ПРИНЦИП ГЮЙГЕНСА И НЕЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Г. Г. Казарян, А. О. Оганесян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 29, №5, 1994

В статье исследовано стационарное уравнение Шредингера с потенциалом $q(x)$. Рассматриваемый класс функций $q(x)$ определяется условием, что волновые уравнения с потенциалом $q(x)$ удовлетворяют принципу Гюйгенса в пространствах достаточно большой размерности. Основным результатом является новое нелинейное уравнение, которому удовлетворяют такие функции $q(x)$. Изучены свойства этого уравнения.

§0. ВВЕДЕНИЕ

Решение стационарного уравнения Шредингера

$$Ly = y'' + q(x)y = 0, \quad x \in \mathbb{R}^1 \tag{1}$$

можно построить в виде

$$y = |x - x_o| \sum_{\nu=0}^{\infty} U_\nu(x, x_o)(x - x_o)^{2\nu}, \tag{2}$$

где $x_o \in \mathbb{R}^1$ – некоторая фиксированная точка, U_ν – гладкие функции и $U_o \equiv 1$. Даже если этот ряд расходится, что может иметь место при некоторых $q(x)$, (2) может быть рассмотрено как асимптотическое решение уравнения (1). Решение вида (2) является аналогом элементарного решения, использованного Адамаром [1] при построении решения задачи Коши для гиперболических дифференциальных уравнений второго порядка. Известно [1], [2], что вопрос гюгенсовости урав-

---

Данное исследование частично финансировано грантом № RYS001 Международного Научного Фонда.

нения

$$u_{tt} - u_{xx} - \sum_{i=1}^{n-2} u_{x_i x_i} + q(x)u = 0 \quad (n \geq 4 \text{ четное}) \tag{3}$$

тесно связан с решением (2) уравнения (1) при той же функции $q(x)$. Уравнение (3) удовлетворяет принципу Гюйгенса тогда и только тогда, когда ряд (2) обрывается, т. е. конечен и имеет вид

$$y = |x - x_o| \sum_{\nu=0}^{k} U_\nu(x, x_o)(x - x_o)^{2\nu}, \quad (k = \frac{n-4}{2}). \tag{4}$$

С другой стороны, функции $q(x)$, для которых уравнение (3) удовлетворяет принципу Гюйгенса, являются рациональными решениями ассоциированных уравнений в иерархиях уравнений Кортевега–де Фриза (KdV) [3], [4].

В настоящей статье предлагается новый, простой метод построения иерархии KdV уравнений, легко обобщающийся на многомерный случай. Доказывается, что для гюгенсовых уравнений функции $q(x)$ удовлетворяют новым нелинейным уравнениям, обладающих рядом интересных свойств.

§1. ПОСТРОЕНИЕ ИЕРАРХИИ УРАВНЕНИЙ KdV

Подставив функцию (2) в уравнение (1) и полагая, что $x \geq x_o$, получим рекуррентные соотношения для коэффициентов $U_\nu(x, x_o)$:

$$(x - x_o)U'_\nu + \nu U_\nu = \frac{1}{2(2\nu + 1)} L[U_{\nu-1}], \quad \nu = 1, 2, \ldots, \; U_o \equiv 1.$$

Для функций T_ν, получающихся от функций U_ν нормированием

$$U_\nu \equiv \alpha_\nu T_\nu, \; \alpha_o = 1, \; \frac{\alpha_{\nu-1}}{\alpha_\nu} = -2(2\nu + 1), \; \nu = 1, 2, \ldots,$$

имеем

$$(x - x_o)T'_\nu + \nu T_\nu = L[T_{\nu-1}], \quad \nu = 1, 2, \ldots. \tag{5}$$

Пусть

$$T_\nu(x, x_o) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{\nu n}(x_o)(x - x_o)^n. \tag{6}$$

Следуя идеям работы [6], где в связи с проблемой Адамара рассмотрен случай $\nu = 3$, исследуем свойства коэффициентов $P_{\nu n}(x_o)$.

Самосопряженность оператора L влечет симметрию функций T_ν, откуда следует, что

$$T_\nu(x,x_o)=\sum_{n=0}^{\infty}P_{\nu n}(x)(x-x_o)^n(-1)^n. \tag{7}$$

Рассмотрим ряды Тейлора функций $P_{\nu n}(x)$:

$$P_{\nu n}(x)=\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{P_{\nu n}^{(\mu)}(x_o)}{\mu!}(x-x_o)^\mu,\quad P_{\nu n}^{(\mu)}(x_o)=\frac{d^\mu}{dx^\mu}P_{\nu n}(x)\mid_{x=x_o}$$

Подставляя эти ряды в (7) и сравнивая результат с (6), получим

$$P_{\nu(2n+1)}=\frac{1}{2}\sum_{\mu=1}^{2n+1}\frac{(-1)^{2n+1-\mu}}{\mu!}P_{\nu(2n+1-\mu)}. \tag{8}$$

Из уравнения (5) находим

$$(n+\nu)P_{\nu n}=(n+1)(n+2)P_{(\nu-1)(n+2)}+\sum_{\mu=0}^{n}\frac{q^{(\mu)}}{\mu!}P_{(\nu-1)(n-\mu)}. \tag{9}$$

С другой стороны, в силу симметрии функций $T_\nu(x,x_o)$

$$-(x-x_o)\dot{T}_\nu+\nu T_\nu=\ddot{T}_{(\nu-1)}+q(x_o)T_{\nu-1},\quad \nu=1,2,\ldots,$$

где через $\dot{T}$ и $\ddot{T}$ обозначены первая и вторая производные по x_o. Отсюда следует, что

$$(n+\nu)P_{\nu n}-\dot{P}_{\nu(n-1)}=\ddot{P}_{(\nu-1)n}-2(n+1)\dot{P}_{(\nu-1)(n+1)}+$$
$$+(n+1)(n+2)P_{(\nu-1)(n+2)}+q(x_o)P_{(\nu-1)n}.$$

Подставляя сюда значения $P_{\nu n}$ и $P_{\nu(n-1)}$ из (9), приходим к равенству

$$\frac{(n-1)(n+2\nu-2)}{n+\nu-1}\dot{P}_{(\nu-1)(n+1)}=\ddot{P}_{(\nu-1)n}+$$
$$+\frac{1}{n+\nu-1}\frac{\partial}{\partial x_o}\left(\sum_{\mu=0}^{n-1}\frac{q^{(\mu)}}{\mu!}P_{(\nu-1)(n-\mu-1)}\right)-\sum_{\mu=1}^{n}\frac{q^{(\mu)}}{\mu!}P_{(\nu-1)(n-\mu)}. \tag{10}$$

Найдем связь между функциями $P_{\nu o}$ и $P_{(\nu-1)o}$. Для этого сначала заметим, что из формулы (8) следует соотношение

$$P_{\nu 1}=\frac{1}{2}\dot{P}_{\nu o}. \tag{11}$$

Поэтому из (9) при $n=1$ следует, что

$$\frac{1}{2}(\nu+1)\dot{P}_{\nu o}=6P_{(\nu-1)3}+\frac{1}{2}q\dot{P}_{(\nu-1)o}+\dot{q}P_{(\nu-1)o}. \tag{12}$$

Подставляя $P_{(\nu-1)3}$ из формулы (8), получим

$$\frac{1}{2}(\nu+1)\dot{P}_{\nu o} = 3\dot{P}_{(\nu-1)2} - \frac{1}{4}\dddot{P}_{(\nu-1)o} + \frac{1}{2}q\dot{P}_{(\nu-1)o} + \dot{q}P_{(\nu-1)o}.$$

Наконец, выразив $\dot{P}_{(\nu-1)2}$ из (10), получим

$$\dot{P}_{\nu o} = \frac{1}{2(2\nu-1)}\left(\frac{d^3}{dx_o^3} + 4q\frac{d}{dx_o} + 2\dot{q}\right)P_{(\nu-1)o} \equiv \beta_\nu \hat{L} P_{(\nu-1)o}, \quad \nu = 2, \ldots. \tag{13}$$

Отметим, что $P_{10} = q$ и $\hat{L}$ совпадает с известным оператором рекурсии для иерархии уравнений KdV. Тем самым, эта иерархия запишется в терминах функций $P_{\nu o}$, в виде

$$q_{t_\nu} = P_{\nu o x}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, \tag{14}$$

или, с учетом (9), в виде

$$q_{t_\nu} = P_{\nu 1}, \quad \nu = 1, 2, \ldots. \tag{15}$$

Пусть функция $q(x)$ такая, что ряд (2) обрывается и имеет вид (4). Тогда

$$T_j = 0, \quad j = k+1, \ldots,.$$

Из (5') и гладкости функций T_ν следует, что для этого достаточно потребовать, чтобы

$$T_{k+1} = 0.$$

С учетом (6) это условие можно записать в виде

$$P_{(k+1)n}(x_o) = 0, \quad n, k = 0, 1, \ldots \tag{16}$$

Таким образом, нами доказана

Лемма. *Если уравнение (1) имеет решение вида (4) (т. е. уравнение (3) удовлетворяет принципу Гюйгенса), то $q(x)$ является стационарным решением уравнений (14) для $\nu \geq k$.*

Итак, задача описания функций $q(x)$, для которых уравнение (1) имеет решение вида (2) с конечным числом слагаемых, сводится к решению бесконечной системы уравнений (16) относительно q.

Первые два столбца матрицы $P = ||P_{(k+1)n}||_{kn=0}^{\infty}$ связаны с иерархией уравнений KdV и хорошо изучены. Естественно возникает вопрос об исследовании других столбцов или строк матрицы P. Первая строка этой матрицы тривиальна и обращается в нуль тогда и только тогда, когда $P_{10} = 0$ (это соответствует тому, что гюгенсовость уравнения (3) при $n = 4$ эквивалентна условию $q = 0$). Третья строка была изучена в связи с проблемой Адамара [6]. Во втором параграфе статьи рассматривается вторая строка, т. е. в (4) полагаем $k = 1$.

§2. ИССЛЕДОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ (16) ПРИ $k = 1$

Обозначив $V_1 = (x - x_o)T_1$, вычислим LT_1. Поскольку

$$V_{1x} = ((x - x_o)T_1)_x = LT_o = q(x),$$

то имеем

$$(x - x_o)^3 LT_1 = (x - x_o)^2 q_x - 2(x - x_o)q + \left(q(x - x_o)^2 + 2\right) V_1.$$

Следовательно

$$\frac{(x - x_o)^3}{2 + q(x - x_o)^2} LT_1 = \frac{1}{2 + q(x - x_o)^2}\left((x - x_o)^2 q_x - 2(x - x_o)q\right) + V_1.$$

Дифференцируя обе части этого равенства, после несложных преобразований получим

$$[2 + q(x - x_o)^2]^2 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{(x - x_o)^3}{2 + q(x - x_o)^2}\right) LT_1 = (x - x_o)^2 [2P_o^* + P_2^*(x - x_o)^2],$$

где

$$P_o^* = q_{xx} + 3q^2 = 6P_{20},$$

$$P_2^* = qq_{xx} + q^3 - q_x^2 = qP_o^* - [2q^3 + q_x^2].$$

Лемма 2. *Для выполнения условия $LT_1 = 0$ необходимо и достаточно, чтобы функция q удовлетворяла уравнениям*

$$P_o^* = 0, \quad P_2^* = 0. \tag{17}$$

Доказательство. Необходимость очевидна. Предположим, что условия (17) выполнены. Тогда

$$LT_1 = \frac{C[2 + q(x - x_o)^2]}{(x - x_o)^3}, \qquad C = \text{const}.$$

В силу гладкости функции T_1 (а следовательно и LT_1) имеем $C = 0$. Лемма доказана.

Из леммы 2 и уравнений (5) следует, что условие $T_2 = 0$ эквивалентно уравнениям (17).

Подстановка рядов (6) в уравнения (5) позволяет вычислить коэффициенты P_{ij}. В частности, получаем

$$P_{20} = \frac{1}{6}(q_{xx} + 3q^2), \tag{18}$$

$$P_{22} = \frac{1}{120}(3q_{xxxx} + 20qq_{xx} + 15q_x^2). \tag{19}$$

С другой стороны, функцию P_{22} можно выразить через P_o^* и P_2^* :

$$P_{22} = \frac{1}{120}(3(P_o^*)_{xx} - qP_o^* + 3P_2^*).$$

Отсюда и из формул (18),(19) непосредственно приходим к следующему результату.

Теорема. *Нижеприводимые утверждения а), б), в) эквивалентны : а) при $k = 1$ уравнение (1) имеет решение вида (4), б) уравнение (3) удовлетворяет принципу Гюйгенса при $n = 6$, в) функция q удовлетворяет уравнениям*

$$6P_{20} \equiv q_{xx} + 3q^2 = 0,$$

$$120P_{22} \equiv 3q_{xxxx} + 20qq_{xx} + 15q_x^2 = 0.$$

Функция P_{20} *порождает* уравнение Кортевега–де Фриза

$$q_t = (q_{xx} + 3q^2)_x.$$

Естественно исследование следующего нелинейного уравнения, связанного с P_{22} :

$$q_t = (3q_{xxxx} + 20qq_{xx} + 15q_x^2)_x. \tag{20}$$

§3. СВОЙСТВО ПЕНЛЕВЕ
И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ БЭКЛУНДА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ (20)

Заметим, что уравнение (20) имеет стационарное решение

$$q = -\frac{2}{(x - x_o)^2},$$

где x_o – произвольное число. На важность изучения нелинейных уравнений, имеющих рациональные решения, было указано в [7].

Определение 1 [8]. Говорят, что уравнение с частными производными (P.D.E.) обладает свойством Пенлеве, если его решения являются *однозначными* функциями в окрестности подвижного характеристического многообразия.

Для уточнения этого определения предположим, что характеристическое многообразие определяется равенством

$$\Phi(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = 0. \tag{21}$$

Свойство Пенлеве имеет место, если P.D.E. имеет решение вида

$$V = \Phi^{\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} V_j \Phi^j, \tag{22}$$

где $\Phi(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$, $V_j = V_j(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$, $V_0 \neq 0$ – аналитические по (t, x) функции в окрестности многообразия (21), а α – отрицательное целое число.

Рассмотрим теперь уравнение (20). Анализ Пенлеве заключается в поиске общего решения уравнения (20) в форме (22). Подстановка (22) в (20) приводит к представлению (20) в виде

$$E = \sum_{j=0}^{\infty} E_j(V_o, \dots, V_j, \Phi)\Phi^{j+\beta} = 0, \tag{23}$$

где β – некоторая постоянная, играющая для (20) ту же роль, что α для (22).

Для определения главного значения α в разложении (22) необходимо выбрать доминирующие члены P.D.E. и приравнять их степени. Для уравнения (20) все члены правой части – доминирующие, и приравниванием их степеней получаем $\alpha = -2$. Очевидно, что соответствующее значение β в разложении (23) равняется -7 ($\beta = \alpha - 5 = 2\alpha - 3 = -7$).

При главном значении $\alpha = -2$ уравнение $E_o = 0$ определяет V_o, в то время, как для $j > 0$ уравнение $E_j = 0$ представляет собой рекуррентное соотношение

$$E_j \equiv (j+1)A(j) + F(V_{j-1}, \dots, V_o, \Phi_t, \Phi_{tx}, \Phi_x, \dots) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, \tag{24}$$

где $A(j) \equiv (j-6)(3j^3 - 45j^2 + 218j - 360)\Phi_x^5 V_j$.

Значения j, для которых V_j не могут быть определены из уравнения $E_j = 0$, называются *резонансными* для соотношения (24). Для резонансных значений j, после подстановки в (24) уже найденных V_l, $l \leq j-1$, функция F либо обращается в ноль, либо нет. В первом случае V_j может быть выбрано произвольным образом, а резонансное значение называется совместимым. Во втором случае уравнение (20) не имеет решения вида (22) при любой функции Φ. Для уравнения (20) из (24) находим только одно резонансное значение $j = 6$. Чтобы проверить условие совместимости при $j = 6$, необходимо вычислить коэффициенты V_j вплоть до $j = 6$:

$E_o \equiv V_o + 2\Phi_x^2 = 0$, $E_1 \equiv V_1 - 2\Phi_{xx} = 0$, $E_2 \equiv 6V_2\Phi_x^2 - 3\Phi_{xx}^2 + 4\Phi_x\Phi_{xxx} = 0$,

$E_3 \equiv 6V_3\Phi_x^4 + 4\Phi_x\Phi_{xx}\Phi_{xxx} - \Phi_x^2\Phi_{xxxx} - 3\Phi_{xx}^3 = 0$,

$$E_4 \equiv 120V_4\Phi_x^6 - 3\Phi_t\Phi_x^3 + 4\Phi_x^3\Phi_{xxxxx} - 30\Phi_x^2\Phi_{xx}\Phi_{xxxx} + \\ +120\Phi_x\Phi_{xx}^2\Phi_{xxx} - 20\Phi_x^2\Phi_{xxx}^2 - 75\Phi_{xx}^4,$$

$$E_5 \equiv 120V_5\Phi_x^4 - \frac{2}{3}\Phi_{xxxxxx} + \frac{40}{3}\frac{\Phi_{xxx}\Phi_{xxxx}}{\Phi_x} + 8\frac{\Phi_{xx}\Phi_{xxxxx}}{\Phi_x} - \\ -50\frac{\Phi_{xx}^2\Phi_{xxxx}}{\Phi_x^2} - \frac{200}{3}\frac{\Phi_{xx}\Phi_{xxx}^2}{\Phi_x^2} - 105\frac{\Phi_{xx}^5}{\Phi_x^4} + 200\frac{\Phi_{xx}^3\Phi_{xxx}}{\Phi_x^3} + 3\Phi_{tx} - 6\frac{\Phi_t\Phi_{xx}}{\Phi_x} = 0. \quad (25)$$

При $j = 6$ можно показать, что условие совместимости удовлетворено тождественно и имеет следующий вид :

$$E_6 \equiv \frac{\partial}{\partial x}E_5 \equiv 0. \quad (26)$$

В рассматриваемом случае число резонансных значений меньше числа корней уравнения $A(j) = 0$ (см. (24)). Тем самым, невозможно найти общее решение уравнения (20) в форме (22). Однако, можно найти решение, зависящее от двух произвольных функций Φ и V_6. При этом говорят, что уравнение обладает *слабым свойством Пенлеве*, т. е. все резонансные значения соотношения (24) совместимы. Напомним, говорится, что уравнение обладает свойством Пенлеве *в сильном смысле*, если число резонансных значений рекуррентного соотношения

(24) равняется числу корней уравнения $\Lambda(j) = 0$, т. е. на единицу меньше порядка уравнения (20) и все резонансные значения совместимы.

Так как $\alpha = -2$ - отрицательное целое число, то разложение Пенлеве (22), представляющее решение уравнения (20), может быть усечено [9] от $j = 2$:

$$V = -2\frac{\Phi_x^2}{\Phi^2} + 2\frac{\Phi_{xx}}{\Phi} + V_2, \tag{27}$$

при условии, что V_2 и Φ удовлетворяют следующей системе из шести уравнений :

$$E_j(\Phi, V_2) = 0, \quad j = 2, 3, 4, 5, 6, 7\,(-\alpha, \ldots, -\beta). \tag{28}$$

Из уравнения $E_2 = 0$ находим представление V_2 в терминах производных Φ. Представление E_6 функционально зависит от E_5 вследствие условия совместимости при $j = 6$ (см. (26)), а уравнение $E_7 = 0$ просто является уравнением (20), записанным для V_2. Итак, из (28) получаем

при $j = 2$:

$$V_2 = \frac{1}{2}\frac{\Phi_{xx}^2}{\Phi_x^2} - \frac{2}{3}\frac{\Phi_{xxx}}{\Phi_x},$$

при $j = 3$:

$$21\Phi_{xx}^3 - 23\Phi_x^2\Phi_{xxxx} - 18\Phi_x\Phi_{xx}\Phi_{xxx} - 120\Phi_x^2\Phi_{xx}V_2 - 30\Phi_x^3V_{2x} = 0,$$

при $j = 4$:

$$-\Phi_t\Phi_x^2 + 43\Phi_x^2\Phi_{xxxxx} + 65\Phi_x\Phi_{xx}\Phi_{xxxx} - 35\Phi_{xx}^2\Phi_{xxx} + 10\Phi_x\Phi_{xxx}^2 +$$
$$+(300\Phi_x\Phi_{xx}^2 + 200\Phi_x^2\Phi_{xxx})V_2 + 300\Phi_x^2\Phi_{xx}V_{2x} + 50\Phi_x^3V_{2xx}, = 0$$

при $j = 5$:

$$2\Phi_{xt}\Phi_x + \Phi_{xx}\Phi_t - 5\Phi_{xxx}\Phi_{xxxx} - 23\Phi_{xx}\Phi_{xxxxx} - 21\Phi_x\Phi_{xxxxxx} - (200\Phi_{xx}\Phi_{xxx} +$$
$$+100\Phi_x\Phi_{xxxx})V_2 - (150\Phi_{xx}^2 + 200\Phi_x\Phi_{xxx})V_{2x} - 150\Phi_x\Phi_{xx}V_{2xx} - 20\Phi_x^2V_{2xxx} = 0,$$

при $j = 7$:

$$-V_{2t} + 3V_{2xxxxx} + 50V_{2x}V_{2xx} + 20V_2V_{2xxx} = 0.$$

Подставляя представление V_2 в остальные уравнения, приходим к четырем уравнениям, названным уравнениями Пенлеве–Бэклунда, зависящим только от производных функции Φ :

$$\frac{\partial}{\partial x}\{\Phi, x\} = 0,$$

$$3\frac{\Phi_t}{\Phi_x} - 29\frac{\partial^2}{\partial x^2}\{\Phi, x\} + 4\{\Phi, x\}^2 - 90\frac{\Phi_{xx}}{\Phi_x}\frac{\partial}{\partial x}\{\Phi, x\} = 0,$$

$$-6\frac{\Phi_{tx}}{\Phi_x} - 3\frac{\Phi_t\Phi_{xx}}{\Phi_x^2} + 43\frac{\partial^3}{\partial x^3}\{\Phi, x\} + 34\{\Phi, x\}\frac{\partial}{\partial x}\{\Phi, x\} +$$

$$+37\frac{\Phi_{xx}}{\Phi_x}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\{\Phi, x\} + 145\frac{\Phi_{xx}^2}{\Phi_x^2}\frac{\partial}{\partial x}\{\Phi, x\} - 12\frac{\Phi_{xx}}{\Phi_x}\{\Phi, x\}^2 = 0,$$

$$-\frac{\Phi_t}{\Phi_x}\frac{\Phi_{xx}}{\Phi_x}\{\Phi, x\} - \frac{1}{2}\frac{\Phi_t}{\Phi_x}\frac{\Phi_{xx}^3}{\Phi_x^3} - \left[\frac{4}{3}\{\Phi, x\}^3 + \frac{2}{3}\frac{\Phi_{xx}^2}{\Phi_x^2}\{\Phi, x\}^2\right]_x +$$

$$+G_1\left\{\left(\frac{\Phi_t}{\Phi_x}\right)_x\left(\frac{\Phi_t}{\Phi_x}\right)_{xx}, \ldots,\right\} + G_2\left\{\frac{\partial}{\partial x}\{\Phi, x\}, \frac{\partial}{\partial x}\{\Phi, x\}^2 \ldots,\right\} = 0.$$

Здесь $\{\Phi, x\} = \frac{\Phi_{xxx}}{\Phi_x} - \frac{3}{2}\frac{\Phi_{xx}^2}{\Phi_x^2}$ есть производная Шварца, а G_1, G_2 – гладкие функции такие, что $G_1(0, 0, \ldots, 0) = G_2(0, 0, \ldots, 0) = 0$.

Заметим, что последние два уравнения являются простыми следствиями первых двух, т. е. система уравнений Пенлеве–Бэклунда состоит только из следующих двух уравнений :

$$\frac{\partial}{\partial x}\{\Phi, x\} = 0, \tag{29}$$

$$3\frac{\Phi_t}{\Phi_x} + 4\{\Phi, x\}^2 = 0. \tag{30}$$

Итак, если Φ удовлетворяет системе уравнений Пенлеве–Бэклунда, то равенством (27) определяется преобразование Бэклунда, т. е. преобразование между двумя решениями V_2 и V одного и того же уравнения. Например, функции вида

$$\Phi = \frac{c_1 e^{\sqrt{a}(x - \frac{16}{3}a^2 t)} + c_2 e^{-\sqrt{a}(x - \frac{16}{3}a^2 t)}}{c_3 e^{\sqrt{a}(x - \frac{16}{3}a^2 t)} + c_4 e^{-\sqrt{a}(x - \frac{16}{3}a^2 t)}},$$

где a, c_1, c_2, c_3, c_4 – произвольные постоянные, удовлетворяют уравнениям (28), (29).

ABSTRACT. Stationary Schrödinger equation with potential $q(x)$ is considered. The condition that for wave equations with the same function $q(x)$ the Huygens' principle is valid in the spaces of sufficiently high dimensions determins a class of function $q(x)$ which is studied. The main result is a

new nonlinear equation which these functions $q(x)$ satisfy. A study of its properties follows.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. Hadamard, Lectures on Cauchy's Problem, New Haven, Yale Univ. Press, 1923.
2. P. Günther, Huygens' Principle and Hiperbolic Equations, New York, acad. Press, 1988.
3. M. Adler, J. Moser, "On a class of polynomials connected with KdV equations", Comm. Math. Phys., vol. 61, pp. 1 – 30, 1978.
4. А. О. Оганесян, "Принцип Гюйгенса, свойство Пенлеве и нелинейные дифференциальные уравнения", ДНАН Армении, т. 94, №5, стр. 270 – 273, 1993.
5. R. Schimming, "An Explicit Expression for the Korteveg-de Vries Hierarchy", Zeitschrift für analysis und ihre anwendungen, Bd. 7(3), pp. 203 – 214, 1988.
6. J. E. Lagnese, "A new differential operator of the pure wave type" J. Diff. Eq., vol. 1, pp. 171 – 187, 1965.
7. F. Calogero, A. Degasperis, "Spectral transform and solitons", North-Holland Publ. Comp., 1982.
8. J. Weiss, "The Painlevé property for partial differential equations. Bäcklund transformation, Lax pairs and the Schwarzian derivative", J. Math. Phys. 24(6), June, pp. 1405 – 1413, 1983.
9. J. Weiss, M. Tabor and G. Carnevale, "The Painlevé property for partial differential equations", J. Math. Phys. 24(3), March, pp. 522 – 526, 1983.

15 июня 1994 Ереванский государственный университет