О ПРИНЦИПЕ МАКСИМУМА СУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Р. Ш. Саакян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 29, № 5, 1994

ВВЕДЕНИЕ

Пусть B – область в $\overline{C}$, а функция u субгармонична в B. Полагая, что

$$u(\xi) = \overline{\lim_{z\to\xi}} u(z) \quad \text{для} \quad \xi \in \partial B,$$

зададимся вопросом : для каких подмножеств $E \subset \partial B$ из оценки

$$\sup_{\xi \in \partial B \setminus E} u(\xi) \leq M < +\infty \tag{1}$$

следует, что

$$u(z) \leq M, \quad z \in B. \tag{2}$$

Отметим, что классический принцип максимума соответствует случаю $E = \emptyset$. Из одного замечания Н. У. Аракеляна [1] следует, что принцип максимума сохраняет силу при $u = |f|$, где f – целая функция, если множество $E = \{\infty\}$ недостижимо из $B = C$ (определение дано ниже). В предположении, что u – непрерывная функция, автором [2] показано, что принцип максимума справедлив для компактных множеств $E \subset \partial B$, недостижимых из B. В [3] получены результаты для областей $B \subset \mathbb{R}^n$.

В настоящей заметке предлагается следующий, более общий вариант принципа максимума.

Теорема. *Пусть u – произвольная функция, субгармоническая в области $B \subset \overline{C}$. Условие (1) влечет (2) тогда и только тогда, когда $E \subset \partial B$ не содержит достижимых из B компактных подмножеств.*

Напомним, что множество $F \subset \overline{C} \setminus \Omega$ называется *достижимым* из открытого множества $\Omega \subset \overline{C}$, если существует непрерывная кривая $\Gamma \subset \Omega$, соединяющая некоторую точку $z_0 \in \Omega$ с множеством F. Последнее означает, что $\Gamma = \gamma([0,1))$, где γ – непрерывное (в сферической метрике ρ) отображение отрезка $[0,1)$ в Ω такое, что $\gamma(0) = z_0$ и $\rho(\gamma(t), F) \to 0$ при $t \to 1$. В противном случае множество F называется недостижимым из Ω.

§1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ЛЕММЫ

Лемма 1. *Пусть Ω – область в $\overline{C}$, а γ – непрерывное отображение отрезка $[0,1)$ в Ω, соединяющее точку $z_0 \in \Omega$ с $\partial\Omega$. Тогда множество $E = \overline{\gamma([0,1))} \setminus \gamma([0,1))$ связно.*

Доказательство. Полагая $E_n = \overline{\gamma([1-\frac{1}{n},1))}$, будем иметь что E_n связно и что $E = \bigcap_1^\infty E_n$.

Лемма 2. *Пусть e – компакт, состоящий из недостижимых граничных точек B. Тогда гармоническая мера $\omega(z, e, B)$ множества e относительно B равна нулю.*

Доказательство. Пусть функция $z = z(\omega)$ конформно и однозначно отображает единичный круг на поверхность наложения B^∞ области B. Если $e \neq \emptyset$, то можно доказать, что $z(\omega)$ – функция ограниченного вида. По теореме Р. Неванлинны (см. [4], стр. 214) для этого достаточно показать, что ∂B содержит невырожденный континуум. В самом деле, полагая $\xi_0 \in e$, $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty \subset B$ и $\xi_n \to \xi_0$, можно построить непрерывную кривую $\Gamma \subset B$ такую, что $\xi_n \in \Gamma$ $(n \geq 1)$, и соединяющую ξ_1 с ∂B. Поскольку точка ξ_0 недостижима из B, то $\overline{\Gamma} \setminus \Gamma$ не сводится к точке, и $\overline{\Gamma} \setminus \Gamma$ – континуум в силу леммы 1. Далее, по теореме Фату (см. [4], стр. 210) на подмножестве F_ω единичной окружности, с мерой 2π, функция $z(\omega)$ имеет конечные угловые, а следовательно и радиальные граничные значения. Продолжим функцию $z = z(\omega)$ на F_ω, полагая ее равной своим радиальным пределам, и обозначим множество этих значений через F_z. Ясно, что точки множества F_z достижимы из B. Заметим также, что F_z, являясь множеством типа $F_{\delta\sigma}$ (см. [5], стр. 320), измеримо по Борелю. Следовательно F_z – гармонически измеримо.

Гармоническая мера $\omega(z, \partial B \setminus F_z, B)$ обращается в нуль "почти всюду" на граничном множестве F_z (см. [5], стр. 111). Точнее, существуют множества F_z' и F_z'' такие, что $F_z = F_z' \cup F_z''$, емкость F_z'' равна нулю и $\omega(z, \partial B \setminus F_z, B) = 0$ при $z \in F_z'$. Обозначим, соответственно, через F_w' и F_w'' прообразы множеств F_z' и F_z''. Тогда $F_w = F_w' \cup F_w''$. Из одной теоремы Р. Неванлинны (см. [4], стр. 211) следует, что линейная мера F_w'' равна нулю. Тем самым, линейная мера F_w' равна 2π. Из сказанного следует, что ограниченная, гармоническая в единичном круге функция

$$u(w) = \omega(z(w), \partial B \setminus F_z, B)$$

имеет нулевые граничные значения на множестве F_w' меры 2π. По обобщенному принципу максимума отсюда следует, что $u \equiv 0$ в единичном круге, так что

$$\omega(z, \partial B \setminus F_z, B) = 0 \quad \text{при} \quad z \in B.$$

Наконец, так как $e \subset \partial B \setminus F_z$, то $\omega(z, e, B) = 0$ при $z \in B$, и лемма доказана.

Следствие. Пусть e – компактное подмножество ∂B, недостижимое из области $B \subset \overline{C}$. Тогда $\omega(z, e, B) = 0$.

Лемма 3. *Пусть функция u субгармонична в ограниченной области $B \subset C$. Существует функция v, непрерывная и субгармоническая в B и такая,* что

$$u(z) \le v(z), \quad z \in B, \tag{3}$$

$$u(\xi) = v(\xi), \quad \xi \in \partial B. \tag{4}$$

Доказательство. Для произвольных натурального n и комплексного α рассмотрим систему прямых $x = \operatorname{Re}\alpha + p2^{-n}$ и $y = \operatorname{Im}\alpha + q2^{-n}$ $(p, q = 0, \pm1, \pm2, \ldots)$, разбивающих плоскость на равные замкнутые квадраты, со сторонами длины 2^{-n}. Назовем их квадратами ранга n.

Пусть $\{K^{\alpha}_{1,j}\}_{j=1}^{m_1}$ $(m_1 < \infty)$ – все квадраты первого ранга, лежащие в области B. Полагая квадраты ранга l $\{K^{\alpha}_{l,j}\}_{j=1}^{m_l}$ $(l < n-1,\ m_l < \infty)$ выбранными, обозначим через $\{K^{\alpha}_{n,j}\}_{j=1}^{m_n}$ $(m_n < \infty)$ все квадраты ранга n, лежащие в области $B \setminus \bigcup_1^{n-1}\bigcup_1^{m_n} K^{\alpha}_{l,j}$. Продолжая процесс построения, получим $B = \bigcup_1^{\infty}\bigcup_1^{m_n} K^{\alpha}_{n,j}$. Всю систему квадратов $K^{\alpha}_{n,j}$, лежащих в B, обозначим через $K[\alpha]$.

Выберем теперь комплексные числа $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ так, чтобы числа $\operatorname{Re}(\alpha_j - \alpha_i)$ и $\operatorname{Im}(\alpha_j - \alpha_i)$ были иррациональными для $1 \le i < j \le 3$. Полагая $u_0 = u$, последовательно определим субгармонические в B функции u_1, u_2, u_3 : при любом $m \le 1$ будем полагать, что в каждом квадрате $K \in K[\alpha_m]$, u_m – решение задачи Дирихле с граничными значениями u_{m-1} на ∂K. Очевидно $u_m \ge u_{m-1}$ в B и

$$u_m(z) \le \max_{w\in K} u_{m-1}(w) \quad \text{при} \quad z \in K. \tag{5}$$

Пусть теперь $\xi \in \partial B$ и $z_n \in B$, $z_n \to \xi$. Существуют последовательность квадратов $\{K_n\}_1^{\infty} \subset K[\alpha_m]$ таких, что $z_n \in K_n$, и последовательность $\{w_n\}_1^{\infty}$ точек $w_n \in K_m$ такая, что

$$u_{m-1}(w_n) = \max_{w\in K_n} u_{m-1}(w), \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Так как диаметры квадратов K_n убывают к нулю, когда K_n стремится к ∂B, то $w_z \to \xi$ при $n \to \infty$. Поэтому, в силу (5)

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, u_m(z_n) \le \overline{\lim_{n\to\infty}}\, u_{m-1}(w_n) \le u_{m-1}(\xi).$$

Отсюда следует, что $u_m(\xi) \le u_{m-1}(\xi)$, $\xi \in \partial B$. Поскольку $u_m(z) \ge u_{m-1}(z)$ для $z \in B$, получаем, что $u_m(\xi) = u_{m-1}(\xi)$ для $\xi \in \partial B$.

Заметим, что функция u_1 непрерывна в B вне границ квадратов системы $K[\alpha_1]$. Следовательно, функция u_2 непрерывна всюду вне точек пересечения границ квадратов из $K[\alpha_1]$ и $K[\alpha_2]$. Это множество точек не пересекается с границами квадратов из $K[\alpha_3]$. Таким образом, функция u_3 непрерывна в B, и полагая $v = u_3$, получаем, что $v(\xi) = u_2(\xi) = u_1(\xi) = u(\xi)$ при $\xi \in \partial B$. Лемма доказана.

§2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ

Достаточность. Из условий теоремы следует, что граница области B содержит континуум. Поэтому достаточно рассмотреть случай, когда B – ограниченная область. Сначала проведем доказательство, полагая функцию u *непрерывной* в B. При этом, будем пользоваться некоторой модификацией рассуждений доказательства теоремы Иенсена (см. [6], стр. 205).

Рассмотрим открытое множество

$$B_\alpha = u^{-1}\left[(\alpha, +\infty)\right], \quad \alpha \geq M.$$

Если утверждение теоремы не верно, то $B_M \neq \emptyset$. Докажем, что если $B_{\alpha'} \neq \emptyset$ при $\alpha' \geq M$ и $\Omega_{\alpha'}$ – связная компонента множества $B_{\alpha'}$, то $E_{\alpha'} = \partial\Omega_{\alpha'} \cap E \neq \emptyset$, и функция u не ограничена сверху в $\Omega_{\alpha'}$. Отсюда будет следовать, что для любого $\alpha > \alpha'$ множество $\Omega_{\alpha'}$ содержит некоторую связную компоненту B_α (например, Ω_α) такую, что $E_\alpha = \partial\Omega_\alpha \cap E \neq \emptyset$. В самом деле, если $E_{\alpha'} = \emptyset$, то $\partial\Omega_{\alpha'} \subset \subset (\partial B \backslash E) \cup B$, и применяя к $\Omega_{\alpha'}$ (с учетом (1)) классический принцип максимума, получили бы, что $u(z) \leq \alpha'$ при $z \in \Omega_{\alpha'}$. Последнее противоречит определению $\Omega_{\alpha'}$. Тем самым, $E_{\alpha'} \neq \emptyset$. Поскольку множество $E_{\alpha'}$ компактно и недостижимо из $\Omega_{\alpha'}$, то в силу следствия из леммы 2 заключаем, что $\omega(z, E_{\alpha'}, \Omega_{\alpha'}) = 0$. Если бы функция u была ограничена сверху в $\Omega_{\alpha'}$, то по обобщенному принципу максимума (см. [7], стр. 70) получили бы, что $u(z) \leq \alpha'$ в $\Omega_{\alpha'}$. Это тоже противоречит определению $\Omega_{\alpha'}$.

Из непрерывности u следует, что $u(\xi) = \alpha$ для $\xi \in \partial\Omega_\alpha \setminus E$. Тем самым, $\partial\Omega_\alpha \cap (\partial B \setminus E) = \emptyset$ для $\alpha > M$.

Таким образом, полагая $B_M \neq \emptyset$, можем фиксировать некоторую последовательность $\{\Omega_n\}_{n=m}^{\infty}$ ($m \geq M$, $\Omega_{n+1} \subset \Omega_n$) компонент множеств B_n, а также последовательность $\{z_n\}_{n=m}^{\infty}$, $z_n \in \Omega_n$.

Пусть V – произвольная окрестность множества E'_α. Ясно, что существует такой номер N, что для всех $n > N$ имеем $\Omega_n \subset V' = V \cap \Omega_N$. Пусть γ_n – жорданова дуга, соединяющая z_n с z_{n+1} в Ω_n. Полагая $\Gamma = \cup_{N+1}^{\infty}\gamma_n$, имеем $\Gamma \subset \subset V'$. Далее, Γ соединяет z_0 с компактным множеством $e'_{\alpha_0} \subset e_0$, а это противоречит условиям теоремы. Таким образом, для непрерывных субгармонических функций достаточность нами доказана.

Пусть теперь u – произвольная субгармоническая в B функция. По лемме 3 можно построить непрерывную субгармоническую функцию v, для которой в силу (4) выполнено условие (1). Тем самым, ввиду доказанного выше, $v(z) \leq M$ при $z \in B$. С учетом (3) достаточность теперь полностью доказана.

Необходимость. Пусть e' – компактное подмножество e, достижимое из B, а Γ – непрерывная кривая, соединяющая некоторую точку области B с множеством e'. Обозначим через $\{K_\xi\}$, $\xi \in \Gamma$, систему кругов с центрами в точках $\xi \in \Gamma$ и радиусами R_ξ такими, что $R_\xi \to 0$ при $\xi \to e$ и $\Gamma \subset \cup K_\xi \subset B$. Обозначим через D связную компоненту открытого множества $\overline{C} \setminus e'$, содержащую B, и положим $F = \Gamma \cup (D \setminus \cup K_\xi)$. Легко видеть, что множество F удовлетворяет условиям теоремы Аракеляна (см. [8], теорему 1).

Предположим, что g – непрерывная функция на F, обращающаяся в ноль на $D \setminus \cup K_\xi$, и такая, что $g(z) \to \infty$ при $z \to e$. В силу теоремы Аракеляна существует функция $f \in H(D)$ такая, что

$$|f(z) - g(z)| < 1 \quad \text{при} \quad z \in E.$$

Взяв $u = |f|$ заключаем, что для любая точка из $\partial B \setminus e$ обладает окрестностью, где $u(z) < 1$. Одновременно, эта функция не ограничена сверху на Г. Этим доказательство теоремы завершено.

В заключение выражаю благодарность профессору Н. У. Аракеляну за постановку задачи и ценные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. N. U. Arakelian, "Approximation complexe et proprietes des fonctions analytiques", Actes Congres Intern. Math., t. 2, pp. 595 – 600, 1970.
2. Р. Ш. Саакян, "Об одном обобщении принципа максимума", Известия АН Арм. ССР, Математика, т. 22, № 1, стр. 94 – 102, 1987.
3. Chen Huaihui, P. M. Gauthier, "A maximum principle for subharmonic and plurisubharmonic functions", Canad. Math. Bull., vol. 35(1), pp. 34 – 39, 1992.
4. Р. Неванлинна, Однозначные аналитические функции, М – Л, ГИТТЛ, 1941.
5. M. Tsuji, Potential Theory in Modern Function Theory, Maruzen Co., Tokio, 1959.
6. В. Хейман, П. Кеннеди, Субгармонические функции, Москва, Мир, 1980.
7. W. J. Fuchs, Topics in the Theory of Functions of One Complex Variable, F. Van Hostand Company INC, Prinston N.J., t. 2.
8. Н. У. Аракелян, "Равномерные и касательные приближения аналитическими функциями", Известия АН Арм. ССР, Математика, т. 3, № . 4 – 5, стр. 273 – 285, 1968.

26 января 1994

Институт математики
Национальной Академии Наук Армении