+(\lambda)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty\overline{z^+(x,\lambda)}y(x)\,dx+$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\overline{A_j^+(\lambda)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty \overline{z^+(x,\omega_j\lambda)}y(x)\,dx+\overline{A_0^-(\lambda)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^0 \overline{z^-(x,\lambda)}y(x)\,dx+$$
$$+\sum_{j=1}^{n}\overline{A_j^-(\lambda)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^0 \overline{z^-(x,\overline{\omega}_j\lambda)}y(x)\,dx.$$

При $\lambda\in\mathbb{R}_-$

$$(\mathcal{U}_o y)(\lambda)=\overline{A_0^+(\lambda)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty \overline{z^+(x,\lambda)}y(x)\,dx+$$
$$+\sum_{j=1}^{n}\overline{A_j^+(\lambda)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty \overline{z^+(x,\overline{\omega}_j\lambda)}y(x)\,dx+\overline{A_0^-(\lambda)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^0 \overline{z^-(x,\lambda)}y(x)\,dx+$$
$$+\sum_{j=1}^{n}\overline{A_j^-(\lambda)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^0 \overline{z^-(x,\omega_j\lambda)}y(x)\,dx.$$

Воспользовавшись леммой 3.2 и формулами (3.12) получим (3.13) и (3.14). Лемма доказана.

Теорема 3.1. *Если $m=2n+1$, а $c(\lambda)$ определено по формулам (2.14) и (2.15), то справедливо представление*

$$\mathcal{U}_o(\mathcal{I}+\mathcal{K}_1^+)=(\mathcal{V}_o+\Lambda_c\mathcal{V}_o\mathcal{P}_+)\mathcal{F}\Gamma. \tag{3.15}$$

Доказательство. Применив равенства $\Gamma\Lambda_{\chi+}=\Lambda_{\chi+}\Gamma$ и $\mathcal{F}\Lambda_{\chi+}=\mathcal{P}_+\mathcal{F}$, получим

$$\mathcal{U}_o\Lambda_{\chi+}=\mathcal{V}_o\mathcal{P}_-\mathcal{F}^{-1}\Gamma. \tag{3.16}$$

Из (2.22) следует, что $\mathcal{U}_o\mathcal{K}=\Lambda_c\mathcal{U}_o$. Поэтому $\mathcal{U}_o(\mathcal{I}+\mathcal{K}_1^+)=\mathcal{U}_o+\mathcal{U}_o\mathcal{K}\Lambda_{\chi+}$. Подставив (3.13) и (3.16) в правую сторону последнего равенства, получим (3.15). Теорема доказана.

3.4. Случай $m=2n$. Пусть операторы $\mathcal{U}_j$ $(j=1,2)$ определены равенством (1.15). Определим ограниченный оператор $\mathcal{U}_e:\mathrm{L}^2(\mathbb{R})\longmapsto\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ равенством $\mathcal{U}_e=\theta_+^0\mathcal{U}_1+\tau\theta_+^0\mathcal{U}_2$. Пусть $\psi=(\theta_+^0,\ \tau\theta_+^0):\mathrm{L}_2^2(\mathbb{R}_+)\longmapsto\mathrm{L}^2(\mathbb{R}_+)$. Тогда

$$\psi^{-1}=\begin{pmatrix}\theta_+\\ \theta_+\tau\end{pmatrix},\quad \mathcal{U}_e=\psi\begin{pmatrix}\mathcal{U}_1\\ \mathcal{U}_2\end{pmatrix}.$$

Воспользовавшись теоремой 1.3, получим $\ker\mathcal{U}_e=\mathrm{H}_0$, причем $\mathcal{U}_e$ имеет правую обратную $(\mathcal{U}_e)^{(-1)}$, которая определена равенством $(\mathcal{U}_e)^{(-1)}=\mathcal{U}_1^*\theta_++\mathcal{U}_2^*\theta_+\tau$.

Рассмотрим теперь функции :

$$\alpha^e_{-1}(\lambda)=\frac{1}{2}\begin{cases}\overline{B^+_{1n}(\lambda)}+\overline{B^-_{1n}(\lambda)}, & \lambda>0,\\ \overline{B^+_{20}(-\lambda)}+\overline{B^-_{20}(-\lambda)}, & \lambda<0,\end{cases}$$

$$\alpha^e_{-\tau}(\lambda)=\frac{1}{2}\begin{cases}\overline{B^+_{10}(\lambda)}+\overline{B^-_{10}(\lambda)}, & \lambda>0,\\ \overline{B^+_{2n}(-\lambda)}+\overline{B^-_{2n}(-\lambda)}, & \lambda<0,\end{cases}$$

$$\alpha^e_{0}(\lambda)=\frac{1}{2}\begin{cases}\overline{B^+_{1n}(\lambda)}-\overline{B^-_{1n}(\lambda)}, & \lambda>0,\\ \overline{B^+_{20}(-\lambda)}-\overline{B^-_{20}(-\lambda)}, & \lambda<0,\end{cases} \tag{3.17}$$

$$\alpha^e_{n}(\lambda)=\frac{1}{2}\begin{cases}\overline{B^+_{10}(\lambda)}-\overline{B^-_{10}(\lambda)}, & \lambda>0,\\ \overline{B^+_{2n}(-\lambda)}-\overline{B^-_{2n}(-\lambda)}, & \lambda<0,\end{cases}$$

$$\alpha^e_{k}(\lambda)=\frac{1}{2}\begin{cases}\overline{B^+_{1,n-k}(\lambda)}, & \lambda>0,\\ -\overline{B^-_{2k}(-\lambda)}, & \lambda<0,\end{cases}\qquad \alpha^e_{j}(\lambda)=\frac{1}{2}\begin{cases}-\overline{B^-_{1,j-n}(\lambda)}, & \lambda>0,\\ \overline{B^+_{2,m-j}(-\lambda)}, & \lambda<0,\end{cases}$$

$$k=1,2,\ldots,n-1,\quad j=n+1,n+2,\ldots,m-1,$$

где $B^{\pm}_{jk}(\lambda)$ $(j=1,2;\ k=0,1,\ldots,n)$ определяются из (1.27).

Лемма 3.5.

$$\mathcal{U}_e=\mathcal{V}_e\mathcal{F}\Gamma, \tag{3.18}$$

где оператор $\mathcal{V}_e:\mathbf{L}^2(\mathbb{R})\longmapsto\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ *определяется формулой*

$$\mathcal{V}_e=\Lambda_{\alpha^e_{-1}}+\Lambda_{\alpha^e_{-\tau}}\tau+\sum_{k=0}^{m-1}{}'\,\Lambda_{\alpha^e_k}\tilde{\mathcal{N}}_{\omega_k}. \tag{3.19}$$

Доказательство. Из представлений (1.27) следует, что при $y\in\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$

$$(\mathcal{U}_jy)(\lambda)=\overline{B^+_{j0}(\lambda)}\int_0^\infty\overline{z^+(x,\lambda)}y(x)\,dx+\overline{B^+_{jn}(\lambda)}\int_0^\infty\overline{z^+(x,\omega_n\lambda)}y(x)\,dx+$$
$$+\sum_{k=1}^{n-1}\overline{B^+_{jk}(\lambda)}\int_0^\infty\overline{z^+(x,\omega_k\lambda)}y(x)\,dx+\overline{B^-_{j0}(\lambda)}\int_{-\infty}^0\overline{z^-(x,\omega_k\lambda)}y(x)\,dx+$$
$$+\overline{B^-_{jn}(\lambda)}\int_{-\infty}^0\overline{z^-(x,\omega_n\lambda)}y(x)\,dx+\sum_{k=1}^{n-1}\overline{B^-_{jk}(\lambda)}\int_{-\infty}^0\overline{z^-(x,\overline{\omega}_k\lambda)}y(x)\,dx,\quad j=1,2.$$

Опираясь на (3.6) – (3.9) и определение $\mathcal{U}_e$, из (3.17), (3.19) получим (3.18). Лемма доказана.

Теорема 3.2. *Пусть $m=2n$, и пусть матрица-функция $A(\lambda)$ определена равенством (2.39). Тогда*

$$\mathcal{U}_e(\mathcal{I}+\mathcal{K}^+_1)=(\mathcal{V}_e+\psi\Lambda_A\psi^{-1}\mathcal{V}_e\mathcal{P}_+)\mathcal{F}\Gamma. \tag{3.20}$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3.1.

3.5. Рассмотрим оператор $\mathcal{V} : \mathbf{L}^2(\mathbb{R}) \longmapsto \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$:

$$\mathcal{V} = (\mathcal{V}_o + \Lambda_c \mathcal{V}_o \mathcal{P}_+)\tau, \quad \text{если } m = 2n+1, \tag{3.21}$$

$$\mathcal{V} = (\mathcal{V}_e + \psi \Lambda_A \psi^{-1} \mathcal{V}_e \mathcal{P}_+), \quad \text{если } m = 2n, \tag{3.22}$$

а также оператор $\mathcal{U} : \mathbf{L}^2(\mathbb{R}) \longmapsto \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$, совпадающий с $\mathcal{U}_o$ в случае $m = 2n+1$ и с $\mathcal{U}_e$ в случае $m = 2n$. Формулы (3.15) и (3.20) могут быть записаны в единой форме

$$\mathcal{U}(\mathcal{I} + \mathcal{K}_1^+) = \mathcal{V}\mathcal{F}\Gamma. \tag{3.23}$$

Определим оператор $\tilde{\mathcal{V}} : \mathbf{L}_2^2(\mathbb{R}) \longmapsto \mathbf{L}_2^2(\mathbb{R})$, положив

$$\tilde{\mathcal{V}} = \begin{pmatrix} \mathcal{M} & 0 \\ 0 & \mathcal{M} \end{pmatrix} \psi^{-1} \mathcal{V} \psi \begin{pmatrix} \mathcal{M}^{-1} & 0 \\ 0 & \mathcal{M}^{-1} \end{pmatrix}. \tag{3.24}$$

Для произвольной матрицы-функции $a(x)$ второго порядка с элементами из $\mathbf{L}^\infty(\mathbb{R})$ через $\mathcal{T}(a) : \mathbf{L}_2^2(\mathbb{R}) \longmapsto \mathbf{L}_2^2(\mathbb{R})$ обозначим оператор свертки Фурье с $a(x)$:

$$\mathcal{T}(a) = \begin{pmatrix} \mathcal{F}^{-1} & 0 \\ 0 & \mathcal{F}^{-1} \end{pmatrix} \Lambda_a \begin{pmatrix} \mathcal{F} & 0 \\ 0 & \mathcal{F} \end{pmatrix}.$$

Пусть $\mathbf{X}$ – множество бесконечно-дифференцируемых на R функций, имеющих конечные пределы в $\pm\infty$, и пусть $\mathbf{Y}$ – множество функций, ограниченных на всей оси и непрерывных на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Обозначим через $\mathbf{B}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ множество операторов вида

$$\sum_{i=1}^{N} \mathcal{T}(\gamma_i) \Lambda_{\beta_i}, \tag{3.25}$$

где элементы матриц-функций β_i и γ_i второго порядка принадлежат $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ соответственно.

Ниже в этом пункте будем полагать, что удовлетворено следующее условие :

Г) *число собственных значений оператора $\mathcal{L}$ конечно и, с учетом кратностей, равно $\nu = dim\, \mathbf{H}_0$.*

Теорема 3.3. *Оператор $\tilde{\mathcal{V}}$ принадлежит $\mathbf{B}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$. Если выполнено условие Г), то операторы $\mathcal{I} + \mathcal{K}^+$, $\tilde{\mathcal{V}}$ и $\mathcal{V}$ фредгольмовы лишь одновременно и имеет место* *равенство*

$$Ind(\mathcal{I}+\mathcal{K}^+) = Ind\tilde{\mathcal{V}} - \nu = Ind\mathcal{V} - \nu. \tag{3.26}$$

Доказательство. Пусть $a(x) \in \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R})$ и $d(a) = diag\,[a(x), a(-x)]$ $(x \in \mathbb{R}_+)$. Нетрудно видеть, что

$$\begin{gathered}\psi^{-1}\Lambda_a\psi = \Lambda_{d(a)}, \quad \psi^{-1}\mathcal{P}_\pm\psi = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} I \pm \mathcal{N}_1 & \mp\mathcal{N}_{-1} \\ \pm\mathcal{N}_{-1} & 1 \mp \mathcal{N}_1 \end{pmatrix}, \\ \psi^{-1}\tau\psi = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{I} \\ \mathcal{I} & 0 \end{pmatrix}, \quad \psi^{-1}\tilde{\mathcal{N}}_\omega\psi = \begin{pmatrix} \mathcal{N}_\omega & -\mathcal{N}_{-\omega} \\ \mathcal{N}_{-\omega} & -\mathcal{N}_\omega \end{pmatrix}, \quad (|\omega| = 1).\end{gathered} \tag{3.27}$$

С другой стороны, для любой матрицы-функции $a(x)$ $(x \in \mathbb{R}_+)$ второго порядка с элементами из $\mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}_+)$ справедливо равенство

$$\begin{pmatrix} \mathcal{M} & 0 \\ 0 & \mathcal{M} \end{pmatrix} \Lambda_a \begin{pmatrix} \mathcal{M}^{-1} & 0 \\ 0 & \mathcal{M}^{-1} \end{pmatrix} = \mathcal{T}(\tilde{a}), \tag{3.28}$$

где $\tilde{a}(x) = a(e^x)$.

Из равенств (3.24), (3.27) и леммы 3.3 следует, что $\tilde{\mathcal{V}}$ может быть представлено в виде (3.25). Свойства функций $A_j^\pm(\lambda)$, $B_{kj}^\pm(\lambda)$ и равенства (3.12), (3.17), (3.27), (3.28) обеспечивают принадлежность коэффициентов соответствующим классам $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$. Первое утверждение теоремы доказано.

Так как $dim\,\mathbf{H}_0 < \infty$, то оператор $\mathcal{U}$ фредгольмов и оператор $\mathcal{I} - \mathcal{U}^{(-1)}\mathcal{U}$ конечномерен. Из равенства $\mathcal{I} + \mathcal{K}_1^+ = \mathcal{U}^{(-1)}\mathcal{U}(\mathcal{I} + \mathcal{K}_1^+) + (\mathcal{I} - \mathcal{U}^{(-1)}\mathcal{U})(\mathcal{I} + \mathcal{K}_1^+)$ следует, что оба оператора $\mathcal{I} + \mathcal{K}_1^+$ и $\mathcal{U}(\mathcal{I} + \mathcal{K}_1^+)$ фредгольмовы одновременно и

$$Ind(\mathcal{I} + \mathcal{K}_1^+) = Ind(\mathcal{U}(\mathcal{I} + \mathcal{K}_1^+)) - \nu. \tag{3.29}$$

Из тождеств (3.2), (3.3) следует, что операторы $\mathcal{I} + \mathcal{K}^+$ и $\mathcal{I} + \mathcal{K}_1^+$ фредгольмовы одновременно и $Ind(\mathcal{I} + \mathcal{K}^+) = Ind(\mathcal{I} + \mathcal{K}_1^+)$. Ввиду обратимости Γ (см. следствие 3.1) из теорем 3.1 и 3.2 получим, что операторы $\mathcal{U}(\mathcal{I} + \mathcal{K}_1^+)$ и $\mathcal{V}$ фредгольмовы одновременно и $Ind\,\mathcal{U}(\mathcal{I} + \mathcal{K}_1^+) = Ind\,\mathcal{V}$. Таким образом, в силу (3.29) и (3.24), получим второе утверждение теоремы и, в частности, равенство (3.26). Теорема доказана.

Замечание 3.1. В скалярном случае операторы вида (3.25) при различных предположениях относительно коэффициентов γ_i, β_i были изучены в [2], [15] - [19]. Большинство этих результатов распространимо на случай матричных коэффициентов (в связи с этим см. §7 работы [2]) и может быть использовано при исследовании оператора $\mathcal{I}+\mathcal{K}^+$. Например, при дополнительном предположении о существовании конечных пределов

$$\lim_{\lambda\to\pm 0} A_j^{\pm}(\lambda), \quad \lim_{\lambda\to 0} B_{kj}^{\pm}(\lambda), \tag{3.30}$$

$$\lim_{\lambda\to\pm 0} c(\lambda), \quad \lim_{\lambda\to 0} A(\lambda), \tag{3.31}$$

на основе теоремы 3.3, методами работ [2], [15], [19] можно получить эффективные критерии фредгольмовости и найти индекс оператора $\mathcal{I}+\mathcal{K}^+$. В следующем параграфе найдены условия фредгольмовости оператора $\mathcal{I}+\mathcal{K}^+$ при $m=2$ (см. ниже, замечания 4.1, 4.2).

3.6. Пусть π_0 - оператор, проектирующий $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ на подпространство $\mathbf{H}_0$. Полагая, что существует обобщенный обратный оператор $\mathcal{V}^{(-1)}$, рассмотрим операторы

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_1 &= \Gamma^{-1}\mathcal{F}^{-1}\mathcal{V}^{(-1)}\mathcal{U}\mathcal{K}\theta_+^0 : \mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+) \longmapsto \mathbf{L}^2(\mathbb{R}),\\
\mathcal{R}_{11} &= \mathcal{I}+\theta_+\mathcal{R}_1 : \mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+) \longmapsto \mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+),\\
\mathcal{R}_{21} &= \begin{pmatrix} \pi_0\mathcal{K}_1^+\mathcal{R}_1 \\ \left[\mathcal{I}-\mathcal{U}^{(-1)}\mathcal{V}\mathcal{V}^{(-1)}\mathcal{U}\right]\mathcal{K}\theta_+^0 \end{pmatrix} : \mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+) \longmapsto \mathbf{H}_0 \oplus \mathbf{Y}_1,
\end{aligned} \tag{3.32}$$

где $\mathbf{Y}_1 = ker\mathcal{V}^{(-1)}\mathcal{U}$, а также

$$\begin{aligned}
&\mathcal{R}_{12} = \left(0; \theta_+\big|_{\mathbf{Y}_2}\right) : \mathbf{H}_0 \oplus \mathbf{Y}_2 \longmapsto \mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+), \quad \mathcal{R}_2 = \pi_0\mathcal{K}_1^+\big|_{\mathbf{Y}_2} : \mathbf{Y}_2 \longmapsto \mathbf{H}_0,\\
&\mathcal{R}_0 = \begin{pmatrix} \mathcal{I} & \mathcal{R}_1 \\ \mathcal{I}_{\mathbf{Y}_1}\big|_{\mathbf{H}_0} & 0 \end{pmatrix} : \mathbf{H}_0 \oplus \mathbf{Y}_2 \longmapsto \mathbf{H}_0 \oplus \mathbf{Y}_1,
\end{aligned} \tag{3.33}$$

где $\mathbf{Y}_2 = \Gamma^{-1}\mathcal{F}^{-1}(ker\mathcal{V})$. Из (3.23) следует, что

$$\mathcal{I}+\mathcal{K}_1^+ = \mathcal{U}^{(-1)}\mathcal{V}\mathcal{F}\Gamma + (\mathcal{I}-\mathcal{U}^{(-1)}\mathcal{U})(\mathcal{I}+\mathcal{K}_1^+).$$

Отсюда, из тождеств (3.2), (3.3) и результатов §1, [20] вытекает следующее утверждение.

Теорема 3.4. *Пусть выполнено условие Г). Если оператор $\mathcal{I}+\mathcal{K}^+$ фредгольмов, то обобщенный обратный оператор оператора $\mathcal{I}+\mathcal{K}^+$ задается формулой*

$$(\mathcal{I}+\mathcal{K}^+)^{(-1)} = \mathcal{R}_{11} - \mathcal{R}_{12}\mathcal{R}_0^{(-1)}\mathcal{R}_{21}. \tag{3.34}$$

При этом

$$\begin{gathered}\ker(\mathcal{I}+\mathcal{K}^+) = \theta_+(\ker \mathcal{R}_2),\\ Im(\mathcal{I}+\mathcal{K}^+) = \mathcal{R}_{21}^{-1}(Im\,\mathcal{R}_0), \quad Ind(\mathcal{I}+\mathcal{K}^+) = Ind\,\mathcal{R}_0,\\ \dim\ker(\mathcal{I}+\mathcal{K}^+) = \dim\ker\mathcal{R}_0, \quad \dim Coker(\mathcal{I}+\mathcal{K}^+) = \dim Coker\mathcal{R}_0.\end{gathered} \tag{3.35}$$

Замечание 3.2. Таким образом, в случае фредгольмовости оператора $\mathcal{I}+$ $+\mathcal{K}^+$ теоремы 3.3 и 3.4 позволяют свести задачу о разрешимости уравнения $(\mathcal{I}+\mathcal{K}^+)y = f$, $f \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+)$ в пространстве $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+)$ к построению обобщенных обратных $\mathcal{V}$ и конечной матрицы, соответствующей $\mathcal{R}_0$.

В связи с проблемой построения оператора $\mathcal{V}^{(-1)}$ теорема 3.4 в общем случае носит несколько формальный характер. Однако, она играет важную роль в частной ситуации, рассмотренной в §5.

§4. ФРЕДГОЛЬМОВОСТЬ ОПЕРАТОРА $\mathcal{I}+\mathcal{K}^+$ В СЛУЧАЕ КОГДА $\mathcal{L}$ – ОПЕРАТОР ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ

4.1. Пусть $m = 2$ и $K(x,t)$ – ядро $\mathcal{L}$–свертки. В этом параграфе всюду будем предполагать, что верно следующее утверждение.

Д) *Имеет место неравенство (1.19). Функции a_{sk} $(s,k = 1,2)$, определенные формулами (2.29), (2.30), удовлетворяют условиям (2.40).*

В силу теоремы 1.1 и леммы 2.6 выполнение Д) влечет выполнение условий А) – Г). Поэтому все утверждения, доказанные в §§2, 3, остаются справедливыми.

Пусть решения $z^{\pm}(x,\lambda)$ уравнения (1.6) определены по (1.20). Полагая $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, обозначим

$$a(\lambda) = \frac{z^+(0,\lambda)'z^-(0,-\lambda) - z^+(0,\lambda)z^-(0,-\lambda)'}{2i\lambda},$$

$$b(\lambda) = \frac{z^-(0,\lambda)'z^+(0,\lambda) - z^-(0,\lambda)z^+(0,\lambda)'}{2i\lambda},$$

где дифференцирование производится по первой переменной. Функции

$$r^-(\lambda) = \frac{b(\lambda)}{a(\lambda)}, \quad r^+(\lambda) = -\frac{b(-\lambda)}{a(\lambda)}, \quad \text{и} \quad t(\lambda) = \frac{1}{a(\lambda)}, \tag{4.1}$$

называются (см. [11]), соответственно, левым и правым коэффициентами отражения и коэффициентом прохождения. Выбрав функции $B^{\pm}_{ji}(\lambda)$ как в лемме 1.3, будем иметь ([11]) :

$$\begin{gathered} B^-_{10} = B^+_{21} = 1, \quad B^-_{20} = B^+_{11} = 0, \\ B^+_{20}(\lambda) = r^+(\lambda), \quad B^-_{11}(\lambda) = r^-(\lambda), \quad B^+_{10}(\lambda) = B^-_{21}(\lambda) = t(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}_+, \end{gathered} \tag{4.2}$$

При $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ введем

$$a^{(1)}(\lambda) = \begin{cases} a_{11}(\lambda), & \lambda > 0, \\ a_{22}(-\lambda), & \lambda < 0, \end{cases} \quad a^{(2)}(\lambda) = \begin{cases} a_{12}(\lambda), & \lambda > 0, \\ a_{21}(-\lambda), & \lambda < 0, \end{cases} \tag{4.3}$$

$$\begin{gathered} \gamma_1(\lambda) = \beta_{11}(\lambda) + a^{(1)}(\lambda)\beta_{11}(\lambda) + a^{(2)}(\lambda)\beta_{12}(-\lambda), \\ \gamma_2(\lambda) = \beta_{12}(\lambda) + a^{(1)}(\lambda)\beta_{12}(\lambda) + a^{(2)}(\lambda)\beta_{11}(-\lambda), \end{gathered} \tag{4.4}$$

где $\beta_{11} = \alpha^e_{-1} + \alpha^e_0$, $\quad \beta_{12} = \alpha^e_{-\tau} + \alpha^e_1$, $\quad \beta_{21} = \alpha^e_{-1} - \alpha^e_0$, $\quad \beta_{22} = \alpha^e_{-\tau} - \alpha^e_1$.

Нетрудно видеть, то

$$\psi \Lambda_A \psi^{(-1)} = \Lambda_{a^{(1)}} + \Lambda_{a^{(2)}} \tau. \tag{4.5}$$

Из (4.2), (3.17) и равенств $r^{\pm}(-\lambda) = \overline{r^{\pm}(\lambda)}$, $t(-\lambda) = \overline{t(\lambda)}$ (см. [11]) находим

$$\begin{gathered} \beta_{11}(\lambda) = \begin{cases} 0, & \lambda > 0, \\ r^+(\lambda), & \lambda < 0, \end{cases} \quad \beta_{12}(\lambda) = \begin{cases} \overline{t(\lambda)}, & \lambda > 0, \\ 1, & \lambda < 0, \end{cases} \\ \beta_{21}(\lambda) = \begin{cases} \overline{r^-(\lambda)}, & \lambda > 0, \\ 0, & \lambda < 0, \end{cases} \quad \beta_{22}(\lambda) = \begin{cases} 1, & \lambda > 0, \\ t(\lambda), & \lambda < 0. \end{cases} \end{gathered} \tag{4.6}$$

Теорема 4.1. *Имеют место равенства*

$$\mathcal{U} = \{(\Lambda_{\beta_{11}}\mathcal{P}_+ + \Lambda_{\beta_{21}}\mathcal{P}_-) + (\Lambda_{\beta_{22}}\mathcal{P}_+ + \Lambda_{\beta_{12}}\mathcal{P}_-)\tau\} \mathcal{F}\Gamma, \tag{4.7}$$

$$\mathcal{U}(\mathcal{I} + \mathcal{K}^+_1) = \mathcal{V}\mathcal{F}\Gamma, \tag{4.8}$$

где

$$\mathcal{V} = (\Lambda_{\gamma_1}\mathcal{P}_+ + \Lambda_{\beta_{21}}\mathcal{P}_-) + (\Lambda_{\beta_{22}}\mathcal{P}_+ + \Lambda_{\gamma_2}\mathcal{P}_-)\tau. \tag{4.9}$$

Функции $\gamma_j(\lambda)$, $\beta_{ij}(\lambda)$ $(i, j = 1, 2)$ ограничены на всей оси и непрерывны на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Существуют пределы

$$\lim_{\lambda\to\pm\infty} \beta_{11}(\lambda) = \lim_{\lambda\to\pm\infty} \gamma_1(\lambda) = 0, \quad \lim_{\lambda\to\pm\infty} \beta_{12}(\lambda) = \lim_{\lambda\to\pm\infty} \gamma_2(\lambda) = 1,$$

$$\lim_{\lambda\to\pm\infty} \beta_{21}(\lambda) = 0, \quad \lim_{\lambda\to\pm\infty} \beta_{22}(\lambda) = 1.$$

Доказательство. Первое утверждение непосредственно следует из результатов п. 3.4, ввиду (4.3)–(4.5) и того, что $\tau\mathcal{P}_\pm = \mathcal{P}_\mp\tau$. Второе утверждение следует из формул (2.31), (4.3), (4.5) и равенств $\lim_{\lambda\to\pm\infty} r^\pm(\lambda) = 0$, $\lim_{\lambda\to\pm\infty} t(\lambda) = 1$ (см. [11]). Теорема доказана.

Ниже мы дополнительно будем предполагать существование пределов

$$\lim_{\lambda\to 0} a_{ij}(\lambda) = a_{ij}(0), \tag{4.10}$$

$$\lim_{\lambda\to -0} r^\pm(\lambda) = r_0^\pm, \quad \lim_{\lambda\to -0} t(\lambda) = t_0. \tag{4.11}$$

Замечание 4.1. При выполнении любого из условий

$$\lim_{\lambda\to 0} \lambda a(\lambda) \neq 0, \tag{4.12}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(1 + x^2\right) |p_0(x)|\, dx < \infty, \tag{4.13}$$

выполнено (4.11). В обоих случаях функции $r^\pm(\lambda)$, $t(\lambda)$ непрерывны. Если выполнено условие (4.12), то $r_0^\pm = -1$ и $t_0 = 0$. Если $\lim_{\lambda\to 0} \lambda a(\lambda) = 0$ и верно (4.13), то

$$r_0^+ = -r_0^- = \frac{c^+ - c^-}{c^+ + c^-}, \quad t_0 = \frac{2}{c^+ + c^-},$$

где числа $c^\pm$ определены равенствами

$$z^+(x, 0) = c^+ z^-(x, 0), \quad z^-(x, 0) = c^- z^+(x, 0), \quad c^+ c^- = 1.$$

Доказательства этих утверждений можно найти в работе [11]. В [11] также высказано предположение о том, что функции $r^\pm(\lambda)$, $t(\lambda)$ непрерывны, если только выполнены условия (1.19).

Замечание 4.2. Из теоремы 4.1 следует, что в случае $m = 2$ оператор $\mathcal{V}$ – сингулярный оператор с отражением, т. е. сингулярный интегральный оператор с карлемановским обратным сдвигом. Существующая теория Фредгольма для таких операторов предполагает свойства коэффициентов, как непрерывность, кусочная непрерывность, квазинепрерывность или кусочная квазинепрерывность. Подробно эта теория представлена в [21] – [26]. При предположениях (4.10), (4.11) имеет место кусочная непрерывность коэффициентов оператора $\mathcal{V}$, позволяющая применить к $\mathcal{I}+\mathcal{K}^+$ хорошо известную теорию Гохберга–Крупника (см. [22], [23], [27]).

4.2. При $j = 1, 2, 3$ и $\lambda \in \mathbb{R}_+$ положим

$$\Xi_1(\lambda) = \begin{pmatrix} \gamma_1(\lambda) & \beta_{22}(\lambda) \\ \gamma_2(-\lambda) & \beta_{21}(-\lambda) \end{pmatrix}, \quad \Xi_2(\lambda) = \begin{pmatrix} \beta_{21}(\lambda) & \gamma_2(\lambda) \\ \beta_{22}(-\lambda) & \gamma_1(-\lambda) \end{pmatrix}, \tag{4.14}$$

$$\Xi_3(\lambda) = \begin{pmatrix} \gamma_2(\lambda) - \beta_{22}(\lambda) & \beta_{21}(\lambda) - \gamma_1(\lambda) \\ \gamma_1(-\lambda) - \beta_{21}(-\lambda) & \beta_{22}(-\lambda) - \gamma_2(-\lambda) \end{pmatrix}.$$

При выполнении условий (4.10) и (4.11) существуют пределы

$$\lim_{\lambda \to 0} \Xi_j(\lambda) = \Xi_j^0, \quad j = 1, 2, 3.$$

Введя в рассмотрение матрицу-функцию

$$\Psi(x) = \frac{1}{2}\left\{(1 + \mathrm{tg}\; h2\pi x)\Xi_1^0 + (1 - \mathrm{tg}\; h2\pi x)\Xi_2^0 - \frac{i}{\cosh 2\pi x}\Xi_3^0\right\}, \quad x \in \mathbb{R},$$

перейдем к основному результату этого параграфа.

Теорема 4.2. *Пусть выполнены условия (4.10) и (4.11). Тогда оператор $\mathcal{I}+\mathcal{K}^+$ фредгольмов в том и только том случае, когда*

$$\inf_{\lambda \in \mathbb{R}_+} det\,|\Xi_j(\lambda)| > 0, \quad j = 1, 2, \quad \inf_{x \in \mathbb{R}} det\,|\Psi(x)| > 0. \tag{4.15}$$

При выполнении этих условий индекс оператора $\mathcal{I}+\mathcal{K}^+$ вычисляется по формуле

$$Ind\,(\mathcal{I}+\mathcal{K}^+) = \frac{1}{2\pi} var\,arg\,det\,\left(\Xi_1^{-1}(\lambda)\Xi_2(\lambda)\right)\Big|_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} - \frac{1}{2\pi} var\,arg\,det\,\Psi(x)\Big|_{\lambda=-\infty}^{\lambda=\infty} - \nu. \tag{4.16}$$

Доказательство. Пусть $\mathbb{T}_+ = \{\zeta;\ |\zeta| = 1,\ Im\zeta \geq 0\}$, и пусть $\varrho(\zeta) = |\zeta - 1|^{-\frac{1}{2}}|\zeta + 1|^{\frac{1}{2}}$ – весовая функция на $\mathbb{T}_+$. Направление на $\mathbb{T}_+$ выберем от $\zeta = 1$ к $\zeta = -1$ и определим оператор σ, переводящий элементы $\mathbf{L}_2^2(\mathbb{R}_+)$ в элементы весового пространства $\mathbf{L}_2^2(\mathbb{T}_+, \varrho)$, по формуле

$$(\sigma y)(\zeta) = \frac{1}{1+\zeta} y\left(\sqrt{i\frac{1-\zeta}{1+\zeta}}\right), \quad \zeta \in \mathbb{T}_+, \quad y \in \mathbf{L}_2^2(\mathbb{R}_+).$$

Из результатов работы [24] следует, что σ является ограниченным и обратимым оператором, а оператор $\sigma\psi^{-1}\mathcal{V}\psi\sigma^{-1} : \mathbf{L}_2^2(\mathbb{T}_+, \varrho) \longmapsto \mathbf{L}_2^2(\mathbb{T}_+, \varrho)$ определяется равенством :

$$\sigma\psi^{-1}\mathcal{V}\psi\sigma^{-1} = \Lambda_{\mathcal{D}_0}\begin{pmatrix} \mathcal{I} & 0 \\ 0 & \mathcal{I} \end{pmatrix} + \Lambda_{\mathcal{D}_1}\begin{pmatrix} \mathcal{S}_+ & 0 \\ 0 & \mathcal{S}_+ \end{pmatrix} + \Lambda_{\mathcal{D}_2}\begin{pmatrix} \mathcal{S}_+^{-1} & 0 \\ 0 & \mathcal{S}_+^{-1} \end{pmatrix},$$

где

$$\mathcal{D}_0(\zeta) = \frac{1}{2}\left(\Xi_1(\lambda) + \Xi_2(\lambda)\right), \quad \mathcal{D}_j(\zeta) = \frac{1}{4}\left(\Xi_1(\lambda) - \Xi_2(\lambda) + (-1)^j\Xi_3(\lambda)\right), \quad j = 1, 2, \tag{4.17}$$

$$\zeta \in \mathbb{T}_+, \quad \lambda = \sqrt{i(1-\zeta)/(1+\zeta)} \quad \text{и} \quad (\mathcal{S}_+ y)(\xi) = \frac{1}{\pi i}\, v.p \int_{\mathbb{T}_+} \frac{y(\zeta)}{\zeta - \xi} d\zeta.$$

Из теоремы 4.1 и формул (2.31), (4.14), (4.17) следует, что

$$\mathcal{D}_0(-1) = \lim_{\lambda\to\infty} \frac{1}{2}\left(\Xi_1(\lambda) + \Xi_2(\lambda)\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{D}_j(-1) = \lim_{\lambda\to\infty} \frac{1}{4}\left(\Xi_1(\lambda) - \Xi_2(\lambda) - (-1)^j\Xi_3(\lambda)\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2. \tag{4.18}$$

Аналогичным образом, из (4.10) и (4.11) следует, что

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_0(1) &= \frac{1}{2}\left(\Xi_1^0 + \Xi_2^0\right), \\ \mathcal{D}_j(1) &= \frac{1}{4}\left(\Xi_1^0 - \Xi_2^0 - (-1)^j\Xi_3^0\right), \quad j = 1, 2. \end{aligned} \tag{4.19}$$

Воспользовавшись (4.18), (4.19), теоремой 4.1 и результатами работы [27], получим, что оператор $\sigma\psi^{-1}\mathcal{V}\psi\sigma^{-1}$ (а, следовательно, и оператор $\mathcal{V}$) фредгольмов тогда и только тогда, когда выполнены условия (4.15), причем

$$\begin{aligned} &Ind\ \left(\sigma\psi^{-1}\mathcal{V}\psi\sigma^{-1}\right) = Ind\,\mathcal{V} = \\ &= \frac{1}{2\pi} var\ arg\ det\ \left(\Xi_1^{-1}(\lambda)\Xi_2(\lambda)\right)\Big|_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} - \frac{1}{2\pi} var arg\ det\ \Psi(x)\Big|_{x=-\infty}^{x=\infty}. \end{aligned} \tag{4.20}$$

Теперь остается применить теорему 3.3. Теорема доказана.

4.3. Рассмотрим формулу (4.16) в случае, когда $K(x,t) \equiv 0$. Пусть $S(\lambda)$ – матрица рассеяния (см. [7]) :

$$S(\lambda) = \begin{pmatrix} t(\lambda) & r^-(\lambda) \\ r^+(\lambda) & t(\lambda) \end{pmatrix},$$

и $s_0 = \lim\limits_{\lambda \to -0} det\, S(\lambda)$. Нетрудно видеть, что в этом случае

$$det\, \Sigma_1(\lambda) = -1, \quad det\Sigma_2(\lambda) = -\,det\, S(-\lambda) = -\frac{t(-\lambda)}{t(\lambda)},$$

$$det\, \Psi(x) = -\frac{(1 - \operatorname{tg} h2\pi x)s_0}{2} - \frac{(1 + \operatorname{tg} h2\pi x)}{2} + \frac{i\left(r_0^+ + r_0^-\right)}{2\cosh 2\pi x}. \tag{4.21}$$

Условия (4.15) выполнены ввиду фредгольмовости оператора $\mathcal{U}$. Формула (4.16) связывает число ν собственных значений оператора $\mathcal{L}$ с коэффициентами $t(\lambda)$, $r^\pm(\lambda)$.

Следствие 4.1. При выполнении условий (4.11) число ν собственных значений оператора $\mathcal{L}$ равно

$$\nu = -\frac{1}{2\pi}\, var \arg\, det\, S(\lambda)\Big|_{\lambda=+0}^{\lambda=\infty} -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\, var \arg \left\{ -\frac{(1 - \operatorname{tg} h2\pi x)s_0}{2} - \frac{(1 + \operatorname{tg} h2\pi x)}{2} + \frac{i\left(r_0^+ + r_0^-\right)}{2\cosh 2\pi x} \right\}\Bigg|_{x=-\infty}^{x=\infty}. \tag{4.22}$$

Если функции $t(\lambda)$, $r^\pm(\lambda)$ непрерывны в нуле, то

$$\nu = -\frac{1}{2\pi}\, var \arg\, det S(\lambda)\Big|_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} - \frac{r_0^-(1 - s_0)}{4}. \tag{4.23}$$

В частности, если выполнено условие (4.13), то

$$\nu = -\frac{1}{2\pi}\, var \arg\, det\, S(\lambda)\Big|_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} + \frac{1 - s_0}{4}. \tag{4.24}$$

Доказательство. Формула (4.22) непосредственно следует из (4.16) и (4.21). Далее, если коэффициенты $t(\lambda)$, $r^\pm$ непрерывны в нуле, то s_0, t_0, $r_0^\pm$ вещественны.

Так как $S(\lambda)$ унитарно (см. [7] или [11]), то $s_0 = 1$ или $s_0 = -1$. Если $s_0 = 1$, то из равенства $r^-(\lambda) = -r^+(-\lambda) \det S(\lambda)$ следует, что $r_0^- + r_0^+ = 0$ и $\det \Psi(x) \equiv -1$. Тем самым, из (4.22) получаем (4.23).

В случае, когда $s_0 = -1$, из равенства $r_0^- = -r_0^+ s_0$ следует, что $r_0^- = r_0^+$. Очевидно также, что $t_0 = 0$. Тем самым, $r_0^- = r_0^+ = -1$, либо $r_0^- = r_0^+ = 1$. Рассматривая эти два случая, приходим к равенству

$$\frac{1}{2\pi} \arg det\Psi(x)\Big|_{x=-\infty}^{x=\infty} = \frac{r_0^-}{2} = \frac{r_0^-(1-s_0)}{4}.$$

Подставив последнее в (4.22), приходим к (4.23).

Если выполнено условие (4.13), то, ввиду замечания 4.1, при $s_0 = -1$ имеем $r_0^\pm = -1$.

§5. ПОЛНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ УРАВНЕНИЯ $(\mathcal{I} + \mathcal{K}^+)y = f$ В СЛУЧАЕ, КОГДА $\mathcal{L}$ – ОПЕРАТОР ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ С БЕЗОТРАЖАТЕЛЬНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

5.1. В этом параграфе проводится более детальное исследование оператора $\mathcal{I}+\mathcal{K}^+$ в одном специальном случае, при $m = 2$.

Пусть числа $-\lambda_s^2$ ($\lambda_s > 0$; $s = 1, 2\ldots, \nu$) – собственные значения оператора $\mathcal{L}$. Тогда (см. [11]) функции

$$v_s(x) = v_1(x, i\lambda_s) = d_s^+ z^+(x, i\lambda_s) = d_s^- z^-(x, -i\lambda_s), \quad s = 1, 2, \ldots, \nu \tag{5.1}$$

являются ортонормированной системой собственных функций $\mathcal{L}$. Правые и левые нормировочные коэффициенты определяются равенствами

$$(d_s^\pm)^{-2} = \int_{-\infty}^{\infty} \left|z^\pm(x, \pm i\lambda_s)\right|^2 dx, \quad s = 1, 2, \ldots, \nu.$$

Рассмотрим функции $J_{ks}(\lambda)$ $(k, s = 1, 2;\ \lambda \in \mathbb{R}_+)$:

$$\begin{aligned}
J_{11}(\lambda) &= a_{11}(\lambda)B_{10}^+(\lambda)\overline{B_{10}^-(\lambda)} + a_{12}(\lambda)B_{10}^+(\lambda)\overline{B_{20}^-(\lambda)} + \\
&\quad + a_{21}(\lambda)B_{20}^+(\lambda)\overline{B_{10}^-(\lambda)} + a_{22}(\lambda)B_{20}^+(\lambda)\overline{B_{20}^-(\lambda)}, \\
J_{12}(\lambda) &= a_{11}(\lambda)B_{10}^+(\lambda)\overline{B_{11}^-(\lambda)} + a_{12}(\lambda)B_{10}^+(\lambda)\overline{B_{21}^-(\lambda)} + \\
&\quad + a_{21}(\lambda)B_{20}^+(\lambda)\overline{B_{11}^-(\lambda)} + a_{22}(\lambda)B_{20}^+(\lambda)\overline{B_{21}^-(\lambda)}, \\
J_{21}(\lambda) &= a_{11}(\lambda)B_{11}^+(\lambda)\overline{B_{10}^-(\lambda)} + a_{12}(\lambda)B_{11}^+(\lambda)\overline{B_{20}^-(\lambda)} + \\
&\quad + a_{21}(\lambda)B_{21}^+(\lambda)\overline{B_{10}^-(\lambda)} + a_{22}(\lambda)B_{21}^+(\lambda)\overline{B_{20}^-(\lambda)}, \\
J_{22}(\lambda) &= a_{11}(\lambda)B_{11}^+(\lambda)\overline{B_{11}^-(\lambda)} + a_{12}(\lambda)B_{11}^+(\lambda)\overline{B_{21}^-(\lambda)} + \\
&\quad + a_{21}(\lambda)B_{21}^+(\lambda)\overline{B_{11}^-(\lambda)} + a_{22}(\lambda)B_{21}^+(\lambda)\overline{B_{21}^-(\lambda)}.
\end{aligned} \tag{5.2}$$

Ядро $K(x,t)$ $\mathcal{L}$–свертки обладает следующим свойством.

Лемма 5.1. *Если выполнено условие Д), то ядро $K(x,t)$ $\mathcal{L}$–свертки удовлетворяет соотношению*

$$\lim_{x\to\infty} K(x, t-x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \left(J_{12}(\lambda)e^{i\lambda t} + J_{21}(\lambda)e^{-i\lambda t}\right) d\lambda. \tag{5.3}$$

Доказательство. Коэффициенты $p_0(x)$ вещественны, тем самым $\overline{z^\pm(x,\lambda)} = z^\pm(x,-\lambda)$. Из (1.27), (5.1) следует, что

$$\begin{aligned}
&[a_{1k}(\lambda)u_1(x,\lambda) + a_{2k}(\lambda)u_2(x,\lambda)]\,\overline{u_k(t-x,\lambda)} = \\
&\quad = \{[a_{1k}(\lambda)B_{10}^+(\lambda) + a_{2k}(\lambda)B_{20}^+(\lambda)]z^+(x,\lambda) + [a_{1k}(\lambda)B_{11}^+(\lambda) + a_{2k}(\lambda)B_{21}^+(\lambda)]\times \\
&\quad \times z^+(x,-\lambda)\}\left[\overline{B_{k0}^-(\lambda)}z^-(t-x,-\lambda) + \overline{B_{k1}^-(\lambda)}z^-(t-x,\lambda)\right], \quad k = 1, 2,
\end{aligned} \tag{5.4}$$

$$v_s(x)\overline{v_s(t-x)} = d_s^+ d_s^- z^+(x, i\lambda_s)z^-(t-x, -i\lambda_s), \quad s = 1, 2, \ldots, \nu. \tag{5.5}$$

Подставив (5.4), (5.5) в (2.35), получим

$$\begin{aligned}
K(x, t-x) &= \sum_{s=1}^{\nu} c_{11}(i\lambda_s)d_s^+ d_s^- z^+(x, i\lambda_s)z^-(t-x, -i\lambda_s) + \\
&\quad + \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \left[J_{11}(\lambda)z^+(x,\lambda)z^-(t-x,-\lambda) + J_{12}(\lambda)z^+(x,\lambda)z^-(t-x,\lambda) + \right. \\
&\quad \left. + J_{21}(\lambda)z^+(x,-\lambda)z^-(t-x,-\lambda) + J_{22}(\lambda)z^+(x,-\lambda)z^-(t-x,\lambda)\right] d\lambda.
\end{aligned}$$

В силу (1.20)

$$K(x,t-x)=\sum_{s=1}^{\nu}c_{11}(i\lambda_s)d_s^+d_s^-\left[e^{-\lambda_s x}+\int_x^\infty e^{-\lambda_s\xi}G^+(x,\xi)d\xi\right]\times$$
$$\times\left[e^{\lambda_s(t-x)}+\int_{-\infty}^{t-x}e^{\lambda_s\xi}G^-(t-x,\xi)d\xi\right]+$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\left\{J_{11}(\lambda)\left[e^{i\lambda x}+\int_x^\infty e^{i\lambda\xi}G^+(x,\xi)d\xi\right]\times\right.$$
$$\times\left[e^{-i\lambda(t-x)}+\int_{-\infty}^{t-x}e^{-i\lambda\xi}G^-(t-x,\xi)d\xi\right]+$$
$$+J_{12}(\lambda)\left[e^{i\lambda x}+\int_x^\infty e^{i\lambda\xi}G^+(x,\xi)d\xi\right]\left[e^{i\lambda(t-x)}+\int_{-\infty}^{t-x}e^{i\lambda\xi}G^-(t-x,\xi)d\xi\right]+$$
$$+J_{21}(\lambda)\left[e^{-i\lambda\xi}+\int_x^\infty e^{-i\lambda\xi}G^+(x,\xi)d\xi\right]\left[e^{-i\lambda(t-x)}+\int_{-\infty}^{t-x}e^{-i\lambda\xi}G^-(t-x,\xi)d\xi\right]+$$
$$+J_{22}(\lambda)\left[e^{-i\lambda\xi}+\int_x^\infty e^{-i\lambda\xi}G^+(x,\xi)d\xi\right]\times$$
$$\left.\times\left[e^{i\lambda(t-x)}+\int_{-\infty}^{t-x}e^{i\lambda\xi}G^-(t-x,\xi)d\xi\right]\right\}d\lambda. \tag{5.6}$$

Функция $a_{ks}(\lambda)$ $(k,s=1,2)$ ограничены и, ввиду (2.31), суммируемы на $\mathbb{R}_+$. Поэтому суммируемы также функции $J_{ks}(\lambda)$ $(k,s=1,2)$. Переходя к пределу в (5.6), приходим к (5.3), и лемма доказана.

5.2. Потенциал $p_0(x)$ может быть единственным образом восстановлен (см. [11]) посредством данных рассеяния $r^+(\lambda)$ $(\lambda\in\mathbb{R})$, λ_k, d_k^+ $(k=1,2,\ldots,\nu)$. В этом параграфе будем полагать, что $p_0(x)$ является безотражательным потенциалом, т. е. $r^\pm(\lambda)\equiv 0$. Безотражательные потенциалы характеризуются множеством из 2ν положительных чисел λ_k, d_k^+ $(k=1,2,\ldots,\nu)$. Имеют место формулы восстановления (см. [7])

$$p_0(x)=-2\frac{d^2}{dx^2}\ln det\Theta(x), \tag{5.7}$$

где

$$\Theta(x)=E_\nu+\left(\frac{(d_k^+)^2}{\lambda_m+\lambda_k}e^{-(\lambda_m+\lambda_k)x}\right)_{m,k=1}^{\nu}.$$

Отметим также, что $p_0(x)$ удовлетворяет условию (4.13).

Лемма 5.2. *Если $p_0(x)$ – безотражательный потенциал, то условие*

$$\lim_{x\to\infty} K(x,t-x)=0, \quad t\in\mathbb{R}, \tag{5.8}$$

эквивалентно равенствам $a_{12}(\lambda)=0$, $a_{21}(\lambda)=0$.

Доказательство. В силу (5.3) условие (5.8) эквивалентно равенствам

$$J_{12}(\lambda)=0, \quad J_{21}(\lambda)=0. \tag{5.9}$$

В случае безотражательного потенциала из (4.2) следует, что

$$B^{\pm}_{20}(\lambda)=B^{\pm}_{11}(\lambda)=0, \quad B^{-}_{10}(\lambda)=B^{+}_{21}(\lambda)=1, \quad B^{+}_{10}(\lambda)=B^{-}_{21}(\lambda)=\iota(\lambda). \tag{5.10}$$

Учитывая это, из (5.2) получаем, что второе равенство (5.9) эквивалентно равенству $a_{21}(\lambda)=0$. Так как в этом случае (см. [11])

$$\iota(\lambda)=\prod_{k=1}^{\nu}\frac{\lambda+i\lambda_k}{\lambda-i\lambda_k}, \tag{5.11}$$

то из (5.10) и (5.2) следует, что первое равенство (5.9) эквивалентно равенству $a_{12}(\lambda)=0$. Лемма доказана.

В случае безотражательного потенциала условие (5.8) дает возможность избежать сдвига в формуле (4.8).

Теорема 5.1. *Пусть $p_0(x)$ – безотражательный потенциал, и пусть ядро $\mathcal{L}$–свертки удовлетворяет условию (5.8). Тогда*

$$\mathcal{U}(\mathcal{I}+\mathcal{K}_1^{+})=\mathcal{V}^0\mathcal{F}^{-1}\Gamma, \tag{5.12}$$

где

$$\mathcal{V}^0=\Lambda_{\beta_{22}}\mathcal{P}_{+}+\Lambda_{\gamma_2}\mathcal{P}_{-}, \tag{5.13}$$

а коэффициенты β_{22}, γ_2 определяются по формулам

$$\beta_{22}(\lambda)=\begin{cases}1, & \lambda>0,\\ \displaystyle\prod_{k=1}^{\nu}\frac{\lambda+i\lambda_k}{\lambda-i\lambda_k}, & \lambda<0,\end{cases} \tag{5.14}$$

$$\gamma_2(\lambda)=\begin{cases}(1+a_{11}(\lambda))\displaystyle\prod_{k=1}^{\nu}\frac{\lambda-i\lambda_k}{\lambda+i\lambda_k}, & \lambda>0,\\ (1+a_{22}(-\lambda)), & \lambda<0.\end{cases} \tag{5.15}$$

Доказательство. Из (4.3) и леммы 5.2 имеем $a^{(2)}(\lambda) = 0$. Следовательно, учитывая (5.10), из (5.11) получим (5.14), (5.15), а также равенство $\beta_{21} = \gamma_2 = 0$. Равенства (5.12) и (5.13) следуют теперь из теоремы 4.1. Теорема доказана.

Лемма 5.3. *При выполнении условий теоремы 5.1 функции $a_{11}(\lambda)$ и $a_{22}(\lambda)$ имеют конечные пределы*

$$\lim_{\lambda\to 0} a_{11}(\lambda) = a_{11}(0), \quad \lim_{\lambda\to 0} a_{22}(\lambda) = a_{22}(0),$$

причем $a_{11}(0) = a_{22}(0)$.

Доказательство. Воспользовавшись (1.27) и (5.10) находим

$$\begin{aligned} u_1(x,\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} t(\lambda) z^+(x,\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} z^-(x,\lambda), \\ u_2(x,\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} z^+(x,-\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} t(\lambda) z^-(x,-\lambda). \end{aligned} \tag{5.16}$$

Следовательно, функции $u_j(x,\lambda)$ $(j = 1,2)$ непрерывны в точке $\lambda = 0$. Воспользовавшись этим, аналогично доказательству леммы 2.5 легко показать, что функции $w^{(k)}(x,\lambda)$, определенные равенствами (2.29), имеют предельные значения

$$w^{(k)}(x,0) = \lim_{\lambda\to 0} w^{(k)}(x,\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} u_k(t,0) K(x,t)\,dt \quad k = 1,2.$$

Отсюда и из (5.16), (5.11) следует, что

$$w^{(1)}(x,0) = (-1)^{\nu} w^{(2)}(x,0). \tag{5.17}$$

Ввиду (5.16) и леммы 5.2, равенства (2.30) принимают вид

$$w^{(1)}(x,\lambda) = a_{11}(\lambda) t(\lambda) z^+(x,\lambda), \quad w^{(2)}(x,\lambda) = a_{22}(\lambda) z^+(x,-\lambda). \tag{5.18}$$

Из теоремы 1.4 следует, что $z^+(x,0) \not\equiv 0$. Устремляя λ в (5.18) к нулю и пользуясь (5.17) получим все утверждения леммы. Лемма доказана.

Из леммы 5.3, равенства $\mathcal{V} = \mathcal{V}^0\tau$ и известных результатов теории сингулярных интегральных операторов (см. [13]) вытекает следующая

Лемма 5.4. *Если выполнены условия теоремы 5.1, то оператор $\mathcal{V}$ фредгольмов в том и только том случае, когда*

$$\inf_{\lambda>0} |1 + a_{11}(\lambda)| > 0, \quad \inf_{\lambda>0} |1 + a_{22}(\lambda)| > 0. \tag{5.19}$$

При выполнении этих условий справедливы равенства

$$
\begin{gathered}
Ind\mathcal{V} = \kappa_0 + \nu, \quad \dim\ker\mathcal{V} = \max\{\kappa_0 + \nu; 0\}, \\
\dim Coker\,\mathcal{V} = \max\{-(\kappa_0 + \nu); 0\},
\end{gathered} \tag{5.20}
$$

где

$$
\kappa_0 = \frac{1}{2\pi} var\ \arg\frac{1 + a_{11}(\lambda)}{1 + a_{22}(\lambda)}\Bigg|_{\lambda=0}^{\lambda=\infty}.
$$

Обобщенный обратный $\mathcal{V}^{(-1)}$ вычисляется по формуле

$$
\mathcal{V}^{(-1)} = \tau\left(\Lambda_{\gamma_+}\mathcal{P}_+ + \Lambda_{\gamma_-^{-1}}\mathcal{P}_-\right)\left(\mathcal{P}_+ + \Lambda_{d^{-1}}\mathcal{P}_-\right)\Lambda_{\gamma_+^{-1}\beta_{22}^{-1}},
$$

где

$$
\begin{gathered}
\gamma_\pm(\lambda) = \frac{1}{2}\left\{\ln\left[\tilde{a}(\lambda)\left(\frac{\lambda - i}{\lambda + i}\right)^{-\kappa_0}\right] \pm\right. \\
\left.\pm\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\ln\left[\tilde{a}(\mu)\left(\frac{\mu - i}{\mu + i}\right)^{-\kappa_0}\right]\frac{1}{\mu - \lambda}d\mu\right\}\prod_{k=1}^{\nu}\frac{\lambda \pm i}{\lambda \pm i\lambda_k}, \\
d(\lambda) = \left(\frac{\lambda - i}{\lambda + i}\right)^{\kappa_0 + \nu}, \quad \tilde{a}(\lambda) = 1 + a^{(1)}(\lambda),
\end{gathered}
$$

а коэффициенты $a^{(1)}(\lambda)$ и $\beta_{22}(\lambda)$ определены, соответственно, формулами (4.3) и (5.14).

При $\kappa_0 + \nu > 0$ функции

$$
g_s(\lambda) = \lambda^{s-1}\left[\frac{\gamma_+(-\lambda)}{(\lambda - i)^{\kappa_0+\nu}} - \frac{\gamma_-(-\lambda)}{(\lambda + i)^{\kappa_0+\nu}}\right], \quad s = 1, 2, \ldots, \kappa_0 + \nu, \quad \lambda \in R, \tag{5.21}
$$

образуют базис пространства $\ker\mathcal{V}$.

5.3. Перейдем теперь к исследованию оператора $\mathcal{I} + \mathcal{K}^+$. Из теоремы 3.3 и леммы 5.4 выводится следующая

Теорема 5.2. *Пусть $p_0(x)$ – безотражательное, а ядро $K(x,t)$ $\mathcal{L}$–свертки удовлетворяет условию (5.8). Тогда оператор $\mathcal{I} + \mathcal{K}^+$ фредгольмов в том и только том случае, если выполнены условия (5.19). При выполнении этих условий имеет место равенство*

$$
Ind(\mathcal{I} + \mathcal{K}_1^+) = \kappa_0.
$$

Дефектные числа $\dim\ker(\mathcal{I}+\mathcal{K}^+)$, $\dim Coker(\mathcal{I}+\mathcal{K}^+)$ и построение обобщенного обратного $(\mathcal{I} + \mathcal{K}^+)^{(-1)}$ существенно зависимы от знака величины $\kappa_0 + \nu$. Поэтому целесообразно рассмотреть два случая.

Теорема 5.3. *Пусть выполнены условия теоремы 5.2, пусть $\mathcal{I}+\mathcal{K}^+$ – фредгольмов оператор и $\kappa_0+\nu\le 0$. Тогда оператор $\mathcal{I}+\mathcal{K}^+$ обратим слева. В частности*

$$\dim\ker(\mathcal{I}+\mathcal{K}^+)=0,\quad \dim Coker\,(\mathcal{I}+\mathcal{K}^+)=-\kappa_0.$$

Левый обратный $(\mathcal{I}+\mathcal{K}^+)^{(-1)}$ может быть построен по формуле

$$(\mathcal{I}+\mathcal{K}^+)^{(-1)}=\mathcal{I}+\Gamma_+\theta_+\mathcal{F}^{-1}\mathcal{V}^{(-1)}\mathcal{U}\mathcal{K}\theta_+^0. \tag{5.22}$$

Доказательство. По лемме 5.4, оператор $\mathcal{V}$ обратим слева. Следовательно, $\mathbf{Y}_2=\Gamma^{-1}\mathcal{F}^{-1}(\ker\mathcal{V})=\{0\}$. Поэтому оператор $\mathcal{R}_0$, определенный по формуле (3.33), имеет вид

$$\mathcal{R}_0=\begin{pmatrix}\mathcal{I}\\ \mathcal{I}_{\mathbf{Y}_1|\mathbf{H}_0}\end{pmatrix}:\ \mathbf{H}_0\longmapsto\mathbf{H}_0\oplus\mathbf{Y}_1,$$

где $\mathbf{Y}_1=\ker\mathcal{V}^{(-1)}\mathcal{U}$. Отсюда, в силу теоремы 3.4 (см. формулу (3.35)) имеем $\ker(\mathcal{I}+\mathcal{K}^+)=\{0\}$. Поскольку в случае $\mathbf{Y}_2=\{0\}$ оператор $\mathcal{R}_{12}$, определенный по формуле (3.33) нулевой, то из (3.34) получим (5.22). Теорема доказана.

В случае $\kappa_0+\nu>0$ ситуация более сложна. В частности, теряется свойство односторонней обратимости. Пусть

$$w_k(x)=w_1(x,i\lambda_k)=\int_{-\infty}^{\infty}K(x,t)v_k(t)\,dt,\quad k=1,2,\dots,\nu,\quad x\in\mathbb{R}. \tag{5.23}$$

Из леммы 2.1 следует существование чисел c_k $(k=1,2,\dots,\nu)$ таких, что

$$w_k(x)=c_kv_k(x),\quad k=1,2,\dots,\nu. \tag{5.24}$$

Рассмотрим также числа f_{ks}, $\tilde f_{ks}$ $(k=1,2,\dots,\nu;\ s=1,2,\dots,\kappa_0+\nu)$ и матрицу F порядка $\nu\times(\kappa_0+\nu)$:

$$\begin{gathered}f_{ks}=\int_0^{\infty}\overline{v_k(t)}\left(\Gamma^{-1}\mathcal{F}^{-1}g_s\right)(t)\,dt,\quad \tilde f_{ks}=\int_{-\infty}^{\infty}v_k(t)\left(\Gamma^{-1}\mathcal{F}^{-1}g_s\right)(t)\,dt,\\ F=\left(\tilde f_{ks}+f_{ks}c_k\right),\quad k=1,2,\dots,\nu,\quad s=1,2,\dots,\kappa_0+\nu,\end{gathered} \tag{5.25}$$

где функции $g_s(\lambda)$ определены по формуле (5.21).

Теорема 5.4. *Пусть выполнены условия теоремы 5.2, оператор $\mathcal{I}+\mathcal{K}^+$ – фредгольмов и $\kappa_0+\nu>0$. Тогда*

$$\dim\ker(\mathcal{I}+\mathcal{K}^+)=\kappa_0+\nu-rank\,F,\quad \dim Coker\,(\mathcal{I}+\mathcal{K}^+)=\nu-rank\,F. \quad (5.26)$$

Обобщенный обратный $(\mathcal{I}+\mathcal{K}^+)^{(-1)}$ может быть построен по формуле

$$(\mathcal{I}+\mathcal{K}^+)^{(-1)}=\mathcal{I}+\Gamma_+\theta_+\mathcal{F}^{-1}\mathcal{V}^{(-1)}\mathcal{U}\mathcal{K}\theta_+^0-$$
$$-\theta_+|_{\mathbf{Y}_2}\mathcal{R}_2^{(-1)}\pi_0(\mathcal{I}+\mathcal{K}_1^+)\mathcal{R}_1+\theta_+|_{\mathbf{Y}_2}\mathcal{R}_2^{(-1)}\pi_0\mathcal{K}\theta_+^0, \quad (5.27)$$

где $\mathbf{Y}_2=\Gamma^{-1}\mathcal{F}^{-1}(\ker\mathcal{V})$, а операторы $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$ определены по формулам (3.32), (3.33).

Подпространства $\ker(\mathcal{I}+\mathcal{K}^+)$ и $Im(\mathcal{I}+\mathcal{K}^+)$ описываются по формулам в (3.35).

Доказательство. В силу леммы 5.4 оператор $\mathcal{V}$ обратим справа. Поэтому $\mathbf{Y}_1=\mathbf{H}_0$, и оператор $\mathcal{R}_0$ имеет следующее матричное представление :

$$\mathcal{R}_0=\begin{pmatrix}\mathcal{I} & \mathcal{R}_2\\ \mathcal{I} & 0\end{pmatrix}:\mathbf{H}_0\oplus\mathbf{Y}_2\longmapsto\mathbf{H}_0\oplus\mathbf{H}_0.$$

Легко видеть, что обобщенный обратный оператора $\mathcal{R}_0$ имеет вид

$$\mathcal{R}_0^{(-1)}=\begin{pmatrix}0 & \mathcal{I}\\ \mathcal{R}_2^{(-1)} & -\mathcal{R}_2^{(-1)}\end{pmatrix}:\ \mathbf{H}_0\oplus\mathbf{H}_0\longmapsto\mathbf{H}_0\oplus\mathbf{Y}_2.$$

Поскольку оператор $\mathcal{V}$ обратим справа, то

$$\mathcal{R}_{21}=\begin{pmatrix}\pi_0(\mathcal{I}+\mathcal{K}_1^+)\mathcal{R}_1\\ \pi_0\mathcal{K}\theta_+^0\end{pmatrix}:\ \mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+)\longmapsto\mathbf{H}_0\oplus\mathbf{H}_0.$$

Теперь пользуясь (3.31) и (3.33), получим (5.27).

Выберем ортонормированную систему собственных функций v_s $(s=1,\dots,\nu)$ и систему функций $\Gamma^{-1}\mathcal{F}^{-1}g_s$ $(s=1,\dots,\kappa_0+\nu)$ для базисов в $\mathbf{H}_0$ и $\mathbf{Y}_2$ соответственно. Так как в силу (2.36) и (5.23) – (5.25)

$$\left(\mathcal{R}_2\Gamma^{-1}\mathcal{F}^{-1}g_s\right)(x)=\left(\pi_0\Gamma^{-1}\mathcal{F}^{-1}g_s\right)(x)+\left(\pi_0\mathcal{K}\Lambda_{X+}\Gamma^{-1}\mathcal{F}^{-1}g_s\right)(x)=$$
$$=\sum_{k=1}^{\nu}\left(\bar{f}_{ks}+f_{ks}c_k\right)v_k(x),$$

то матрица F является матрицей оператора $\mathcal{R}_2$. Формулы (5.26) вытекают из (3.35) и очевидного равенства $\dim\ker\mathcal{R}_0=\dim\ker\mathcal{R}_2$. Теорема доказана.

Из теорем 5.3 и 5.4 следует критерий обратимости оператора $\mathcal{I}+\mathcal{K}^+$.

Теорема 5.5. *Пусть выполнены условия теоремы 5.2. Тогда оператор $\mathcal{I}+\mathcal{K}^+$ обратим в том и только том случае, когда*

1) выполнены условия (5.19);

2) $\nu > 0$, $\kappa_0 = 0$ и $\det F \neq 0$, либо $\nu = \kappa_0 = 0$.

ABSTRACT. The paper investigates one–dimensional integral operators of $\mathcal{L}$–convolution type with kernels satisfying certain partial differential equations. The operators $\mathcal{L}$ in the heading correspond to these equations. The results of the paper generalize the classical theory for convolution operators on the line and half-line. The spectral theory for ordinary differential operators and the theory of singular integral operators are the main tools.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Г. Крейн, "Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов", УМН 19, 5(83), стр. 3 — 120, 1958.
2. Р. В. Дудучава, "Интегральные уравнения типа свертки с разрывными предсимволами, сингулярные интегральные уравнения с неподвижными особенностями и их приложения к задачам механики", Труды Тбил. Мат. инст. АН Груз. ССР, т. 60, стр. 2 — 136, 1979.
3. А. Б. Нерсесян, "Структура резольвент некоторых интегральных операторов", Известия АН Армении, Математика, т. 17, № 6, стр. 442 — 463, 1982.
4. А. Б. Нерсесян, "Об эффективном численном решении интегральных уравнений", Известия НАН Армении, Математика, т. 27, № 2, стр. 1 — 49, 1992.
5. И. Г. Хачатрян, "О существовании оператора преобразования для дифференциальных уравнений высоких порядков, сохраняющего асимптотику решений", Известия АН Армении, Математика, т. 14, № 6, стр. 424 — 445, 1979.
6. И. Г. Хачатрян, "Об обратной задаче рассеяния для дифференциальных операторов высших порядков на всей оси", Известия АН Армении, Математика, т. 18, № 5, стр. 394 — 402, 1983.
7. R.K. Dodd, J. C. Eilbeck, J. D. Gibbon, H. C. Morris. Solitons and nonlinear wave equations, Academic Press, Ins. 1982.
8. М. А. Наймарк, Линейные дифференциальные операторы, Москва, Наука, 1969.
9. И. Г. Хачатрян, "Обратная задача рассеяния для дифференциальных операторов высших порядков на всей оси", Докторская диссертация, Тбилиси, 1986.
10. А. Р. Казарян, И. Г. Хачатрян, "Об обратной задаче рассеяния для дифференциального оператора произвольного порядка с суммируемыми коэффициентами I", Известия НАН Армении, Математика, т. 29, № 5, стр. 50 – 75, 1994.
11. В. А. Марченко, Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения, Киев, "Наукова думка", 1977.
12. Б. Я. Левин, "Преобразования типа Фурье и Лапласа при помощи решений дифференциального уравнения второго порядка", ДАН СССР, т. 106, № 2, стр. 187 — 190, 1956.
13. И. Ц. Гохберг, Н. Я. Крупник, Введение в теорию одномерных сингулярных

интегральных операторов, Кишинев, Штиинца, 1973.
14. K. Hoffman "Banach spaces of analytic functions", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1962.
15. S. Roch, B. Silbermann "Algebras of convolution operators and their image in the Calkin algebra. Report R-Math-05/90, Akad. Wiss. DDR, Berlin, 1990.
16. А. Г. Камалян, А. Б. Нерсесян, "Интегральные операторы плавного перехода", Функциональный анализ и его приложения, т. 23, № 2, стр. 32 — 39, 1989.
17. Н. К. Карапетянц, С. Г. Самко, "Об индексе некоторых классов интегральных операторов", Известия АН Армении, Математика, т. 8, № 1, стр. 26 — 40, 1973.
18. А. Б. Антоневич, "Об операторах типа свертки с осциллирующими коэффициентами", Известия АН Белоруссии, Серия физ.-мат. наук, № 2, стр. 42 — 46, 1976.
19. A. Böttcher, I.M. Spitkovsky "Pseudodifferential operators with heavy spectrum", Integral Equations and Operator Theory, vol. 19, no. 3, pp. 251 — 269, 1994.
20. А. Г. Камалян, В. А. Оганян, "Конструктивный метод факторизации для некоторых классов матриц-функций", т. 28, № 3, стр. 1 — 17, 1993.
21. Г. С. Литвинчук, "Краевые задачи и сингулярные уравнения со сдвигом", Наука, Москва, 1977.
22. V. G. Kravchenko, G. S. Litvinchuk "Introduction to the theory of singular integral operators with shift", Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London, 1994.
23. И. Ц. Гохберг, Н. Я. Крупник, "Об одномерных сингулярных интегральных операторах со сдвигом", Известия АН Армении, Математика, т. 8, № 1, стр. 3 — 12, 1973.
24. И. Ц. Гохберг, Н. Я. Крупник, "Об алгебрах сингулярных операторов со сдвигом", Матем. исслед., т. 8, № 2, стр. 170 — 175, 1973.
25. Н. К. Карапетянц, С. Г. Самко, "Об алгебрах, порожденных сингулярными интегральными операторами с кусочно-непрерывными коэффициентами и карлемановским сдвигом", Издательство Ростовского гос. ун-та, Ростов-на-Дону, 1989.
26. A. Böttcher, S. Roch, B. Silbermann, I.M. Spitkovskii, "A Gohberg-Krupnik-Sarason symbol calculus for algebras of Toeplitz, Hankel, Cauchy and Carleman operators" O.T. : Advances and Applications, vol.48, Birkhäuser Verlag Basel, pp. 189 — 234, 1990.
27. И. Ц. Гохберг, Н. Я. Крупник, "Сингулярные интегральные операторы с кусочно-непрерывными коэффициентами и их символы", Известия АН СССР, Математика, т. 35(4), стр. 940 — 964, 1971.

20 декабря 1994

Институт математики
Национальной Академии Наук Армении