

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, АССОЦИИРОВАННЫЕ С СИНГУЛЯРНОЙ ЗАДАЧЕЙ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ С ТОЧЕЧНЫМ СПЕКТРОМ

А. Б. Нерсисян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
т. 29, № 6, 1994

В статье исследованы интегральные операторы с ядрами, удовлетворяющими некоторым дифференциальным уравнениям второго порядка в частных производных. Целью исследования является нахождение условий, при которых они являются операторами "циркулянтного типа". Рассматриваемое дифференциальное уравнение в частных производных тесно связано с самосопряженной сингулярной задачей Штурма-Лиувилля с точечным спектром. Развита схема вычисления для таких операторов и их резольвент. Детально исследованы случаи, связанные с ортогональными многочленами Лаггера и Эрмита. В частности, предложены методы адаптивного вычисления для преобразований Ганкеля и Фурье. Статья содержит численные результаты.

Ключевые слова : *интегральные операторы, задача Штурма-Лиувилля, многочлены Лаггера, многочлены Эрмита, преобразование Ганкеля, преобразование Фурье*

ВВЕДЕНИЕ

В статьях автора [1, 2], на основе соотношений для резольвентных ядер, были рассмотрены интегральные операторы с ядрами, удовлетворяющими некоторым дифференциальным уравнениям, что привело к развитию некоторых "быстрых" методов решения интегральных уравнений. В частности, для интегрального уравнения второго рода на конечном интервале с ядром, удовлетворяющим уравнению

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) K(x, t) = (p(x) - p(t))K(x, t), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (0.1)$$

Данное исследование частично финансировано грантом № RYS000 Международного научного фонда.

соответствующий алгоритм по дискретизации на N точках имеет сложность $O(N^2)$ с использованием памяти порядка $O(N)$ ($N \rightarrow \infty$) (см. [2—4]). Ранее этот результат был известен лишь для случая $p(x) \equiv 0$ (т. е. для ядер вида $K(x, t) = K_1(x - t) + K_2(x + t)$). Свойства операторов с ядром K , удовлетворяющих уравнению (0.1) на бесконечном интервале, тесно связаны со спектральной теорией дифференциального оператора Штурма–Лиувилля \mathcal{L} , порожденного оператором $l = d^2/dx^2 - p(x)$. Для самосопряженных на $(-\infty, \infty)$ операторов \mathcal{L} с конечным дискретным спектром и непрерывным спектром, покрывающим положительную полуось теория разрешимости (а также ее версии для операторов высоких порядков) развиты в [5].

Ниже мы рассматриваем операторы \mathcal{L} , действующие в $L_2(0, +\infty)$ или в $L_2(-\infty, \infty)$, полагая, что спектр конечен и не имеет точек сгущения, кроме, быть может, бесконечности. Реализована предложенная в [2] схема “интегральных операторов циркулянтного типа”. Детально рассмотрен случай, соответствующий многочленам Лаггера (и, в частности, многочленам Эрмита).

Описаны связи с адаптивным приближенным вычислением преобразований Ганкеля и Фурье. Для широкого класса функций эффективность рекомендаций подтверждена численным экспериментом.

§1. ОПЕРАТОРЫ ОБЩЕГО ТИПА

1.1. Рассмотрим интегральных оператор

$$Ky = \int_a^\infty K(x, t)y(t) dt, \quad x \in (a, \infty), a \geq -\infty \quad (1)$$

с ядром $K \in C^2[(a, \infty) \times (a, \infty)]$, удовлетворяющим уравнению

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) K(x, t) = (p(x) - p(t)) K(x, t), \quad a < x, t < \infty, \quad \text{Im } p(x) = 0, \quad (2)$$

где $p(x)$ — непрерывная функция.

С ядром K ассоциируем самосопряженную задачу Штурма-Лиувилля с потенциалом $p(x)$:

$$ly = \frac{d^2}{dx^2} y(x, \lambda) - p(x) y(x, \lambda) = \lambda y(x, \lambda), \quad y(x, \lambda) \in L_2(a, \infty), \quad \lambda = \text{const}, \quad (3)$$

где в случае $a > -\infty$ в точке $x = a$ поставлено соответствующее граничное условие (см., напр., [6]).

Нас интересует случай, когда спектр оператора l , соответствующего задаче (3), чисто дискретен и имеют место теоремы о разложении оператора в L_2 по собственным функциям. Для этого достаточно (см. ([6], [7]) любое из нижеприведенных условий :

Условие А. $\lim p(x) = +\infty \quad (x \rightarrow \infty)$.

Условие Б. $p(x) \geq c > 0, c = \text{const}, \int_x^{x+\omega} p(x) dx \rightarrow \infty$ (при любых $\omega > 0$ и $x \rightarrow \infty$).

Обозначим через $\{y_k(x)\}$ ортонормальную систему собственных функций задачи (3), соответствующую собственным значениям $\{\lambda_k\}, k = 0, 1, 2, \dots$, с учетом их кратностей. Каждая из этих функций имеет не более чем конечное число нулей (см. [6]). Тем самым, для достаточно больших x ($|x| \geq A_k$, при некотором A_k) второе линейно независимое решение $z_k(x)$ уравнения (3) при $\lambda = \lambda_k$ допускает запись в виде

$$z_k(x) = y_k(x) \int_{A_k}^x \frac{dt}{(y_k(t))^2}, \quad x > A_k, \quad (4)$$

где для простоты предполагаем $x > 0$.

1.2. Пусть теперь ядро K удовлетворяет условиям

$$\left| \int_a^\infty \frac{\partial^i K(x, t)}{\partial x^i} y_k(t) dt \right| < +\infty, \quad (5)$$

$$\left| \int_a^\infty \frac{\partial^i K(x, t)}{\partial t^i} y_k(t) dt \right| < +\infty, \quad x \in (a, +\infty), \quad i = 1, 2, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Дополнительно предположим, что при $x > A_k$ (или $x < -A_k$)

$$\left| \int_a^\infty K(x, t) y_k(t) dt \right| \leq \varepsilon(x) y_k(x) \int_{A_k}^x \frac{dt}{(y_k(t))^2}, \quad (6)$$

при некоторой функции $\varepsilon(x)$, для которой $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \varepsilon(x) = 0$ ($|x| \rightarrow \infty$). Для случая $a > -\infty$ дополнительно поставим граничное условие

$$\lim (K(x, t) y'(t) - K_t(x, t) y(t)) = 0, \quad t \rightarrow 0, \quad (6')$$

где $y(x)$ удовлетворяет первоначальным условиям задачи (3).

Теорема 1. Если ядро K удовлетворяет условиям (2), (5), (6) (а при $a > -\infty$ также условию (6')), то

$$\mathcal{K} y_k = c_k y_k(x), \quad c_k = \text{const}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (7)$$

Доказательство. Из первого условия (5) следует, что функция

$$S_k(x) = \mathcal{K} y_k = \int_a^{\infty} K(x, t) y_k(t) dt, \quad x \in (a, \infty)$$

дважды дифференцируема. Из (2), второго условия (5) и условия (6') заключаем, что при $a > -\infty$ функция $S_k(x)$ удовлетворяет уравнению (3), если $\lambda = \lambda_k$.

Отсюда следует (см. п. 1.1), что

$$S_k(x) = c_k y_k'(x) + d_k z_k(x) = y_k(x) \left[c_k + d_k \int_{A_k}^x \frac{dt}{(y_k(t))^2} \right], \quad x > A_k, \quad c_k, d_k = \text{const}.$$

Поэтому при $d_k \neq 0$ нарушилось бы условие (6). Теорема доказана.

Замечание 1. Утверждение теоремы 1 остается справедливым и при некоторых, более слабых предположениях. В частности, не обязательно условие гладкости функции $K(x, t)$ на диагонали $x = t$. Можно предположить, например, что условие (2) выполнено при $x \neq t$ и существуют пределы $K(x, x \pm 0)$. (см. п. 2.3). Тогда достаточно потребовать непрерывность функции $\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} \right) K(x, t)$, а также выполнение условий (5) и (6) (а также (6'), если $a > -\infty$).

1.3. При дополнительных ограничениях на $p(x)$ могут быть найдены более удобные условия на ядро K , обеспечивающие справедливость формулы (7).

Обозначим

$$q(x) = p(x)^{-1/4} \frac{d^2}{dx^2} (p(x)^{-1/4}), \quad z_{\pm}(x, \lambda) = p(x)^{-1/4} \exp \left(\pm \int (p(x) - \lambda)^{1/2} dx \right). \quad (8)$$

Теорема 2. Пусть $p(x) \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow \infty$), $p(x) \in C_{loc}^2$, и функция $q(x)$ ограничена для $x > A$ при некотором A . Если для некоторого $\lambda = \text{const} > 0$ выполнены условия

$$\int_a^\infty \frac{\partial^i K(x, t)}{\partial x^i} z_-(t, \lambda) dt < \infty, \quad \int_a^\infty \frac{\partial^i K(x, t)}{\partial t^i} z_-(x, \lambda) dt < \infty, \quad i = 1, 2, \quad (9)$$

$$\left| \int_a^\infty K(x, t) z_-(t, \lambda) dt \right| \leq \varepsilon(x) z_+(x, \lambda), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \varepsilon(x) = 0, \quad (10)$$

(если $a > -\infty$, то также граничное условие (6')), то формула (7) справедлива.

Доказательство. Пусть $y(x, \lambda)$ - решение уравнения $ly = \lambda y$, $\lambda = \text{const}$ (см. (3)). Обозначим

$$r(x) = (p(x) - \lambda)^{-1/4} \frac{d^2}{dx^2} (p(x) - \lambda)^{-1/4}.$$

Если функция $r(x)$ ограничена при достаточно больших $|x|$ (т. е. в бесконечности), то верна асимптотическая формула (см., напр., [8])

$$y(x, \lambda) = (c_1 + z_+(x, \lambda) + c_2 z_-(x, \lambda))(1 + o(1)); \quad c_1, c_2 = \text{const}, \quad x \rightarrow \infty.$$

Легко видеть, что при $p(x) \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow \infty$) функции $r(x)$ и $q(x)$ в бесконечности либо ограничены, либо неограничены одновременно. Таким образом, остается лишь применить схему доказательства теоремы 1.

Замечание 2. Нетрудно видеть, что если

$$\int_a^\infty p(x)^{-3/2} dx < +\infty, \quad (11)$$

то, при условии (10), функции $z_\pm(x, \lambda)$ могут быть заменены более простыми выражениями вида

$$\tilde{z}_\pm(x, \lambda) = p(x)^{-1/4} \exp\left(\pm \int p(x)^{1/2} dx \mp \frac{\lambda}{2} \int p(x)^{1/2} dx\right). \quad (12)$$

1.4. Ввиду ортогональности системы $\{y_k(x)\}$, из теоремы 1 следует, что ядро K , удовлетворяющее условиям (2), (5), (6) (при $a > -\infty$ а также условию (6')), формально представимо в виде

$$K(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} k_n y_n(x) y_n(t), \quad k_n = \text{const}, \quad x, t \in (a, \infty). \quad (13)$$

Поведение ряда (13) зависит от дополнительных условий на ядро K .

Дальнейшие построения будут основаны на следующей формальной схеме вычисления значений некоторого оператора \mathcal{K} , действующего на функциях $f(x)$, $x \in (a, \infty)$:

$$\mathcal{K} f = \int_a^\infty K(x, t) f(t) dt = \sum_{n=0}^\infty k_n y_n(x) \int_a^\infty f(t) y_n(t) dt. \quad (13')$$

По терминологии [2], \mathcal{K} является оператором "циркулянтного типа"

$$(\lambda \mathcal{I} - \mathcal{K}) f = \lambda f(x) - \int_a^\infty K(x, t) f(t) dt = \sum_{n=0}^\infty (\lambda - k_n) f_n y_n(x), \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad (14)$$

где \mathcal{I} - тождественный оператор, а $f_n = (f, y_n) = \int_a^\infty f(t) y_n(t) dt$. Мы будем использовать это обозначение для скалярного произведения, хотя в общем случае $f \notin L_2$.

В частности, разрешимость интегрального уравнения

$$(\lambda \mathcal{I} - \mathcal{K}) f = g(x), \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad x \in (a, \infty) \quad (15)$$

зависит от соотношений

$$(\lambda - k_n) f_n = g_n, \quad f_n = (f, y_n), \quad g_n = (g, y_n). \quad (15')$$

Если $\lambda \neq k_n$ при каком-либо n , то решение формально имеет вид $\sum f_n y_n$. Очевидно, что разрешимость уравнения (9) тесно связана с поведением коэффициентов k_n при $n \rightarrow \infty$. В частности, уравнение первого рода ($\lambda = 0$) формально устойчиво разрешимо, если $|k_n| \geq c > 0$ при каком-либо n ($c = \text{const}$). В противном случае можно предложить хорошо известную регуляризационную схему (см. [14]), сводящуюся к приближенному решению уравнения

$$\varepsilon f_1(x) + \int_a^\infty K_1(x, t) f_1(t) dt = \int_a^\infty \overline{K(t, x)} g(t) dt. \quad (16)$$

Здесь $\varepsilon > 0$, а K_1 - неотрицательно определенное ядро

$$K_1(x, t) = \int_a^\infty \overline{K(s, x)} K(s, t) ds. \quad (16')$$

В этом случае приближенное решение $f_1 = \sum f_{1n} y_n$ определяется из равенств

$$(\varepsilon + |k_n|^2) f_{1n} = \bar{k}_n g_n, \quad f_n = (g, y_n), \quad f_{1n} = (f_1, y_n).$$

Оптимальный выбор параметра ε зависит от требуемой точности и может быть произведен по стандартной схеме (см. [14]).

§2. РАЗЛОЖЕНИЕ ПО МНОГОЧЛЕНАМ ЛАГГЕРА

2.1. Ортогональная на $(0, \infty)$ система Лаггера имеет вид

$$\exp(-x/2)x^{\alpha/2} L_n^\alpha(x), \quad \alpha > -1, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (17)$$

где L_n^α - многочлены Лаггера

$$L_n^\alpha(x) = (n!)^{-1} x^{-\alpha} e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^{n+\alpha} e^{-x}). \quad (17')$$

Мы будем пользоваться несколько видоизмененной системой

$$\varphi_n(x) = c_n \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) x^{\alpha+1/2} L_n^\alpha(x^2), \quad c_n = \left(\frac{2n!}{\Gamma(n+\alpha+1)}\right)^{1/2}, \quad (18)$$

которая ортогональна на $(0, +\infty)$ и порождена (см. [9]) уравнением

$$\varphi_n'' + \left(4n + 2\alpha + 2 - x^2 + \frac{1/4 - \alpha^2}{x^2}\right) \varphi_n = 0, \quad (18')$$

т. е. здесь $p(x) = x^2 - \frac{1/4 - \alpha^2}{x^2}$. Условие (6) в этом случае приобретает вид

$$\left| \int_0^\infty K(x, t) \varphi_n(t) dt \right| \leq \varepsilon(x) x^{-2n-\alpha-\frac{1}{2}} \exp(-x^2/2),$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \varepsilon(x) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (19)$$

В частности, достаточно потребовать выполнения неравенства

$$\int_0^\infty |K(x, t)| t^{2n+\alpha+1/2} \exp(-t^2/2) dt \leq \varepsilon(x) x^{-2n-\alpha-1/2} \exp(x^2/2),$$

$$n = 0, 1, 2, \dots \quad (19')$$

Легко видеть, что последние условия довольно слабые.

Отметим, что если $\alpha = \pm 1/2$, то потенциал $p(x)$ не содержит сингулярностей, а $\{\varphi_n\}$ - соответствующая система Эрмита, ортогональная на $(-\infty, +\infty)$.

2.2. Для дальнейшего изложения важен нижеприведенный пример ядра, удовлетворяющего условиям теоремы 1 при $p(x) = x^2 - (0.25 - \alpha^2)/x^2$ (см. [9]):

$$\begin{aligned} K_1(x, t) &= (1 - z^2)^{-1} \exp\left(\frac{-x^2(x^2 + t^2)}{1 - z^2}\right) z^{-\alpha/2} \sqrt{xt} I_\alpha\left(2 \frac{z}{1 - z^2} xt\right) = \\ &= \exp(-(x^2 + t^2)/2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n! z^{2n} (xt)^{\alpha+1/2}}{\Gamma(n + \alpha + 1)} L_n^\alpha(x^2) L_n^\alpha(t^2) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} z^{2n} \varphi_n(x) \varphi_n(t), \quad |z| < 1, \end{aligned} \quad (20)$$

где $I_\alpha(\cdot)$ - модифицированная функция Бесселя.

В случае многочленов Эрмита ($\alpha = \pm \frac{1}{2}$) формула (20) переходит в хорошо известную формулу Мелера

$$K_2(x, t) = (1 - z^2)^{-1/2} \exp\left(\frac{2xtz}{1 - z^2} + \frac{z^2 + 1}{2(z^2 - 1)}(x^2 + t^2)\right) = \sqrt{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} z^n \varphi_n(x) \varphi_n(t), \quad (21)$$

справедливую для любого комплексного $z \neq 1$ (см. [9]). Здесь $\{\varphi_n\}$ - система Эрмита, ортогональная на $(-\infty, +\infty)$:

$$\varphi_n(x) = \frac{\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)}{\sqrt{n! 2^n \sqrt{\pi}}} H_n(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (21')$$

где $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2})$ - многочлены Эрмита.

Отметим, что если $z \neq \pm 1$, $|z| \geq 1$, то коэффициенты разложения (15) не стремятся к нулю. Следовательно (см. п. 1.4), в случае интегрального уравнения первого рода, в которое (15) переходит при $\lambda = 0$ и $K = K_1$ (или $= K_2$), оно устойчиво разрешимо без регуляризации.

2.3. В качестве другого примера рассмотрим ядро, не гладкое при $x = t$:

$$K_3(x, t) = \exp\left(-\frac{x^2 + t^2}{2}\right) \operatorname{Erfi}(\min(x, t)); \quad x, t \in \mathbb{R}^1, \quad (22)$$

где $\operatorname{Erfi}(x) = \int_0^x e^{s^2} ds$. Имеем (см. [9])

$$K_3(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_{2n+1}(x) \varphi_{2n+1}(t)}{2n+1}$$

где $\{\varphi_n\}$ – система Эрмита (21'). Нетрудно видеть, что при $p(x) = x^2$ это ядро удовлетворяет условиям замечания 1 к теореме 1.

Схема, данная в п. 1.4 позволяет решать уравнение второго рода с ядром λK_3 , где $\lambda = \text{const}$ (см. п. 4.1). Для численного решения уравнения первого рода необходима регуляризация (см. п. 1.4)

Отметим, что граничная задача ($y \in L_2(-\infty, \infty)$) для неоднородного уравнения Эрмита

$$y''(x) + (\lambda + 1 - x^2)y(x) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}^1 \quad (22')$$

переходит в интегральное уравнение вида $(I - \lambda K)y = f$ с ядром $K = \lambda K_3$ ($\lambda \in \mathbb{C}$). Это уравнение разрешимо при $\lambda \neq 2n + 1$ ($n = 0, 1, 2, \dots$).

§3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ГАНКЕЛЯ И ФУРЬЕ

3.1. Из (20) следует, что при $z = ir$ и $\text{Im}(r) = 0$ имеем

$$J_s \left(\frac{2r}{1+r^2} xt \right) = (1+r^2) \exp \left(\frac{is\pi}{2} \right) (xtr)^s \exp \left(-\frac{r^2(x^2+t^2)}{1+r^2} \right) \times \\ \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!(-r^2)^n}{\Gamma(n+k+1)} L_n^s(x^2) L_n^s(t^2), \quad (23)$$

где $J_s(\cdot)$ – бесселевы функции первого рода, а $r \in (0, 1)$. Пусть теперь $x = a\xi$ и $t = \frac{(1+r^2)\eta}{2ra}$ ($a > 0$). Тогда

$$J_s(\xi\eta) = \frac{(1+r^2)^{s+3/2}}{2^{s+1/2}} \xi^s \eta^s \exp \left(-\frac{r^2 a^2 \xi^2}{1+r^2} \right) \exp \left(-\frac{(1+r^2)\eta^2}{4a^2} \right) \times \\ \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!(-r^2)^n}{\Gamma(n+s+1)} L_n^s(a^2 \eta^2) L_n^s \left(\frac{(1+r^2)^2 \eta^2}{4r^2 a^2} \right). \quad (23')$$

Выражение (23') содержит два параметра (r и a). Применим это выражение для вычисления преобразования Ганкеля

$$h(f) = \int_0^{\infty} f(t) (tx)^{1/2} J_s(tx) dt, \quad x \geq 0. \quad (24)$$

Обычный подход к вычислению интегралов, зависящих от параметра, состоит из следующих этапов :

- а) выбор сеток $\{t_k\}$ и $\{x_p\}$ ($t_k, x_p \geq 0$, $k = 1, 2, \dots$, $n, p = 1, 2, \dots, m$);
- б) вычисление $h(f)(x_p)$ для $p = 1, 2, \dots, m$ на сетке $\{t_k\}$ посредством квадратурных формул;
- в) при необходимости, применение интерполяционных формул для $h(f)$ при $x \in \mathbb{R}^1$.

При больших требованиях на точность этап б) может быть реализован без предварительного выбора сетки $\{t_k\}$, посредством автоматического оптимального выбора точек дискретизации (см., напр., [10]).

В силу (23') имеет место разложение $h(f) = \sum h_n \psi_n$ по системе

$$\psi_n(x) = x^{s+1/2} \exp\left(-\frac{r^2 a^2}{1+r^2} x^2\right) L_n^s(a^2 x^2), \quad n = 0, 1, \dots, \quad (25)$$

$$h_n = \frac{n!(-r^2)^n}{\Gamma(n+s+1)} \int_0^\infty t^{s+1/2} \exp\left(-\frac{(1+r^2)t^2}{4a^2}\right) L_n^s\left(\frac{(1+r^2)^2}{4r^2 a^2} t^2\right) f(t) dt. \quad (25')$$

Нижеприводимые рассуждения показывают преимущества этого подхода :

1) Частичная сумма $\sum h_n \psi_n$ ($0 \leq n \leq N$) представляет приближенное значение $h(f)$ в явном виде :

$$h(f) \approx x^{s+1/2} \exp\left(-\frac{r^2 a^2}{1+r^2} x^2\right) P_N(x),$$

где P_N — многочлен порядка N , зависящий от $(N+1)$ коэффициентов.

2) Квадратурные формулы удобны для вычисления h_n по формуле (25'), ввиду наличия под интегралом быстро убывающего экспоненциального члена.

3) По той же причине $\{h_n\}$ могут быть вычислены для некоторых функций $f(x)$, не суммируемых в бесконечности, в то время, как $h(f)(x_p)$ вычислено для узкого класса функций, например, для $L_1(\mathbb{R}^1)$ или $L_2(\mathbb{R}^1)$. Это позволяет (см. ниже, §4) представить приближенно распределения $h(f)$, являющиеся производными локально интегрируемых (но, возможно, не гладких) функций.

4) Выбор параметров r и a позволяет применить адаптивный подход, т. е. учитывать дополнительную *априорную* информацию о свойствах $h(f)$ (см. п. 3.2 и §4).

Замечание 3. Ограничение $|r| < 1$ обеспечивает сходимость ряда в формуле (23). Тем не менее, для вычисления $h(f)$ это ограничение может быть снято, если ряд $\sum h_n \psi_n$ сходится. Формула (25') обеспечивает эту возможность как минимум для гладких функций $f \in L_2(\mathbb{R}^1)$, таких что

$$|f(x)| \leq \text{const} \exp\left(\frac{(1+r^2)x^2}{4a^2} - \varepsilon x\right), \quad \text{при любом } \varepsilon > 0.$$

3.2. Рассмотрим более детально случай эрмитовых многочленов. Из формулы (21), записанной для $z = ir$ ($\text{Im}(r) = 0$) получаем ($a > 0$)

$$e^{ixt} = (1+r^2)^{1/2} \exp\left(-\frac{a^2 r^2 x^2}{1+r^2}\right) \exp\left(-\frac{1+r^2}{4a^2} t^2\right) \times \\ \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ir/2)^n}{n!} H_n(ax) H_n\left(\frac{1+r^2}{2ar} t\right), \quad x, t \in \mathbb{R}^1; \quad a, r > 0. \quad (26)$$

Рассмотрим частные случаи. При $r = 1$ имеем

$$e^{ixt} = \sqrt{2} \exp\left(-\frac{a^2 x^2}{2}\right) \exp\left(-\frac{t^2}{2a^2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i/2)^n}{n!} H_n(ax) H_n(t). \quad (27)$$

При $a = \left(\frac{1+r^2}{2r}\right)^{1/2}$ получаем выражение, симметричное по x и t :

$$e^{ixt} = \sqrt{1+r^2} \exp\left(-\frac{rx^2}{2}\right) \exp\left(-\frac{rt^2}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ir/2)^n}{n!} H_n(ax) H_n(at). \quad (28)$$

Как следует из представления порождающей функции для эрмитовых многочленов, имеем (см. [9])

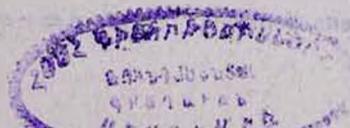
$$e^{ixt} = \exp(-t^2/2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} H_n(x) t^n. \quad (29)$$

Существенно, что (29) – предельный случай формулы (26) (при $r \rightarrow 0$).

Далее, приведем краткий анализ разложения (26) посредством преобразования Фурье по многочленам Эрмита. Формально имеем

$$\hat{f} = \sum_{n=0}^{\infty} (ir)^n f_n H_n(ax) \exp\left(-\frac{a^2 r^2 x^2}{1+r^2}\right), \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad (30)$$

где



$$f_n = \frac{\sqrt{1+r^2}}{2^n n!} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right) H_n(s) \left[f\left(\frac{2ar}{1+r^2}s\right) \exp\left(\frac{(1-r^2)s^2}{2(1+r^2)}\right) \right] ds, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (30')$$

Таким образом, коэффициенты f_n представлены посредством коэффициентов Эрмита функции

$$F(x) = \exp\left(\frac{1-r^2}{2(1+r^2)}x^2\right) f\left(\frac{2ar}{1+r^2}x\right).$$

Воспользовавшись следующей неулучшаемой глобальной оценкой для многочленов Эрмита (см. [9])

$$\begin{aligned} |H_{2n}(y)| &\leq \exp\left(\frac{y^2}{2}\right) 2^{2n} n! \left(2 - \frac{\Gamma(n+1/2)}{\Gamma(1/2)n!}\right), \\ |H_{2n+1}(y)| &\leq |y| \exp\left(\frac{y^2}{2}\right) 2^{2n+2} \frac{\Gamma(n+3/2)}{\Gamma(3/2)}, \quad y \in \mathbb{R}^1, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (31)$$

получим

$$\begin{aligned} \exp\left(-\frac{a^2 r^2}{1+r^2}x^2\right) |H_{2n}(ax)| &< 2^{2n+1} n! \exp\left(\frac{(1-r^2)a^2 x^2}{2(1+r^2)}\right), \\ \exp\left(-\frac{a^2 r^2}{1+r^2}x^2\right) |H_{2n+1}(ax)| &\leq 2^{2n+2} a \frac{\Gamma(n+3/2)}{\Gamma(3/2)} |x| \exp\left(\frac{(1-r^2)a^2 x^2}{2(1+r^2)}\right). \end{aligned} \quad (31')$$

Отсюда следует, что предположение $r \geq 1$ может быть удобно (особенно для негладких f), поскольку тогда рассматриваемый класс функций расширяется. При $r > 1$ слагаемые ряда (30) равномерно ограничены в \mathbb{R}^1 . При $r = 1$ (см. первое неравенство (31')) также равномерно ограничены слагаемые ряда преобразования Фурье. Случай, $r < 1$ предпочтительнее при убывающем f (см. рис. 3), когда требуется большая точность на ограниченном сегменте (см. §4).

Замечание 4. Функция $H_n(x)$ осциллирует только на интервале $|x| < \sqrt{2n}$ (см. [9]). Для урезанного ряда (30) интервал высокой относительной точности убывает при возрастании a . Тем самым, имеет смысл перейти к пределу в разложениях по первым p функциям системы Эрмита $\{\varphi_n(x)\}$ ($n \leq p$), например на сегменте $(0, \sqrt{2p}/a)$ (см. также нижеследующие п. п. 4.1 и 4.3).

Использование разложений по многочленам Лаггера или Эрмита для вычисления преобразований Фурье имеет предысторию. В. Ф. Эберлейном [12] была использована формула (28) при $a = r = 1$ в случае $xf(x) \in L_2(\mathbb{R}^1)$, $f'(x) \in L_2(\mathbb{R}^1)$. X.

Вебер [13] применил разложение преобразования Фурье по многочленам Лаггера и Эрмита по другой схеме, допускающей быстрое преобразование Фурье (FFT). Формула (29) была применена для вычисления преобразования Фурье посредством интегрирования только по первому переменному x (для подробностей см. [10], §3.94).

3.3. Сделаем некоторые замечания относительно вычисления коэффициентов $\{h_n\}$ в (25'). Как правило, при $n \gg 1$ интегрируемая функция быстро осциллирует, как в (24). Тем самым, стандартные пакеты программ для численного интегрирования могут привести к большим ошибкам или даже полностью отказать.

В случае гладкого $f(x)$ обычно эффективны следующие подходы :

- 1) применение квадратурных формул Гаусса – Лаггера – Эрмита (см. [10]);
- 2) развитие весовых формул для вычисления неосциллирующих интегралов

$$S_k = \int_0^{\infty} t^{s+1/2} \exp\left(-\frac{(1+r^2)t^2}{4a^2}\right) t^k f(t) dt, \quad (32)$$

при неосциллирующем f , и использование h_n как в (25') с (см. [9])

$$L_n^s(x) = \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n+s}{n-m} \frac{x^m}{m!}; \quad (32')$$

- 3) вычисление $\{S_k\}$ и $\{h_n\}$ по (32), (25') с использованием стандартных пакетов программ;
- 4) применение асимптотики многочленов Лаггера и Эрмита на бесконечности ([9]) для особых, весовых квадратурных формул.

В нижеследующем §4 в случае многочленов Эрмита мы применим подход 2).

§4. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Таблица и рисунки этого параграфа были выполнены с применением программного пакета MATHEMATICA [11].

4.1. Если K удовлетворяет условиям теоремы 1, то, согласно п. 1.4, в первую очередь необходимо вычислить коэффициенты k_n . С этой целью для каждого n выберем x_n так, чтобы $y(x_n) \neq 0$. Тогда (см. (13))

$$k_n = (y_n(x_n))^{-1} \int_a^\infty K(x_n, t) y_n(t) dt. \quad (33)$$

Рассмотрим, для конкретности, систему Эрмита $\{\varphi_n\}$ ($a = -\infty, p(x) = x^2$).

При $|x| \geq \sqrt{2n}$ функция $\varphi_n(x)$ не имеет нулей (см. замечание 4). Можно взять $x_n = \sqrt{2n}$. Более целесообразно использовать следующие формулы (см. [9]):

$$k_{2p} = (-1)^p \frac{p!}{(2p)!} \int_{-\infty}^\infty K(0, t) \varphi_{2p}(t) dt, \quad (33')$$

$$k_{2p+1} = \frac{(-1)^p p!}{2(2p+1)(2p)!} \int_{-\infty}^\infty K'_x(0, t) \varphi_{2p+1}(t) dt, \quad p = 0, 1, 2, \dots$$

Решение y уравнения

$$y(x) = \lambda \int_{-\infty}^\infty K(x, t) y(t) dt + f(x), \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad \lambda \neq k_n^{-1} \quad (n = 0, 1, \dots) \quad (34)$$

может быть аппроксимировано (см. (15), (15')) посредством суммы

$$y_p(x) = \sum_{n=0}^p \frac{f_n}{1 - \lambda k_n} \varphi_n(x). \quad (35)$$

Вычислим среднюю квадратичную ошибку на интервале $(0, l)$, ($l > 0$)

$$\varepsilon(l)^2 = \frac{1}{l} \int_0^l (y_p(x) - y(x))^2 dx. \quad (36)$$

Для проверки ядро $K = K_3(x, t)$ было выбрано (см. (22), (22')) имеющим разрывные производные на прямой $x = t$. Функция f правой части и точное решение y были выбраны следующим образом:

$$f(x) = \left[\frac{2x(2+x^2)}{(1+x^2)^2} - \arctan x - \frac{\pi}{2} \right] \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right), \quad y(x) = \frac{2x(2+x^2)}{(1+x^2)^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right). \quad (37)$$

Решение $y(x)$ является нечетной функцией. Средняя квадратичная ошибка $\varepsilon_p(l)$ на $(0, l)$ была вычислена по формуле (36).

Результаты численного эксперимента содержатся в таблице 1. Выбор $l = 4$ в первом столбце приводит к тому, что при $x > 4$ функция $y(x)$ практически равняется нулю.

Во втором столбце величина l связана с максимальным интервалом, где $\varphi(x)$ осциллирует (см. замечание 4). В третьем столбце имеется ввиду та же связь, но только для $p = 64$. В нашей задаче сходимость ряда (35) довольно медленная.

Таблица 1.

Средняя квадратичная ошибка $\epsilon_p(l)$, вычисленная по формуле (36) для решения уравнения (34) с данными (37).

p	$l = 4$	$l = 2^{\frac{p+2}{2}}$	$l = 2^{\frac{p}{2}}$
4	$1.6E-1$	$1.8E-1$	$9.2E-2$
8	$6.4E-2$	$6.3E-2$	$3.8E-2$
16	$1.6E-2$	$1.4E-2$	$9.8E-3$
32	$2.0E-3$	$1.5E-3$	$1.3E-3$
64	$1.0E-4$	$6.4E-5$	$6.4E-5$

4.2. Преобразование Ганкеля (24) вычислено на основе формулы (23'), урезанной по n :

$$\begin{aligned}
 h(f) &= \int_0^\infty \sqrt{xt} J_s(xt) f(t) dt \approx h_p(f) = \\
 &= (1+r^2)^{s+1/2} 2^{-s-1/2} x^{s+1/2} \exp\left(-\frac{r^2 a^2 x^2}{1+r^2}\right) \sum_{n=0}^p \frac{n!(-r^2)^n}{\Gamma(in+s+1)} L_n^s(a^2 x^2) \times \\
 &\times \int_0^\infty t^{s+1/2} \exp\left(-\frac{(1+r^2)t^2}{4a^2}\right) L_n^s\left(\frac{1+r^2}{4r^2 a^2} t^2\right) f(t) dt, \quad x \geq 0, p \geq 1. \quad (38)
 \end{aligned}$$

Выбрана следующая функция :

$$f_1(x) = J_{s-1}(x) x^{-1/2}, \quad x > 0. \quad (39)$$

Имеем (см. [9])

$$h(f_1)(x) = x^{1/2} \int_0^\infty J_{s-1}(t) J_s(xt) dt = \begin{cases} 0, & 0 < x < 1, \\ x^{1/2-s}, & x > 1. \end{cases} \quad (39')$$

Если $x \rightarrow 0$ (см. [9]) то $J_s(x) \approx 2^{-s} (\Gamma(s+1))^{-1} x^s$ и, тем самым, интеграл в (39') сходится для $s > 0$. Рассмотрены три случая : $s = 1.7$ ($h(f_1) \downarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$),

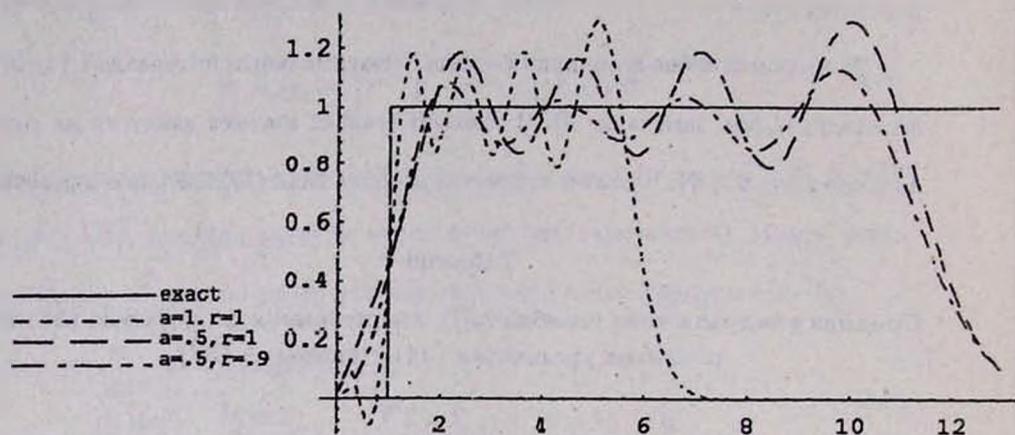


Рис. 1. Графики приближенного вычисления $h(f_1)$ (с разрывом в $x = 1$) по формуле (38) для $s = 0.5$ и $p = 8$.

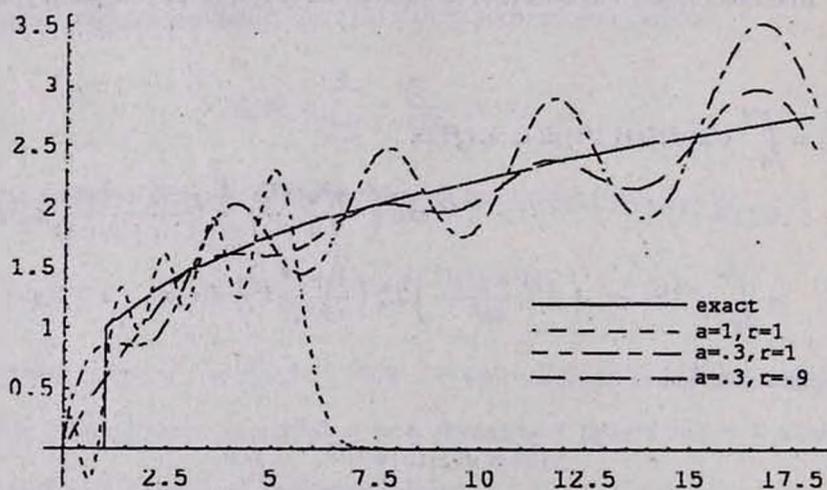


Рис. 2. Графики приближенных вычислений $h(f_1)$ (с разрывом в $x = 1$) по формуле (38) для $s = 0.15$ и $p = 8$.

$s = 0.5$ ($h(f_1) = 1$ при $x > 1$) и $s = 0.15$ ($h(f_1) \uparrow \infty$ если $x \rightarrow \infty$). Ниже даны результаты для последних двух случаев.

В рис. 1 и 2 иллюстрирован характер аппроксимации при $s = 0.5$ и $s = 0.15$. Отметим возможность адаптивного (посредством выбора a и γ) подхода, содержащего априорную информацию (например, основанную на физических соображениях) о поведении $h(f)$ при $x \rightarrow \infty$.

В рассматриваемом случае асимптотическое поведение $f_1(x)$ позволяет предсказать характер гладкости $h(f_1)$, а из поведения $f_1(x)$ при $x \rightarrow 0$ следует, что $h(f_1)$ не может убывать слишком быстро (см. также нижеследующее замечание 5). Как видно из рис. 1 и 2, если мы интересуемся относительно малой окрестностью точки $x = 0$, то лучше брать $a > 1$. Если необходимо аппроксимировать функцию на возможно большем интервале, то лучше брать $a < 1$. Если $s = 0.15$, а $h(f_1)(x)$ стремится к бесконечности при $x \rightarrow \infty$, то особенно эффективны меньшие значения a (см. нижеследующее замечание 5). Оба приведенных графика ясно демонстрируют, что уменьшение параметра γ приводит к более гладкой аппроксимации. Далее (этого на рис. 1, 2 не показано), при $x > 20$ вариация аппроксимируемой функции резко возрастает в согласии с оценками (31'). В случае $s = 1.7$ ситуация аналогична, однако, ввиду убывания $h(f_1)$ при $\gamma \geq 1$, аппроксимации имеют глобальный характер.

4.3. Анализ вычислений преобразования Фурье по схеме пункта 3.2 был произведен более подробно. В классической теории обычно оперируют изоморфизмом $L_2(\mathbb{R}^1) \longleftrightarrow L_2(\mathbb{R}^1)$ задаваемом преобразованием Фурье

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} f(t) dt. \quad (41)$$

Во многих задачах применяется также алгебра Винера, состоящая из непрерывных функций \hat{f} , соответствующих $f \in L_1(\mathbb{R}^1)$. Численные задачи в основном рассматриваются в этих случаях.

Теория распределений ([13]) позволяет использовать преобразования Фурье \hat{f} функций $f \in L_{loc}$ полиномиального роста в бесконечности. Однако, их численные

аспекты, насколько нам известно, ранее не были рассмотрены.

Ниже дано приближенное вычисление преобразований Фурье \hat{f} посредством урезанной формулы (26) ($p \geq 0$).

$$\hat{f} \approx \sqrt{\frac{1+r^2}{2\pi}} \exp\left(-\frac{a^2 r^2 x^2}{1+r^2}\right) \sum_{n=0}^p \frac{\left(\frac{ix}{2}\right)^n}{n!} H_n(ax) \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{1+r^2}{4a^2} t^2\right) H_n\left(\frac{1+r^2}{2ar} t\right) f(t) dt, \quad p \geq 0. \quad (42)$$

Для избежания вычислений с комплексными числами и для графического изображения решения был произведен численный эксперимент для сов-преобразования

$$Cs(f)(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \cos(xt) f(t) dt, \quad x \geq 0 \quad (43)$$

на основе следующей формулы, являющейся следствием (42) ($\text{Im}(f) = 0$):

$$Cs(f) \approx \sqrt{\frac{2(1+r^2)}{\pi}} \exp\left(-\frac{a^2 r^2 x^2}{1+r^2}\right) \sum_{n=0}^p \frac{\left(-\frac{r^2}{4}\right)^n}{(2n)!} H_{2n}(ax) \times \\ \times \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{1+r^2}{4a^2} t^2\right) H_{2n}\left(\frac{1+r^2}{2ar} t\right) f(t) dt. \quad (43')$$

Отметим, что в 4.1. фактически вычислено преобразование Фурье функции $x^{-1} \cos x$ при $s = 1/2$, а эта функция не суммируема в окрестности нуля.

Замечание 5. Будем говорить, что функция $f(x)$ гладкая, если четное разложение f на $(-\infty, \infty)$ принадлежит классу $C^k(-\infty, \infty)$, $k \gg 1$. Выбор параметров r и a произведен на основе следующих простых соображений: для более гладких f скорость убывания \hat{f} в бесконечности больше. Тем самым, предпочтительно увеличить параметр $a^2 r^2 / (1+r^2)$ в формуле (43'). Наоборот, если f обладает сингулярностями, то лучше брать этот параметр меньшим. Убывание r^{2n} приводит к более гладкому изменению графика (роль первых гармоник возрастает).

Преобразование $Cs(f)$ было приближенно вычислено по формуле (43') для

следующих функций и их точных cos-преобразований :

$$\begin{aligned}
 f_2(x) &= \frac{\sin 0.25x}{x} - \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(1.5(x-8))}{x-8} + \frac{\sin(1.5(x+8))}{x+8} \right), \\
 f_3(x) &= a(x) - b(x), \\
 a(x) &= \begin{cases} \sqrt{\frac{\pi}{2}}, & x \leq 0.25, \\ 0, & x > 0.25, \end{cases} \\
 b(x) &= \begin{cases} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cos 8x, & x \leq 1.5, \\ 0, & x \geq 1.5, \end{cases} \\
 f_3(x) &= Cs(f_2(x)), \quad Cs(f_3)(x) = f_2(x), \quad f_4(x) = 1.
 \end{aligned} \tag{44}$$

Функции f_2 и f_3 являются cos-преобразованиями Фурье друг друга. При медленном росте f_2 функция $Cs(f_2) = f_3$ не может быть очень гладкой. С другой стороны, функция f_2 целая, тем самым, $Cs(f_2) = f_3$ быстро убывает. Функция f_2 - экспоненциального типа 1.5 и поэтому $f_3(x) \equiv 0$ при $x > 1.5$. С другой стороны, функция f_3 разрывна. Поэтому ясно, что $Cs(f_3) = f_2$ будет медленно убывающей.

Можно *априори* прийти к заключению, что для приближенного вычисления $Cs(f_2)$ лучше брать $a > 1$, и $a < 1$ для $Cs(f_3)$. Что касается выбора $r < 1$, см. замечание 6. Рис. 3 и 4 подтверждают эффективность такого подхода.

На рис. 5 показано приближенное представление δ -функции при $a > 1$ и $r = 1$. Отметим, что из классической формулы

$$Cs(f_4)(x) = \lim_{A \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^A \cos(xt) dt \tag{45}$$

следует, что

$$Cs(f_4)(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^A \cos(xt) dt = \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin Ax}{x}. \tag{45'}$$

График правой стороны (45') интенсивно осциллирует при $A \gg 1$ и, тем самым, приближенное вычисление, основанное на $\frac{\sin Ax_k}{x_k}$ ($0 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n$) может привести к большой ошибке.

На рис. 6 представлены результаты такого подхода. Значения функции (45') на сетке $\{\frac{4k}{n}\}$ точны. Значение $A = 11.3$ выбрано так, чтобы (45') при $x = 0$

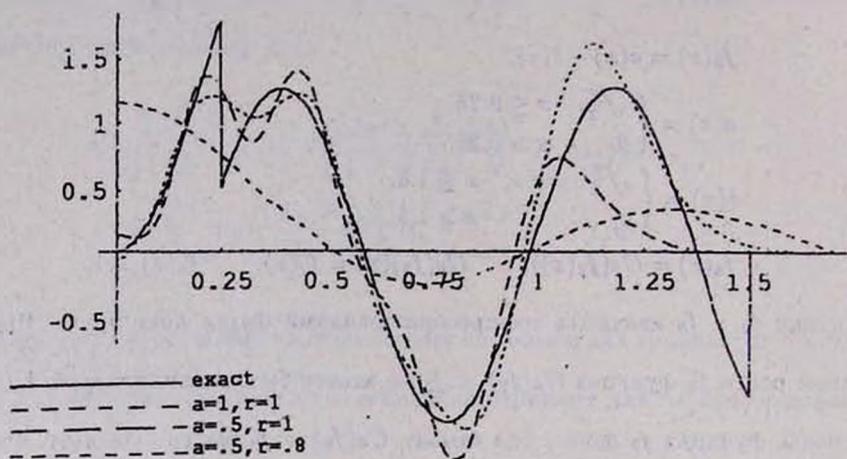


Рис. 3. График приближенного вычисления преобразования $Cs(f_2) = f_3$ при $p = 6$. Функция f_3 разрывна (см. (43')) в точках $x = 0.25$ и $x = 1.5$.

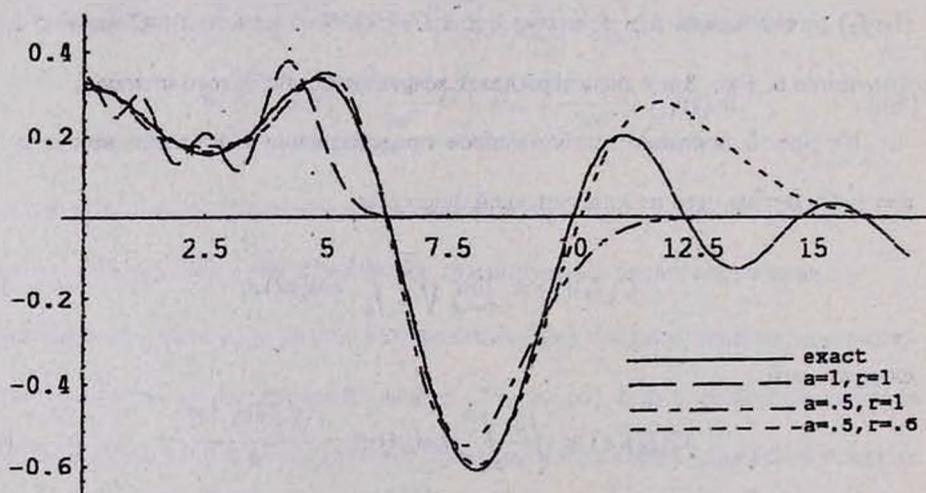


Рис. 4. График приближенного вычисления преобразования $Cs(f_3) = f_2$ при $p = 6$ (см. (43')).

имело приблизительно то же значение, что имеет функция "получше" на рис. 5, определенная вычислением семи интегралов.

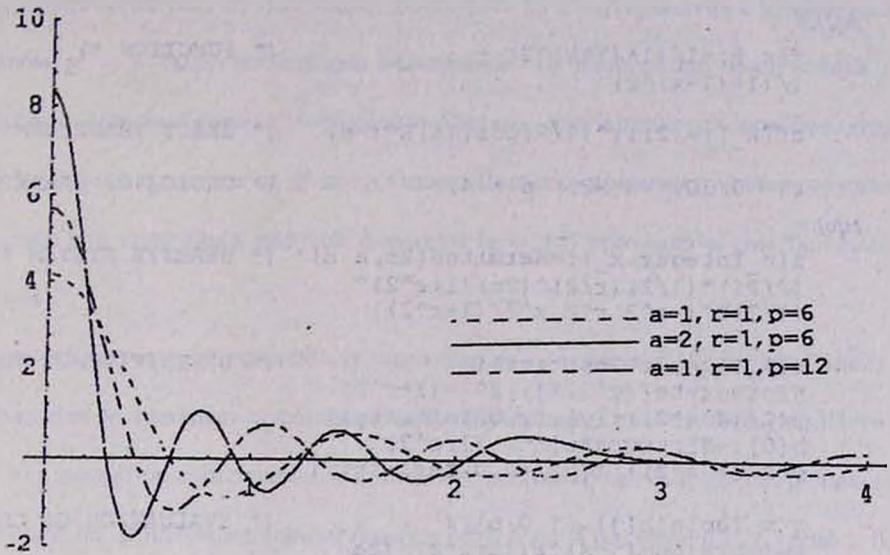


Рис. 5. График приближенного вычисления дельта-распределения $\frac{1}{2}\delta(x) = Cs(f_1(x))$ при $p = 6$ и $p = 12$.

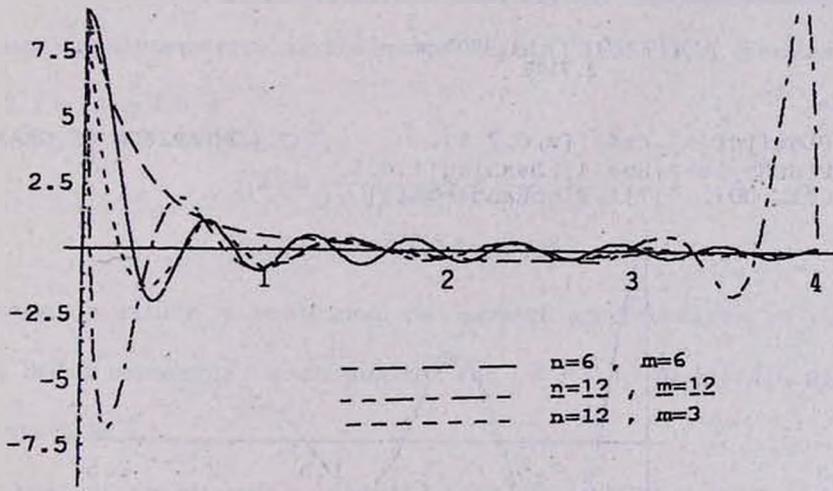


Рис. 6. Приближенное вычисление распределения $Cs(1) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\delta(x)$ по (45') при $A = 11.3$ на равномерной сетке $\{\frac{4k}{n}\}$ ($k = 0, 1, \dots, n$), с последующей интерполяцией многочленом порядка m .

Кривая менее сходная с δ -функцией, чем представленная на рис. 5, была

■ FOURIER COSINE TRANSFORM

In[1]:=

```
f[x_]:=1/(1+(7+x)^2) +
1/(1+(7-x)^2)
```

(* FUNCTION *)

```
cf[x_]:= (2Pi)^(1/2) Cos[7x] E^(-x)
```

(* EXACT TRANSFORM *)

```
r = 9/10; a = 2; p = 4;
```

(* CHOICE OF PARAMETERS *)

Out[5]:=

```
b[n_Integer, x_]:= HermiteH[2n, a x]^* (* HERMITE SYSTEM *)
(2/Pi)^(1/2) (r/2)^(2n) (1+r^2)^
(1/2) E^(-a^2 r^2 x^2/(1+r^2))
```

```
b[j_Integer?Positive]:=
NIntegrate{(y^(2*j)) E^(-(1+r^2)
y^2/(4 a^2)) f[y], {y, 0, Infinity}}
b[0]:=NIntegrate{E^(-(1+r^2)
y^2/(4 a^2)) f[y], {y, 0, Infinity}}
```

(* DEFINITION OF COEFFICIENTS *)

```
v = Table[b[j], {j, 0, p}];
w = Table[Sum[(-4)^k ((1+r^2)/(2a
r))^(2k) v[[k+1]] / ((n-k)!(2k)!),
{k, 0, n}], {n, 0, p}];
```

(* EVALUATION OF COEFFICIENTS *)

```
csf = N[Together[Sum[h[n, x]
w[[n+1]], {n, 0, p}]], 5]
```

(* APPROXIMATE TRANSFORM *)

Out[14]=

$$\frac{2.0309 - 40.791 x^2 + 114.9 x^4 - 90.73 x^6 + 19.937 x^8}{2.7183 + 1.7901 x^2}$$

In[15]:=

```
Plot[{cf[x], csf}, {x, 0, 2.5},
PlotStyle->{Hue[1], Dashing[ {.015,
.01, .007, .01}]}, PlotRange->All]
```

(* COMPARISON OF GRAPHICS *)

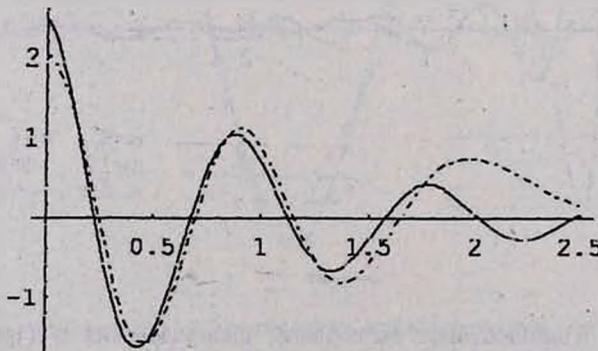


Рис. 7. Приближенное сов-преобразование Фурье, задаваемое формулой (43'), методом 2), п. 3.3 при $a = 2$, $r = 0.9$, $p = 4$.

получена вычислением семи интегралов ($n = 6, p = 6$) и полиномиальной

интерполяцией на рис. 6. Для числа точек $p = 12$ и интерполяции кубическим сплайном $p = 3$ было необходимо вычисление 13 интегралов. Полученная в результате кривая ближе к δ -функции. Однако, эта кривая не записывается одной формулой и зависит от 48 постоянных. Попытка применить интерполяцию Лагранжа для получения простой формулы ($p = 12$) приводит к еще большим ошибкам.

При возрастании A вычисления, основанные на формуле (45) должны производиться для интенсивно осциллирующего интеграла. Одного этого уже достаточно для значительных ошибок. В нашем случае (см. пункт 3.3) это затруднение было обойдено. При традиционном подходе (45), если A большое и $x \geq \text{const} > 0$, то можно получить любую функцию с графиком в зоне $|y| < \sqrt{\frac{2}{\pi}} 1/x$. В то же время применение (44') приводит к согласованным результатам (см. рис. 5).

4.4. На вышеприведенном рис. 7 показан результат приближенного вычисления сов-преобразования и графического сравнения с точным преобразованием, полученным применением стандартной программы MATHEMATICA. В этом примере $a = 2$, $r = 0.9$, $p = 5$, и

$$f(x) = \frac{1}{1 + (7 + x)^2} + \frac{1}{1 + (7 - x)^2}, \quad (46)$$

$$Cs(f)(x) = \sqrt{2\pi} e^{-x} \cos(7x).$$

Согласно замечанию 4, необходимо рассмотреть аппроксимацию на сегменте $[0, 2]$. Выбор параметра r не оптимален: для $1 \leq r \leq 1.1$ результаты лучше, см. замечание 5.

Отметим, что на компьютере IBM DX/33 MHz/ 8 MB/ это вычисление приближенного сов-преобразования заняло примерно 14 секунд. Построение графиков требует примерно 3.5 секунд.

ABSTRACT. Integral operators with kernels satisfying certain second order partial differential equation are studied. The purpose is to find conditions when these operators are of "circulant type". The partial differential

equation is closely connected with self-adjoint singular Sturm - Liouville problem with point spectrum. A calculation scheme for such operators and their resolvents is developed. The cases associated with orthogonal Laguerre and Hermite polynomials are studied in some detail. In particular, adaptive calculation methods for Hankel and Fourier transforms are suggested. The paper contains numerical results.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. А. Б. Персесян, "О структуре резольвент некоторых интегральных операторов с ядрами, определяемыми дифференциальными уравнениями", ДАН СССР, т. 30, № 3, стр. 727 — 732, 1984.
2. А. Б. Персесян, "Об эффективном численном решении интегральных уравнений", Изв. АН Армении, Математика, т. 27, № 2, стр. 3 — 63, 1992.
3. А. Б. Персесян, М. Абду, Ш. А. Багдасарян, "Новое быстро решаемое интегральное уравнение" ДАН Армении, т. 92, № 4, стр. 168 — 174, 1991.
4. А. Г. Камалян, А. Б. Персесян, "Об обращении интегральных операторов с почти разностно-суммарным ядром", Изв. АН Армении, Математика, т. 19, № 3, стр. 181 — 218, 1984.
5. А. Г. Камалян, И. Г. Хачатрян, А. Б. Персесян, "Разрешимость интегральных уравнений с операторами типа \mathcal{L} -свертки", Изв. АН Армении, Математика, т. 29, № 6, стр. 31 — 81, 1994.
6. E. C. Titchmarsh, *Eigenfunctions Expanses Associated with Second Order Differential Equations*, vol. 1, 2, Oxford, Clarendon Press, 1946.
7. А. К. Молчанов, "Об условии дискретизации спектров самосопряженных дифференциальных уравнений второго рода", Труды Моск. матем. общества, 1, стр. 169 — 199, 1953.
8. F. W. J. Olver, *Asymptotics and Special Functions*, N. Y., L., Academic Press, 1974.
9. H. Bateman, A. Erdelyi, *Higher Transcendental Functions*, vol. 2, McGraw-Hill book Company, 1953.
10. P. J. Davis, P. Rabinowitz, *Methods of Numerical Integration*, Academic Press, 1984.
11. S. Wolfram, *Mathematica : A System for Doing Mathematics by Computer*, 2nd ed., Addison-Wesley, Redwood City, CA, 1991.
12. W. F. Eberlein, "A New Method for Numerical Evaluation of the Fourier Transform", *Journal of Math. Analysis and Appl.*, vol. 65, pp. 80 — 84, 1978.
13. H. Weber, "Numerical Computation of the Fourier Transform Using Laguerre Functions and Fast Fourier Transform", *Numer. Math.* vol. 36, pp. 197 — 209, 1981.
14. А. Тихонов, К. Арсенин, *Методы решения некорректных задач*, Москва, Наука, 1979.

15 декабря 1995

Институт математики
Национальной Академии Наук Армении