ОБ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ РАССЕЯНИЯ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА С СУММИРУЕМЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ, I

А. Р. Казарян, И. Г. Хачатрян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 29, № 5, 1994

В статье рассмотрен действующий в пространстве $L^2(-\infty,\infty)$ дифференциальный оператор L произвольного порядка $m \geq 3$ с суммируемыми коэффициентами. Исследована структура матрицы рассеяния L и в частности доказано, что в случае самосопряженного оператора, как и в общем случае, в обратной задаче рассеяния имеет место согласованность между числами задаваемых и определяемых функций.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $m \geq 3$ – натуральное число, m_0 и m_1, соответственно – целые части чисел $m/2$ и $(m-1)/2$, а $p_k(x)$, $x \in (-\infty,\infty)$, $k = 0, 1, ..., m-2$ – комплексно-значные функции, суммируемые на всей вещественной оси. Определим *квазипроизводные* $y^{[\nu]}(x)$, $\nu = 0, 1, ..., m$ функции $y(x)$, соответствующие коэффициентам $p_k(x)$ по формулам

$$
\begin{aligned}
&y^{[0]} = y^{(0)} = y,\\
&y^{[\nu]} = \frac{1}{i^\nu} y^{(\nu)} = \frac{1}{i^\nu}\frac{d^\nu y}{dx^\nu}, \quad \nu = 1, ..., m_0,\\
&y^{[m_0+1]} = p_{2m_1-1} y^{[m_1-1]} + p_{2m_1} y^{[m_1]} + \frac{1}{i}\frac{d}{dx} y^{[m_0]},\\
&y^{[m-\nu]} = p_{2\nu-1} y^{[\nu-1]} + p_{2\nu} y^{[\nu]} + p_{2\nu+1} y^{[\nu+1]} + \frac{1}{i}\frac{d}{dx} y^{[m-\nu-1]}, \quad \nu = 1, ..., m_1 - 1,\\
&y^{[m]} = p_0 y^{[0]} + p_1 y^{[1]} + \frac{1}{i}\frac{d}{dx} y^{[m-1]},
\end{aligned}
$$

где i – мнимая единица и $p_{m-1}(x) \equiv 0$. Будем считать, что квазипроизводная $y^{[m]}(x)$ функции $y(x)$ существует, если существуют и абсолютно непрерывны все квазипроизводные $y^{[\nu]}(x)$, $\nu = 0, 1, ..., m-1$. Отметим, что если каждый коэффициент $p_k(x)$, $1 \le k \le m-2$, имеет абсолютно непрерывные производные до порядка $[(k-1)/2]$ включительно, то квазипроизводная $y^{[m]}(x)$ допускает запись

$$y^{[m]} = \frac{1}{i^m} y^{(m)} + \sum_{k=0}^{m_1-1} \frac{1}{i^{2k+1}} \left\{ [p_{2k+1} y^{(k)}]^{(k+1)} + [p_{2k+1} y^{(k+1)}]^{(k)} \right\} +$$
$$+ \sum_{k=0}^{m_0-1} \frac{1}{i^{2k}} \left[p_{2k+1} y^{(k)} \right]^{(k)} = \frac{1}{i^m} y^{(m)} + \sum_{k=0}^{m-2} \frac{1}{i^k} q_k y^{(k)},$$

где каждая функция $q_k(x)$, $0 \le k \le m-2$, является линейной комбинацией функций $p_s^{(s-k)}(x)$, $k \le s \le \min\{2k+1, m-2\}$. В дальнейшем гладкость коэффициентов $p_k(x)$ не предполагается.

Действующий в пространстве $L^2(-\infty, \infty)$ линейный дифференциальный оператор L порядка m с коэффициентами $p_k(x)$, $k = 0, 1, ..., m-2$, определим следующим образом. Обозначим через D множество всех тех функций $y \in L^2(-\infty, \infty)$, для каждой из которых квазипроизводная $y^{[m]}$, соответствующая коэффициентам $p_k(x)$, существует и $y^{[m]} \in L(-\infty, \infty)$. Ясно, что D является линейным многообразием в $L^2(-\infty, \infty)$. Для функций $y \in D$ положим $Ly = y^{[m]}$.

Квазипроизводные функции $z(x)$, соответствующие комплексносопряженным коэффициентам $\overline{p_k(x)}$, $k = 0, 1, ..., m-2$, обозначим через $z^{[\nu]*}(x)$. Вместе с оператором L рассмотрим действующий в пространстве $L^2(-\infty, \infty)$ линейный дифференциальный оператор L^* порядка m с коэффициентами $\overline{p_k(x)}$. Область определения этого оператора обозначим через $D^{\#}$.

Обратная задача рассеяния для оператора L в различных постановках рассматривалась в работах [1] – [5], где было введено в рассмотрение понятие *данных рассеяния оператора* L и исследована задача восстановления коэффициентов $p_k(x)$, $k = 0, 1, ..., m-2$, по известным данным рассеяния. П. Дейфт, К. Томей и Е. Трубовиц [2] некоторым образом ввели данные рассеяния оператора L порядка $m = 3$ и, при определенных ограничениях на эти данные, доказали единственность решения обратной задачи рассеяния, а при более жестких ограничениях указали некоторый способ восстановления коэффициентов оператора L по данным рассеяния. Кроме того, полученные результаты они применили для интегрирования нелинейного уравнения Буссинеска. П. Кодри [3] для оператора L порядка $m = 3$ ввел те же данные рассеяния, но при этом исходил из несколько иных соображений, позволивших Р. Билсу [4] аналогичным образом ввести данные рассеяния для оператора L произвольного порядка $m \geq 3$ и, при некоторых ограничениях на них, доказать единственность решения обратной задачи рассеяния. Впрочем, совпадение введенных в [2] и [3] данных рассеяния следует из результатов настоящей статьи. В работе [5] для самосопряженного оператора L произвольного порядка $m \geq 3$ при некотором дополнительном условии указана другая постановка обратной задачи рассеяния. В отличие от рассмотренных в [1 – 4], данные рассеяния в [5] являются спектральными характеристиками оператора L. Данные рассеяния оператора L, рассмотренные в работах [4] и [5], в некотором смысле соответствуют хорошо известным (см. [6], [7]) данным рассеяния оператора Штурма–Лиувилля. Таким образом, для оператора L порядка $m \geq 3$ возможны две различные постановки обратной задачи рассеяния. Метод, использованный в [5], был применен в работах [8], [9] в обратной задаче рассеяния для самосопряженных операторов, действующих в $L^2(0, \infty)$. Поставленные в [5], [8], [9] обратные задачи решаются сведением вопроса к решению линейных интегральных уравнений относительно ядра оператора преобразования, являющихся аналогом хорошо известных линейных интегральных уравнений, указанных Гельфандом, Левитаном и Марченко в случае операторов Штурма–Лиувилля.

В связи с поставленной в [4] обратной задачей возникает ряд вопросов. Первый из них – вопрос корректности постановки задачи в смысле согласуемости чисел, задаваемых и определяемых функцией (на первый взгляд задача кажется переопределенной). В [4] матрица рассеяния вводится при помощи определенных решений дифференциального уравнения

$$y^{[m]} = \lambda^m y, \tag{1}$$

где λ – комплексный параметр. Второй вопрос заключается в выяснении отношения этих решений к оператору L. Указанная матрица-функция определена на множестве, которое не пересекается со спектром оператора L в случае нечетного порядка m, а в случае четного m лишь частично содержится в нем. Тем самым, возникает третий вопрос – можно ли эту матрицу в каком-то смысле рассматривать как спектральную характеристику оператора L?

В настоящей статье исследуется структура введенной в [4] матрицы рассеяния оператора L. В частности, доказывается, что операторы, сопряженные к L и $L^{\#}$ существуют, причем $L^* = L^{\#}$, $(L^{\#})^* = L^{**} = L$ (следовательно, операторы L и $L^{\#}$ замкнуты и, в случае вещественных коэффициентов $p_k(x)$, оператор L является самосопряженным). Исследуется спектр оператора L (вообще говоря, несамосопряженного) и для резольвенты выводится интегральное представление с ядром, выраженным через решения уравнения (1) и аналогичные решения сопряженного уравнения

$$z^{[m]*} = \overline{\lambda}^m z, \tag{2}$$

которые использованы в [4] при введении матрицы рассеяния оператора L (тем самым, проясняется указанный выше второй вопрос). Пояснена взаимосвязь между данными рассеяния, рассмотренными в [4] и [5], показывающая, в частности, что третий вопрос в некоторых случаях имеет положительный ответ.

§1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Пусть $y(x)$ и $z(x)$ – функции, для которых существуют квазипроизводные $y^{[m]}$ и $z^{[m]*}$. Обозначим

$$[y(x), z(x)] = \sum_{k=0}^{m-1} y^{[m-k-1]}\overline{z^{[k]*}(x)}. \tag{3}$$

Нетрудно убедиться в справедливости равенств

$$y^{[m]}(x)\overline{z(x)} - y(x)\overline{z^{[m]*}(x)} = \frac{1}{i}\frac{d}{dx}[y(x), z(x)],$$

$$\int_a^b y^{[m]}(x)\overline{z(x)}\,dx - \int_a^b y(x)\overline{z^{[m]*}(x)}\,dx = i[y(a), z(a)] - i[y(b), z(b)],$$

где $a < b$ – произвольные числа. Из последнего равенства следует, что для функций $y \in D$ и $z \in D^{\#}$ существуют конечные пределы

$$\lim_{x\to\infty}[y(x), z(x)], \quad \lim_{x\to-\infty}[y(x), z(x)]$$

(в действительности равные нулю). Из того же равенства следует, что, если $y(x,\lambda)$ и $z(x,\overline{\lambda})$ – решения уравнений (1) и (2), соответственно, то выражение $[y(x,\lambda), z(x,\overline{\lambda})]$ постоянно относительно x.

Общее решение $\xi(x,\lambda)$ неоднородного уравнения

$$\xi^{[m]} - \lambda^m \xi = f, \tag{4}$$

где $f(x)$ – локально суммируемая функция, выражается через произвольную фундаментальную систему решений $y_k(x,\lambda)$, $k = 0,1,...,m-1$, однородного уравнения (1) :

$$\xi(x,\lambda) = \sum_{k=0}^{m-1} y_k(x,\lambda)\left\{c_k + \int_0^x \overline{z_k(t,\overline{\lambda})}f(t)\,dt\right\}, \tag{5}$$

где c_k – произвольные постоянные, а функции $z_k(x,\overline{\lambda})$, $k = 0,1,...,m-1$, образуют фундаментальную систему решений сопряженного однородного уравнения (2) и однозначно определяются из соотношений

$$\sum_{k=0}^{m-1} y_k^{[\nu]}(x,\lambda)\overline{z_k(x,\overline{\lambda})} = \begin{cases} 0 & \text{при } \nu = 0,1,...,m-2, \\ i & \text{при } \nu = m-1. \end{cases} \tag{6}$$

При этом, имеют место равенства

$$\xi^{[\nu]}(x,\lambda) = \sum_{k=0}^{m-1} y_k^{[\nu]}(x,\lambda)\left\{c_k + \int_0^x \overline{z_k(t,\overline{\lambda})}f(t)\,dt\right\}, \quad \nu = 0,1,...,m-1,$$

$$\sum_{k=0}^{m-1} y_k^{[\nu]}(x,\lambda)\overline{z_k^{[s]*}(x,\overline{\lambda})} = \begin{cases} 0 & \text{при } \nu + s \neq m-1, \\ i & \text{при } \nu + s = m-1, \end{cases} \quad \nu, s = 0,1,...,m-1.$$

В дальнейшем нам понадобятся фундаментальные системы решений уравнений (1) и (2), имеющие определенное асимптотическое поведение как при $x \to \infty$

или $x \to -\infty$, так и при $|\lambda| \to \infty$ и обладающие некоторыми аналитическими свойствами по параметру λ.

Для произвольного $\varepsilon \geq 0$ на комплексной λ-плоскости рассмотрим следующие лучи и области :

$$l_j(\varepsilon) = \left\{\lambda : \ |\lambda| > \varepsilon, \ \arg(i\lambda) = \frac{j\pi}{m}\right\}, \quad j = 0, \pm 1, ..., \pm(m-1), m,$$
$$\Omega_0(\varepsilon) = \left\{\lambda : \ |\lambda| > \varepsilon, \ |\arg(i\lambda)| < \frac{\pi}{m}\right\},$$
$$\Omega_{m-1}(\varepsilon) = \left\{\lambda : \ |\lambda| > \varepsilon, \ |\arg(i\lambda)| > \pi - \frac{\pi}{m}\right\},$$
$$\Omega_k(\varepsilon) = \left\{\lambda : \ |\lambda| > \varepsilon, \ \frac{\pi k}{m} < \arg(i\lambda) < \frac{\pi(k+1)}{m}\right\}, \quad k = 1, ..., m-2,$$
$$\Omega_{-k}(\varepsilon) = \left\{\lambda : \ |\lambda| > \varepsilon, \ -\frac{\pi(k+1)}{m} < \arg(i\lambda) < -\frac{\pi k}{m}\right\}, \quad k = 1, ..., m-2.$$

Здесь и в дальнейшем предполагается, что значения arg лежат в отрезке $(-\pi, \pi]$.

Для краткости обозначим

$$l_j = l_j(0), \ j = 0, \pm 1, ..., \pm(m-1), m, \ \Omega_k = \Omega_k(0), \ k = 0, \pm 1, ..., \pm(m-2), m-1, \quad (7)$$

$$l(\varepsilon) = \bigcup_{|j|=1}^{m-1} l_j(\varepsilon), \quad \tilde{l}(\varepsilon) = l(\varepsilon) \cup l_0(\varepsilon) \cup l_m(\varepsilon), \quad l = l(0), \quad \tilde{l} = \tilde{l}(0), \quad (8)$$

$$\Omega(\varepsilon) = \bigcup_{k=2-m}^{m-1} \Omega_k(\varepsilon), \quad \tilde{\Omega}(\varepsilon) = \Omega(\varepsilon) \setminus (l_0(\varepsilon) \cup l_m(\varepsilon)), \quad \Omega = \Omega(0), \quad \tilde{\Omega} = \tilde{\Omega}(0). \quad (9)$$

Лемма 1. *Для каждого $\lambda \neq 0$ уравнение (1) имеет решения $y^+(x,\lambda)$ и $y^-(x,\lambda)$ такие, что для квазипроизводных $y^{+[\nu]}(x,\lambda)$ и $y^{-[\nu]}(x,\lambda)$ выполняются асимптотические равенства*

$$\begin{aligned} y^{+[\nu]}(x,\lambda) &= \lambda^\nu e^{i\lambda x}(1+o(1)), \quad x \to +\infty, \quad \nu = 0,1,...,m-1, \\ y^{-[\nu]}(x,\lambda) &= \lambda^\nu e^{i\lambda x}(1+o(1)), \quad x \to -\infty, \quad \nu = 0,1,...,m-1. \end{aligned} \quad (10)$$

Решения $y^+(x,\lambda)$, $y^-(x,\lambda)$ единственны для значений $\lambda \in \Omega_{m-1} \cup l_{m-1} \cup l_{1-m}$ и $\lambda \in \Omega_0 \cup l_1 \cup l_{-1}$ соответственно.

Таким образом, для каждого $\lambda \neq 0$ функции $y_k^+(x,\lambda)$ и $y_k^-(x,\lambda)$, определенные формулами

$$y_k^{\pm}(x,\lambda) = y^{\pm}(x,\lambda\omega_k), \quad k = 0,1,...,m-1, \quad (11)$$

где

$$\omega_k = \exp\left(\frac{2\pi k i}{m}\right), \quad k = 0,1,...,m-1, \quad (12)$$

являются решениями уравнения (1) и обладают асимптотикой

$$y_k^{\pm[\nu]}(x,\lambda) = (\lambda\omega_k)^\nu e^{i\omega_k\lambda x}(1+o(1)), \quad x\to\pm\infty, \quad k,\nu = 0,1,...,m-1. \tag{13}$$

При этом, каждая из систем решений $y_k^+(x,\lambda)$, $y_k^-(x,\lambda)$, $k = 0,1,...,m-1$, фундаментальна. Для любых чисел $\varepsilon > 0$, α^+ и $\alpha^- \in (-\infty,\infty)$, удовлетворяющих неравенствам

$$\sum_{k=0}^{m-2} \frac{2}{\varepsilon^{m-k-1}} \int_{\alpha^+}^{\infty} |p_k(t)|\, dt < 1, \quad \sum_{k=0}^{m-2} \frac{2}{\varepsilon^{m-k-1}} \int_{-\infty}^{\alpha^-} |p_k(t)|\, dt < 1, \tag{14}$$

решения $y^+(x,\lambda)$ и $y^-(x,\lambda)$ уравнения (1), с асимптотикой (10), можно выбрать таким образом, чтобы как функции от λ они имели следующие свойства :

1) Квазипроизводные $y^{\pm[\nu]}(x,\lambda)$, $\nu = 0,1,...,m-1$ голоморфны по λ на открытом множестве $\Omega(\varepsilon)$.

2) Для любого $x \in [\alpha^+,\infty)$ асимптотически

$$y^{[\nu]}(x,\lambda) = \lambda^\nu e^{i\lambda x}(1+O(\lambda^{-1})), \quad |\lambda|\to\infty, \quad \nu = 0,1,...,m-1, \tag{15}$$

и для любого $x \in (-\infty,\alpha^-]$ –

$$y^{-[\nu]}(x,\lambda) = \lambda^\nu e^{i\lambda x}(1+O(\lambda^{-1})), \quad |\lambda|\to\infty, \quad \nu = 0,1,...,m-1. \tag{15'}$$

3) Для каждого $\lambda \in l(\varepsilon)$, при любом $\nu = 0,1,...,m-1$ существуют пределы

$$\lim_{\lambda'\to\lambda} y^{+[\nu]}(x,\lambda') = y^{+[\nu]}(x,\lambda), \quad \text{при } |\arg(i\lambda')| \geq |\arg(i\lambda)|, \tag{16}$$

$$\lim_{\lambda'\to\lambda} y^{-[\nu]}(x,\lambda') = y^{-[\nu]}(x,\lambda), \quad \text{при } |\arg(i\lambda')| \leq |\arg(i\lambda)|, \tag{17}$$

$$\lim_{\lambda'\to\lambda} y^{+[\nu]}(x,\lambda') = \widetilde{y}^{+[\nu]}(x,\lambda), \quad \text{при } |\arg(i\lambda')| < |\arg(i\lambda)|, \tag{18}$$

$$\lim_{\lambda'\to\lambda} y^{-[\nu]}(x,\lambda') = \widetilde{y}^{-[\nu]}(x,\lambda), \quad \text{при } |\arg(i\lambda')| > |\arg(i\lambda)|. \tag{19}$$

Здесь $\widetilde{y}^+(x,\lambda)$ и $\widetilde{y}^-(x,\lambda)$ – решения уравнения (1), причем квазипроизводные $\widetilde{y}^{\pm[\nu]}(x,\lambda)$ как функции от $\lambda \in l(\varepsilon)$ непрерывны. Для каждого $\lambda \in l(\varepsilon)$, при $x\to\pm\infty$, $\nu = 0,1,...,m-1$ имеют место асимптотические равенства

$$\widetilde{y}^{\pm[\nu]}(x,\lambda) = \lambda^\nu e^{i\lambda x}\left\{1 + g^\pm(\lambda)\left(-\frac{\overline{\lambda}}{\lambda}\right)^\nu e^{-ix(\lambda+\overline{\lambda})} + o(1)\right\}, \tag{20}$$

где $g^+(\lambda)$ и $g^-(\lambda)$ – некоторые непрерывные функции на множестве $l(\varepsilon)$, причем $g^\pm(\lambda) = O(\lambda^{-1})$ при $|\lambda|\to\infty$. Для $\widetilde{y}^+(x,\lambda)$, при $x\in[\alpha^+,\infty)$, и для $\widetilde{y}^-(x,\lambda)$, при $x \in (-\infty,\alpha^-]$, справедливы асимптотические соотношения

$$\tilde{y}^{\pm[\nu]}(x,\lambda) = \lambda^{\nu} e^{i\lambda x}(1 + O(\lambda^{-1})), \quad |\lambda| \to \infty, \quad \nu = 0, 1, ..., m-1. \tag{21}$$

Доказательство леммы 1. Полагая $\lambda \neq 0$, для $k = 0, 1, ..., m-1$ введем в рассмотрение следующие множества целых чисел :

$$K_r = \left\{ s : \left[\frac{1-r}{2}\right] \leq s \leq \left[\frac{m-r}{2}\right] - 1 \right\}, \quad r = -1, 0, 1,$$

$$M_k^0(\lambda) = \{s : 0 \leq s \leq m-1, \ \mathrm{Im}\,(\lambda\omega_s - \lambda\omega_k) = 0\},$$

$$M_k^+(\lambda) = \{s : 0 \leq s \leq m-1, \ \mathrm{Im}\,(\lambda\omega_s - \lambda\omega_k) > 0\}, \tag{22}$$

$$M_k^-(\lambda) = \{s : 0 \leq s \leq m-1, \ \mathrm{Im}\,(\lambda\omega_s - \lambda\omega_k) < 0\}, \tag{23}$$

$$\widetilde{M}_k^+(\lambda) = M_k^+(\lambda) \cup M_k^0(\lambda), \quad \widetilde{M}_k^-(\lambda) = M_k^-(\lambda) \cup M_k^0(\lambda);$$

где числа ω_s определяются по формуле (12). Заметим, что

$$K_{-1} \cup K_0 \cup K_1 = \{0, 1, ..., m_1\}, \quad m_1 = \left[\frac{m-1}{2}\right],$$

$$M_k^-(\lambda) \cup M_k^+(\lambda) \cup M_k^0(\lambda) = \{0, 1, ..., m-1\}, \quad k = 0, 1, ..., m-1.$$

Легко убедиться, что множества $M_0^+(\lambda)$ и $\widetilde{M}_0^-(\lambda)$ постоянны в каждом из секторов Ω_0, $\Omega_{m-1} \cup l_{m-1} \cup l_{1-m}$, $\Omega_k \cup l_k$, $k = \pm 1, ..., \pm(m-2)$, причем $\widetilde{M}_0^-(\lambda) = \emptyset$ для $\lambda \in \Omega_0$ и $M_0^+(\lambda) = \emptyset$ для $\lambda \in \Omega_{m-1} \cup l_{m-1} \cup l_{1-m}$. Одновременно, множества $\widetilde{M}_0^+(\lambda)$ и $M_0^-(\lambda)$ постоянны в каждом из секторов Ω_0, $\Omega_0 \cup l_1 \cup l_{-1}$, $\Omega_k \cup l_{k+1}$, $\Omega_{-k} \cup l_{-k-1}$, $k = 1, ..., m-2$, причем $M_0^-(\lambda) = \emptyset$ для $\lambda \in \Omega_0 \cup l_1 \cup l_{-1}$ и $\widetilde{M}_0^+(\lambda) = \emptyset$ для $\lambda \in \Omega_{m-1}$.

Пусть числа $\varepsilon > 0$ и $\alpha^+ \in (-\infty, \infty)$ удовлетворяют первому из неравенств (14). Для каждого λ, $|\lambda| > \varepsilon$, рассмотрим следующую систему линейных интегральных уравнений относительно функций $\xi_\nu(x,\lambda)$, $x \in (-\infty, \infty)$, $\nu = 0, 1, ..., m_1$:

$$\xi_\nu(x,\lambda) =$$
$$= \lambda^\nu e^{i\lambda x} + \frac{i}{m} \sum_{r=-1}^{1} \sum_{k \in K_r} \sum_{s \in \widetilde{M}_0^-(\lambda)} (\lambda\omega_s)^{\nu+k+r-m+1} \int_x^\infty e^{i\omega_s\lambda(x-t)} p_{2k+r}(t)\xi_k(t,\lambda)\, dt -$$
$$- \frac{i}{m} \sum_{r=-1}^{1} \sum_{k \in K_r} \sum_{s \in M_0^+(\lambda)} (\lambda\omega_s)^{\nu+k+r-m+1} \int_{\alpha^+}^x e^{i\omega_s\lambda(x-t)} p_{2k+r}(t)\xi_k(t,\lambda)\, dt. \tag{24}$$

Чтобы доказать разрешимость этой системы, обозначим $\eta_\nu(x,\lambda) = \lambda^{-\nu} e^{-i\lambda x} \times \xi_\nu(x,\lambda)$, $\nu = 0, 1, ..., m_1$, и запишем систему (24) в виде

$$\eta_\nu(x,\lambda) =$$
$$= 1 + \frac{i}{m}\sum_{r=-1}^{1}\sum_{k\in K_r}\sum_{s\in \widetilde{M_0^-}(\lambda)} \frac{\omega_s^{\nu+k+r-m+1}}{\lambda^{m-1-2k-r}}\int_x^\infty e^{i\lambda(1-\omega_s)(t-x)}p_{2k+r}(t)\eta_k(t,\lambda)\,dt -$$
$$-\frac{i}{m}\sum_{r=-1}^{1}\sum_{k\in K_r}\sum_{s\in M_0^+(\lambda)} \frac{\omega_s^{\nu+k+r-m+1}}{\lambda^{m-1-2k-r}}\int_{\alpha^+}^x e^{i\lambda(\omega_s-1)(x-t)}p_{2k+r}(t)\eta_k(t,\lambda)\,dt. \quad (25)$$

В силу первого из неравенств (14) система уравнений (25) на интервале $[\alpha^+,\infty)$ разрешима методом последовательных приближений, причем последовательные приближения как последовательности функций двух аргументов сходятся к пределам $\eta_\nu(x,\lambda)$ равномерно на множестве $x\in[\alpha^+,\infty)$, $|\lambda|>\varepsilon$. Поскольку множества $M_0^+(\lambda)$ и $\widetilde{M_0^-}(\lambda)$ постоянны относительно λ, лежащего в любой связной части открытого множества $\Omega(\varepsilon)$, то последовательные приближения, а следовательно и сами функции $\eta_\nu(x,\lambda)$, голоморфны по λ на $\Omega(\varepsilon)$. Кроме того, если λ' достаточно близко к $\lambda\in l(\varepsilon)$ и таково, что $|\arg(i\lambda')|\geq|\arg(i\lambda)|$, то имеют место равенства $\widetilde{M_0^-}(\lambda')=\widetilde{M_0^-}(\lambda)$, $M_0^+(\lambda')=M_0^+(\lambda)$. Поэтому для $\lambda\in l(\varepsilon)$ из равномерной сходимости последовательных приближений следует, что

$$\lim_{\lambda'\to\lambda}\eta_\nu(x,\lambda')=\eta_\nu(x,\lambda),\quad |\arg(i\lambda')|\geq|\arg(i\lambda)|,\quad \nu=0,1,\dots,m_1. \quad (26)$$

Для $\lambda\in l(\varepsilon)$ существует целое число s_0 $(0\leq s_0\leq m-1)$, зависящее лишь от $\arg\lambda$, такое, что $\overline{\lambda}=-\lambda\omega_{s_0}$. Обозначим

$$N_0^+(\lambda)=M_0^+(\lambda)\cup\{s_0\},\quad N_0^-(\lambda)=\widetilde{M_0^-}(\lambda)\setminus\{s_0\}.$$

Для $\lambda\in l(\varepsilon)$ рассмотрим следующую систему интегральных уравнений относительно функций $\widetilde{\eta}_\nu(x,\lambda)$, $\nu=0,1,\dots,m_1$:

$$\widetilde{\eta}_\nu(x,\lambda) =$$
$$= 1 + \frac{i}{m}\sum_{r=-1}^{1}\sum_{k\in K_r}\sum_{s\in N_0^-(\lambda)} \frac{\omega_s^{\nu+k+r-m+1}}{\lambda^{m-1-2k-r}}\int_x^\infty e^{i\lambda(1-\omega_s)(t-x)}p_{2k+r}(t)\widetilde{\eta}_k(t,\lambda)\,dt -$$
$$-\frac{i}{m}\sum_{r=-1}^{1}\sum_{k\in K_r}\sum_{s\in N_0^+(\lambda)} \frac{\omega_s^{\nu+k+r-m+1}}{\lambda^{m-1-2k-r}}\int_{\alpha^+}^x e^{i\lambda(\omega_s-1)(x-t)}p_{2k+r}(t)\widetilde{\eta}_k(t,\lambda)\,dt. \quad (27)$$

В силу первого из неравенств (14), система уравнений (27) тоже может быть решена на отрезке $[\alpha^+,\infty)$ методом последовательных приближений, причем полученные функции $\widetilde{\eta}_\nu(x,\lambda)$ непрерывны по λ на множестве $l(\varepsilon)$. Однако, для значений λ', достаточно близких к λ и удовлетворяющих неравенству $|\arg(i\lambda')| < |\arg(i\lambda)|$, имеют место равенства $\widetilde{M}_0^-(\lambda') = N_0^-(\lambda)$ и $M_0^+(\lambda') = N_0^+(\lambda)$. Поэтому для $\lambda \in l(\varepsilon)$ справедливы соотношения

$$\lim_{\lambda'\to\lambda} \eta_\nu(x,\lambda') = \tilde{\eta}_\nu(x,\lambda), \quad |\arg(i\lambda')| < |\arg(i\lambda)|, \quad \nu = 0,1,\dots,m_1. \tag{28}$$

Для функций $\eta_\nu(x,\lambda)$ и $\tilde{\eta}_\nu(x,\lambda)$ выполняются неравенства

$$|\eta_\nu(x,\lambda)| \le (1-h(\varepsilon))^{-1}, \quad x \in [\alpha^+,\infty), \quad |\lambda| > \varepsilon, \tag{29}$$

$$|\tilde{\eta}_\nu(x,\lambda)| \le (1-h(\varepsilon))^{-1}, \quad x \in [\alpha^+,\infty), \quad \lambda \in l(\varepsilon), \quad \nu = 0,1,\dots,m_1, \tag{30}$$

где число $h(\varepsilon)$ равно левой части первого из неравенств (14). В силу неравенств (29) и (30), из (25) и (27) для $\nu = 0,1,\dots,m_1$ следуют асимптотические соотношения

$$\eta_\nu(x,\lambda) = 1 + o(1), \quad x \to \infty, \quad |\lambda| > 0,$$

$$\tilde{\eta}_\nu(x,\lambda) = 1 + g^+(\lambda)\left(-\frac{\overline{\lambda}}{\lambda}\right)^\nu e^{-ix(\lambda+\overline{\lambda})} + o(1), \quad x \to \infty, \quad \lambda \in l(\varepsilon),$$

$$\eta_\nu(x,\lambda) = 1 + O(\lambda^{-1}), \quad |\lambda| \to \infty, \quad x \in [\alpha^+,\infty),$$

$$\tilde{\eta}_\nu(x,\lambda) = 1 + O(\lambda^{-1}), \quad |\lambda| \to \infty, \quad x \in [\alpha^+,\infty), \quad \lambda \in l(\varepsilon),$$

где функция $g^+(\lambda)$, $\lambda \in l(\varepsilon)$, с учетом равенства $\overline{\lambda} = -\lambda\omega_{s_0}$, определяется формулой

$$g^+(\lambda) = -\frac{i}{m}\sum_{r=-1}^{1}\sum_{k\in K_r}\frac{\lambda^k}{(-\overline{\lambda})^{m-1-k-r}}\int_{\alpha^+}^{\infty} e^{it(\lambda+\overline{\lambda})}p_{2k+r}(t)\tilde{\eta}_k(t,\lambda)\,dt.$$

Отсюда следует, что $g^+(\lambda) = O(\lambda^{-1})$ при $|\lambda| \to \infty$, $\lambda \in l(\varepsilon)$. Теперь докажем разрешимость системы уравнений (25) на отрезке $(-\infty,\alpha^+]$, считая известным ее решение на $[\alpha^+,\infty)$. С этой целью обозначим

$$\zeta_s(\lambda) = \frac{i}{m}\sum_{r=-1}^{1}\sum_{k\in K_r}\frac{\omega_s^{k+r-m+1}}{\lambda^{m-1-2k-r}}\int_{\alpha^+}^{\infty} e^{i(1-\omega_s)\lambda t}p_{2k+r}(t)\eta_k(t,\lambda)\,dt, \quad s \in \widetilde{M}_0^-(\lambda)$$

и запишем систему (25) в виде

$$\eta_\nu(x,\lambda) = 1 + \sum_{s\in\widetilde{M}_0^-(\lambda)} \omega_s^\nu\zeta_s(\lambda)e^{i(\omega_s-1)\lambda x} +$$
$$+\frac{i}{m}\sum_{r=-1}^{1}\sum_{k\in K_r}\sum_{s=0}^{m-1}\frac{\omega_s^{\nu+k+r-m+1}}{\lambda^{m-1-2k-r}}\int_x^{\alpha^+} e^{i\lambda(\omega_s-1)(x-t)}p_{2k+r}(t)\eta_k(t,\lambda)\,dt,$$

где $\nu = 0,1,\dots,m_1$. Эта система интегральных уравнений Вольтерра может быть решена на отрезке $(-\infty,\alpha^+]$ методом последовательных приближений.

Аналогично доказывается разрешимость системы уравнений (27) на отрезке $(-\infty, \alpha^+]$. Ясно, что полученные функции $\eta_\nu(x,\lambda)$ для каждого $x \in (-\infty,\infty)$ голоморфны по λ на открытом множестве $\Omega(\varepsilon)$ и удовлетворяют соотношениям (26). Для каждого $x \in (-\infty,\infty)$ функции $\widetilde{\eta}_\nu(x,\lambda)$ непрерывны по λ на множестве $l(\varepsilon)$ и удовлетворяют соотношениям (28). Из (27) следует, что для каждого $\lambda \in l(\varepsilon)$ функции

$$\widetilde{\xi}_\nu(x,\lambda) = \lambda^\nu e^{i\lambda x}\widetilde{\eta}_\nu(x,\lambda), \quad \nu = 0,1,\dots,m_1$$

удовлетворяют системе интегральных уравнений, получающейся из (24) заменой $\widetilde{M}_0^-(\lambda)$ и $M_0^+(\lambda)$ соответственно на $N_0^-(\lambda)$ и $N_0^+(\lambda)$. Из (24) и аналогичных интегральных уравнений для $\widetilde{\xi}_\nu(x,\lambda)$ следует, что

$$\xi_\nu(x,\lambda) = \xi_0^{[\nu]}(x,\lambda), \quad \widetilde{\xi}_\nu(x,\lambda) = \widetilde{\xi}_0^{[\nu]}(x,\lambda), \quad \nu = 0,1,\dots,m_1. \tag{31}$$

Положим $y^+(x,\lambda) = \xi_0(x,\lambda)$ и $\widetilde{y}^+(x,\lambda) = \widetilde{\xi}_0(x,\lambda)$. Тогда, в силу (31) и (24), для квазипроизводных $y^{+[\nu]}(x,\lambda)$, $\nu = 0,1,\dots,m-1$, получим следующие равенства (сначала для $\nu \le m_1$, а затем для остальных значений ν, включая $\nu = m-1$) :

$$\begin{aligned} y^{+[\nu]}(x,\lambda) &= \lambda^\nu e^{i\lambda x} + \\ &+ \frac{i}{m}\sum_{r=-1}^{1}\sum_{k\in K_r}\sum_{s\in\widetilde{M}_0^-(\lambda)} (\lambda\omega_s)^{\nu+k+r-m+1}\int_x^\infty e^{i\omega_s\lambda(x-t)}p_{2k+r}(t)y^{+[k]}(t,\lambda)\,dt - \\ &- \frac{i}{m}\sum_{r=-1}^{1}\sum_{k\in K_r}\sum_{s\in M_0^+(\lambda)} (\lambda\omega_s)^{\nu+k+r-m+1}\int_{\alpha^+}^x e^{i\omega_s\lambda(x-t)}p_{2k+r}(t)y^{+[k]}(t,\lambda)\,dt. \end{aligned} \tag{32}$$

Из равенств (32), соответствующих $\nu = 0$ и $\nu = m$, следует, что функция $y^+(x,\lambda)$ является решением дифференциального уравнения (1). Для квазипроизводных $\widetilde{y}^{+[\nu]}(x,\lambda)$ имеют место равенства, получающиеся из (32) заменой $\widetilde{M}_0^-(\lambda)$ и $M_0^+(\lambda)$ соответственно на $N_0^-(\lambda)$ и $N_0^+(\lambda)$. Поэтому функция $\widetilde{y}^+(x,\lambda)$ тоже является решением дифференциального уравнения (1). В силу отмеченных свойств функций $\eta_\nu(x,\lambda)$, квазипроизводные $y^{+[\nu]}(x,\lambda)$ удовлетворяют всем требованиям леммы (сначала для $\nu \le m_1$, а затем, в силу (32), для остальных значений $\nu \le m-1$).

Для каждого λ, $|\lambda| > \varepsilon$, решение $y^-(x,\lambda)$ дифференциального уравнения (1), удовлетворяющее требованиям леммы, можно получить из следующей системы интегральных уравнений относительно квазипроизводных $y^{-[\nu]}(x,\lambda)$, $\nu = 0,1,...,m-1$:

$$y^{-[\nu]}(x,\lambda) = \lambda^{\nu} e^{i\lambda x} + \\ + \frac{i}{m} \sum_{r=-1}^{1} \sum_{k \in K_r} \sum_{s \in M_0^-(\lambda)} (\lambda\omega_s)^{\nu+k+r-m+1} \int_x^{\alpha^-} e^{i\omega_s\lambda(x-t)} p_{2k+r}(t) y^{-[k]}(t,\lambda)\, dt - \\ - \frac{i}{m} \sum_{r=-1}^{1} \sum_{k \in K_r} \sum_{s \in \widetilde{M}_0^+(\lambda)} (\lambda\omega_s)^{\nu+k+r-m+1} \int_{-\infty}^{x} e^{i\omega_s\lambda(x-t)} p_{2k+r}(t) y^{-[k]}(t,\lambda)\, dt, \quad (33)$$

где число α^- удовлетворяет второму из неравенств (14). В силу произвольности $\varepsilon > 0$, для любого $\lambda \neq 0$ дифференциальное уравнение (1) обладает решениями $y^{\pm}(x,\lambda)$, удовлетворяющими асимптотическим равенствам (10). Лемма 1 доказана.

§2. ИССЛЕДОВАНИЕ МАТРИЦЫ РАССЕЯНИЯ

Лемма 2. *Для каждого $\lambda \in \Omega \setminus G$, где $G \subset \Omega \setminus \Omega_{m-1}$ – некоторое конечное или счетное ограниченное множество, не имеющее предельных точек в Ω, дифференциальное уравнение (1) обладает единственным решением $u(x,\lambda)$ таким, что функция $e^{-i\lambda x}u(x,\lambda)$ ограничена на всей оси $(-\infty,\infty)$ и $\lim_{x\to\infty} e^{-i\lambda x}u(x,\lambda) = 1$. Для $u(x,\lambda)$ имеют место асимптотические равенства*

$$u^{[\nu]}(x,\lambda) = \lambda^{\nu} e^{i\lambda x}(1+o(1)), \quad x \to \infty, \qquad (34)$$

$$u^{[\nu]}(x,\lambda) = \lambda^{\nu} e^{i\lambda x}(a_0(\lambda)+o(1)), \quad x \to -\infty, \qquad (35)$$

$$u^{[\nu]}(x,\lambda) = \lambda^{\nu} e^{i\lambda x}(1+O(\lambda^{-1})), \quad |\lambda| \to \infty, \quad \nu = 0,1,...,m-1, \qquad (36)$$

где $a_0(\lambda)$ – некоторая функция, голоморфная на открытом множестве $\Omega \setminus G$, такая, что $a_0(\lambda) = 1 + O(\lambda^{-1})$ при $|\lambda| \to \infty$. При этом, квазипроизводные $u^{[\nu]}(x,\lambda)$, $\nu = 0,1,...,m-1$, голоморфны по λ на множестве $\Omega \setminus G$, а G является множеством полюсов функции $u(x,\lambda)$.

Для каждого $\lambda \in l \setminus G'$, где $G' \subset l$ – некоторое ограниченное множество нулевой лебеговой линейной меры, такое, что $G' \cap \{0\}$ замкнуто и содержит все предельные точки множества G при λ' стремящемся к λ, существуют пределы :

$$\lim_{\lambda'\to\lambda} u^{[\nu]}(x,\lambda') = u^{+[\nu]}(x,\lambda), \text{ при } \arg(i\lambda') > \arg(i\lambda), \ \nu = 0,1,\dots,m-1, \quad (37)$$

$$\lim_{\lambda'\to\lambda} u^{[\nu]}(x,\lambda') = u^{-[\nu]}(x,\lambda), \text{ при } \arg(i\lambda') < \arg(i\lambda), \ \nu = 0,1,\dots,m-1, \quad (38)$$

$$\lim_{\lambda'\to\lambda} a_0(\lambda') = a_0^+(\lambda), \quad \text{при } \arg(i\lambda') > \arg(i\lambda), \quad (39)$$

$$\lim_{\lambda'\to\lambda} a_0(\lambda') = a_0^-(\lambda), \quad \text{при } \arg(i\lambda') < \arg(i\lambda), \quad (40)$$

где $u^+(x,\lambda)$ и $u^-(x,\lambda)$ – решения (1). Квазипроизводные $u^{\pm[\nu]}(x,\lambda)$ и функции $a_0^\pm(\lambda)$ непрерывны по λ на множестве $l\setminus G'$, причем множество нулей функции $a_0^\pm(\lambda)$ ограничено и имеет нулевую линейную меру Лебега. Для каждого $\lambda\in l\setminus G'$ и $\nu=0,1,\dots,m-1$, при $x\to-\infty$ имеют место асимптотические равенства

$$u^{\pm[\nu]}(x,\lambda) = \lambda^\nu e^{i\lambda x}\left\{1+\varphi^\pm(\lambda)\left(-\frac{\bar\lambda}{\lambda}\right)^\nu e^{-ix(\lambda+\bar\lambda)} + o(1)\right\}, \quad (41)$$

$$u^{\pm[\nu]}(x,\lambda) = \lambda^\nu e^{i\lambda x}\left\{a_0^\pm(\lambda)+\psi^\pm(\lambda)\left(-\frac{\bar\lambda}{\lambda}\right)^\nu e^{-ix(\lambda+\bar\lambda)} + o(1)\right\}, \quad (42)$$

где $\varphi^\pm(\lambda)$, $\psi^\pm(\lambda)$ – некоторые функции, непрерывные на множестве $l\setminus G'$, причем $\varphi^+(\lambda)=\psi^-(\lambda)=0$ при $\operatorname{Re}\lambda>0$ и $\varphi^-(\lambda)=\psi^+(\lambda)=0$ при $\operatorname{Re}\lambda<0$. Кроме того, справедливы асимптотические равенства

$$a_0^\pm(\lambda) = 1+O(\lambda^{-1}), \quad \varphi^\pm(\lambda)=O(\lambda^{-1}), \quad \psi^\pm(\lambda)=O(\lambda^{-1}), \quad |\lambda|\to\infty,$$
$$u^{\pm[\nu]}(x,\lambda) = \lambda^\nu e^{i\lambda x}(1+O(\lambda^{-1})), \quad x\in(-\infty,\infty), \quad \nu=0,1,\dots,m-1. \quad (43)$$

Доказательство леммы 2. Пусть $y_k^+(x,\lambda)$ и $y_k^-(x,\lambda)$, $k=0,1,\dots,m-1$ некоторые решения уравнения (1), обладающие асимптотикой (13). Если для $\lambda\in\Omega$ существует решение $u(x,\lambda)$ уравнения (1), удовлетворяющее требованиям леммы, то оно представимо в виде следующих линейных комбинаций решений $y_k^+(x,\lambda)$ и $y_k^-(x,\lambda)$:

$$u(x,\lambda) = y_0^+(x,\lambda) + \sum_{s\in M_0^+(\lambda)} a_s(\lambda) y_s^+(x,\lambda), \quad (44)$$

$$u(x,\lambda) = a_0(\lambda) y_0^-(x,\lambda) + \sum_{s\in M_0^-(\lambda)} a_s(\lambda) y_s^-(x,\lambda), \quad (45)$$

где множества $M_0^+(\lambda)$ и $M_0^-(\lambda)$ определяются по формулам (22) и (23), причем $M_0^+(\lambda)\cap M_0^-(\lambda)=\emptyset$ и $M_0^+(\lambda)\cup M_0^-(\lambda)=\{1,\dots,m-1\}$. Поэтому $u(x,\lambda)$ существует лишь тогда, когда существуют коэффициенты $a_s(\lambda)$, $s=0,1,\dots,m-1$, для которых выполняется равенство

$$y_0^+(x,\lambda)+\sum_{s\in M_0^+(\lambda)} a_s(\lambda)y_s^+(x,\lambda)=a_0(\lambda)y_0^-(x,\lambda)+\sum_{s\in M_0^-(\lambda)} a_s(\lambda)y_s^-(x,\lambda).$$

Отсюда приходим к системе уравнений относительно $a_s(\lambda)$:

$$a_0(\lambda)y_0^{-[\nu]}(x,\lambda)+\sum_{s\in M_0^-(\lambda)} a_s(\lambda)y_s^{-[\nu]}(x,\lambda)-\sum_{s\in M_0^+(\lambda)} a_s(\lambda)y_s^{+[\nu]}(x,\lambda)=y_0^{+[\nu]}(x,\lambda),$$

$$\nu=0,1,...,m-1. \tag{46}$$

Определитель этой системы, с точностью до знака, совпадает с вронскианом системы решений $y_0^-(x,\lambda)$ и $y_s^\pm(x,\lambda)$, $s\in M_0^\pm(\lambda)$, дифференциального уравнения (1) и поэтому не зависит от x. Нетрудно убедиться, что для каждого $\lambda\in\Omega$ значение $W(\lambda)$ указанного вронскиана, а также значение $W_0(\lambda)$ вронскиана системы решений $y_0^+(x,\lambda)$ и $y_s^\pm(x,\lambda)$, $s\in M_0^\pm(\lambda)$, не зависят от выбора решений уравнения (1), обладающих той же асимптотикой (13). Пусть числа $\varepsilon>0$, α^+ и α^- удовлетворяют неравенствам (14), а решения уравнения (1), обладающие асимптотикой (10), выбраны так, что выполняются свойства 1) – 3) леммы 1. Решения $y_k^\pm(x,\lambda)$, $k=0,1,...,m-1$, определим по формулам (11). Тогда для каждого k решения $y_k^\pm(x,\lambda)$ и их квазипроизводные голоморфны по λ на открытом множестве $\overline{\omega}_k\Omega(\varepsilon)=\{\lambda\overline{\omega}_k:\lambda\in\Omega(\varepsilon)\}$. Поэтому функции $W(\lambda)$ и $W_0(\lambda)$ голоморфны на открытом множестве $\widetilde{\Omega}(\varepsilon)$ (см. (9)). Пусть $\widetilde{y}^\pm(x,\lambda)$, $\lambda\in l(\varepsilon)$ – решения уравнения (1), определенные из соотношений (18) и (19). Для $\lambda\in l_0(\varepsilon)\cup l_m(\varepsilon)$ положим $\widetilde{y}^\pm(x,\lambda)=y^\pm(x,\lambda)$, и для $\lambda\in\widetilde{l}(\varepsilon)$ (см. (8)) решения $\widetilde{y}_k^\pm(x,\lambda)$ уравнения (1) определим по формулам

$$\widetilde{y}_k^\pm(x,\lambda)=\widetilde{y}^\pm(x,\lambda\omega_k),\quad k=0,1,...,m-1. \tag{47}$$

Из асимптотических равенств (20) следует, что

$$\widetilde{y}_k^\pm(x,\lambda)=\sum_{j\in\widetilde{M}_k^\pm(\lambda)} h_{kj}^\pm(\lambda)y_k^\pm(x,\lambda),\quad k=0,1,...,m-1, \tag{48}$$

где $h_{kj}^\pm(\lambda)$ – некоторые непрерывные на множестве $\widetilde{l}(\varepsilon)$ функции, причем $h_{kk}^\pm(\lambda)=$ $=1$. В силу (16) – (19), при любом $\lambda\in l(\varepsilon)$ существуют пределы

$$\lim_{\lambda'\to\lambda} y_k^+(x,\lambda')=\xi_k^+(x,\lambda)=\begin{cases} y_k^+(x,\lambda), & \mathrm{Re}\,(\lambda\omega_k)\geq 0,\\ \widetilde{y}_k^+(x,\lambda), & \mathrm{Re}\,(\lambda\omega_k)<0,\end{cases}\quad \arg\,(i\lambda')>\arg\,(i\lambda), \tag{49}$$

$$\lim_{\lambda'\to\lambda} y_k^+(x,\lambda') = \eta_k^+(x,\lambda) = \begin{cases} \widetilde{y}_k^+(x,\lambda), & \operatorname{Re}(\lambda\omega_k) > 0, \\ y_k^+(x,\lambda), & \operatorname{Re}(\lambda\omega_k) \le 0, \end{cases} \quad \arg(i\lambda') < \arg(i\lambda), \tag{50}$$

$$\lim_{\lambda'\to\lambda} y_k^-(x,\lambda') = \eta_k^-(x,\lambda) = \begin{cases} \widetilde{y}_k^-(x,\lambda), & \operatorname{Re}(\lambda\omega_k) > 0, \\ y_k^-(x,\lambda), & \operatorname{Re}(\lambda\omega_k) \le 0, \end{cases} \quad \arg(i\lambda') > \arg(i\lambda), \tag{51}$$

$$\lim_{\lambda'\to\lambda} y_k^-(x,\lambda') = \xi_k^-(x,\lambda) = \begin{cases} y_k^-(x,\lambda), & \operatorname{Re}(\lambda\omega_k) \ge 0, \\ \widetilde{y}_k^-(x,\lambda), & \operatorname{Re}(\lambda\omega_k) < 0, \end{cases} \quad \arg(i\lambda') < \arg(i\lambda). \tag{52}$$

Аналогичные соотношения верны для квазипроизводных $y_k^{\pm[\nu]}(x,\lambda)$. В силу равенств (48) - (52), определители $W(\lambda)$ и $W_0(\lambda)$ непрерывны в каждой точке $\lambda \in l_0(\varepsilon) \cup l_m(\varepsilon)$ и, следовательно, голоморфны на открытом множестве $\Omega(\varepsilon)$. Кроме того, для каждого $\lambda \in l(\varepsilon)$ существуют конечные пределы

$$\lim_{\lambda'\to\lambda} W(\lambda') = W^+(\lambda), \quad \lim_{\lambda'\to\lambda} W_0(\lambda') = W_0^+(\lambda), \quad \arg(i\lambda') > \arg(i\lambda), \tag{53}$$

$$\lim_{\lambda'\to\lambda} W(\lambda') = W^-(\lambda), \quad \lim_{\lambda'\to\lambda} W_0(\lambda') = W_0^-(\lambda), \quad \arg(i\lambda') < \arg(i\lambda), \tag{54}$$

причем, функции $W^\pm(\lambda)$ и $W_0^\pm(\lambda)$ непрерывны на множестве $l(\varepsilon)$. Ввиду произвольности ε функции $W(\lambda)$ и $W_0(\lambda)$ голоморфны на открытом множестве Ω, и пределы (53), (54) существуют для каждого $\lambda \in l(\varepsilon)$ и непрерывны на l. Если $\lambda \in \Omega_{m-1}$, то $W(\lambda)$ является вронскианом линейно независимой системы решений $y_s^-(x,\lambda)$, $s = 0,1,\dots,m-1$, уравнения (1), следовательно $W(\lambda) \neq 0$. В силу равенств (48) - (52) пределы $W^+(\lambda)$, $\lambda \in l_{m-1}$, и $W^-(\lambda)$, $\lambda \in l_{1-m}$, тоже равны вронскиану отмеченной системы решений $y_s^-(x,\lambda)$. Поэтому они отличны от нуля. Если же $\lambda \in \Omega_0$, то $W_0(\lambda) \neq 0$ есть вронскиан линейно независимой системы решений $y_s^+(x,\lambda)$, $s = 0,1,\dots,m-1$, уравнения (1), следовательно $W_0(\lambda) \neq 0$. Кроме того, пределы $W_0^+(\lambda)$, $\lambda \in l_{-1}$, и $W_0^-(\lambda)$, $\lambda \in l_1$, равны вронскиану системы решений $y_s^+(x,\lambda)$ и отличны от нуля. Теперь выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы при $\alpha^+ = \alpha^- = 0$ выполнялись неравенства (14). Тогда, с учетом обозначений (11) и (47), из неравенств (15) и (21) получим, что при $x \ge 0$ решения $y_k^+(x,\lambda)$ и $\widetilde{y}_k^+(x,\lambda)$, и при $x \le 0$ решения $y_k^-(x,\lambda)$ и $\widetilde{y}_k^-(x,\lambda)$ для $k,\nu = 0,1,\dots,m-1$ удовлетворяют асимптотическим равенствам

$$y_k^{\pm[\nu]}(x,\lambda) = (\lambda\omega_k)^\nu e^{i\omega_k\lambda x}(1 + O(\lambda^{-1})), \quad |\lambda| \to \infty, \tag{55}$$

$$\widetilde{y}_k^{\pm[\nu]}(x,\lambda) = (\lambda\omega_k)^\nu e^{i\omega_k\lambda x}(1 + O(\lambda^{-1})), \quad |\lambda| \to \infty, \quad \lambda \in \widetilde{l}(\varepsilon). \tag{56}$$

Из формул (55) и (56), соответствующих значению $x = 0$, следует, что для достаточно больших по модулю значений λ имеем $W(\lambda) \neq 0$, $W_0(\lambda) \neq 0$, $W^{\pm}(\lambda) \neq \neq 0$ и $W_0^{\pm}(\lambda) \neq 0$ Поскольку $W(\lambda) \neq 0$ при $\lambda \in \Omega_{m-1}$ и $W(\lambda)$ голоморфна на открытом множестве Ω, равенство $W(\lambda) = 0$ может выполняться лишь на некотором конечном либо счетном и ограниченном множестве G значений $\lambda \in \Omega$. При этом, множество $G \subset \Omega \setminus \Omega_{m-1}$ и не имеет предельных точек в Ω. Множество нулей функции $W^+(\lambda)W^-(\lambda)$ ($\lambda \in l$) обозначим через G'. Ввиду непрерывности функций $W^+(\lambda)$ и $W^-(\lambda)$, множество $G' \cup \{0\}$ замкнуто. Кроме того, множество $G' \cup \{0\}$ содержит все предельные точки G и, в силу граничных свойств аналитических функций, имеет нулевую линейную меру Лебега. Ясно, что аналогичные утверждения справедливы также для функций $W_0(\lambda)$, $\lambda \in \Omega$ и $W_0^{\pm}(\lambda)$, $\lambda \in l$. Таким образом, независимо от выбора решений $y_k^{\pm}(x, \lambda)$, $k = 0, 1, ..., m-1$, уравнения (1), обладающих асимптотикой (13), определитель системы (46) при $\lambda \in \Omega \setminus G$ отличен от нуля. Поэтому для каждого $\lambda \in \Omega \setminus G$ система уравнений (46) имеет единственное решение $a_s(\lambda)$, $s = 0, 1, ..., m-1$, причем

$$a_0(\lambda) = \frac{W_0(\lambda)}{W(\lambda)}. \tag{57}$$

Отсюда следует, что для каждого $\lambda \in \Omega \setminus G$ дифференциальное уравнение (1) имеет решение $u(x, \lambda)$, допускающее представления (44) и (45). Заметим, что среди функций $a_s(\lambda)$, $s = 0, 1, ..., m-1$, определенных системой уравнений (46), лишь функция $a_0(\lambda)$ не зависит от выбора решений $y_k^{\pm}(x, \lambda)$. Несмотря на это, решение $u(x, \lambda)$, удовлетворяющее требованию леммы, единственно, т. е. правые части представлений (44) и (45) не зависят от выбора $y_k^{\pm}(x, \lambda)$. Очевидно, что $u(x, \lambda)$ удовлетворяет равенствам (34) и (35). Из (57) следует, что функция $a_0(\lambda)$ голоморфна на открытом множестве $\Omega \setminus G$. Кроме того, для каждого $\lambda \in l \setminus G$ существуют конечные пределы

$$\lim_{\lambda'\to\lambda} a_0(\lambda') = a_0^+(\lambda) = \frac{W_0^+(\lambda)}{W^+(\lambda)}, \quad \text{при } \arg(i\lambda') > \arg(i\lambda), \tag{58}$$

$$\lim_{\lambda'\to\lambda} a_0(\lambda') = a_0^-(\lambda) = \frac{W_0^-(\lambda)}{W^-(\lambda)}, \quad \text{при } \arg(i\lambda') < \arg(i\lambda), \tag{59}$$

причем функции $a_0^\pm(\lambda)$ непрерывны на множестве $l \setminus G'$, а множество нулей функции $a_0^+(\lambda)a_0^-(\lambda)$ имеет нулевую линейную меру Лебега. Очевидно, что

$$u(x,\lambda) = y_0^+(x,\lambda), \quad \lambda \in \Omega_{m-1}, \tag{60}$$

$$u(x,\lambda) = a_0(\lambda)y_0^-(x,\lambda), \quad \lambda \in \Omega_0 \setminus G. \tag{61}$$

Однако, для $\lambda \in \Omega_{m-1} \cup l_{m-1} \cup l_{1-m}$ решение $y_0^+(x,\lambda)$, обладающее асимптотикой (13), единственно, непрерывно по λ на отмеченном множестве и голоморфно в секторе Ω_{m-1}. Для $\lambda \in \Omega_0 \cup l_{-1} \cup l_1$ свойства решения $y_0^-(x,\lambda)$ аналогичны, поэтому из равенств (60) и (61) следует, что решение $u(x,\lambda)$ голоморфно по λ на каждом из открытых множеств Ω_{m-1} и $\Omega_0 \setminus G$, причем для него существуют граничные функции $u^+(x,\lambda)$, $\lambda \in l_{m-1} \cup (l_{-1} \setminus G_1')$, и $u^-(x,\lambda)$, $\lambda \in l_{1-m} \cup (l_1 \setminus G_1')$, где $G_1' \subset l_1 \cup l_{-1}$ – множество нулей вронскиана $W(\lambda)$ системы решений $y_0^-(x,\lambda)$ и $y_s^+(x,\lambda)$, $s = 1, \dots, m-1$.

Для доказательства остальных утверждений леммы возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и решения $y_k^\pm(x,\lambda)$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, выберем указанным выше способом. Тогда из формул Крамера для решения $a_s(\lambda)$, $s = 0, 1, \dots, m-1$, системы уравнений (46) следует, что функции $a_s(\lambda)$ голоморфны на открытом множестве $\widetilde{\Omega}(\varepsilon) \setminus G$. Кроме того, для каждого $\lambda \in \widetilde{l}(\varepsilon) \setminus G'$ существуют конечные пределы

$$\lim_{\lambda'\to\lambda} a_s(\lambda') = a_s^+(\lambda), \quad \arg(i\lambda') > \arg(i\lambda), \tag{62}$$

$$\lim_{\lambda'\to\lambda} a_s(\lambda') = a_s^-(\lambda), \quad \arg(i\lambda') < \arg(i\lambda), \tag{63}$$

причем, функции $a_s^\pm(\lambda)$ непрерывны на множестве $\widetilde{l}(\varepsilon) \setminus G'$. Поэтому из представлений (44) и (45), с учетом (60) и (61), следует, что решение $u(x,\lambda)$ голоморфно по λ на открытом множестве $\Omega(\varepsilon) \setminus G$, причем для каждого $\lambda \in l(\varepsilon) \setminus G'$ существуют пределы (37) и (38). Ввиду произвольности ε функция $u(x,\lambda)$ голоморфна по λ на открытом множестве $\Omega \setminus G$, а пределы (37), (38) существуют для каждого

$\lambda \in l \setminus G'$. При любом $\lambda \in l(\varepsilon) \setminus G'$ из (44) и (45), для решений $u^{\pm}(x,\lambda)$ уравнения (1), определенных по (37) и (38), получим равенства

$$u^{+}(x,\lambda) = \xi_0^{+}(x,\lambda) + \sum_{s \in M_0^{+}(\lambda\omega)} a_s^{+}(\lambda)\xi_s^{+}(x,\lambda), \tag{64}$$

$$u^{+}(x,\lambda) = a_0^{+}(\lambda)\eta_0^{-}(x,\lambda) + \sum_{s \in M_0^{-}(\lambda\omega)} a_s^{+}(\lambda)\eta_s^{-}(x,\lambda), \tag{65}$$

$$u^{-}(x,\lambda) = \eta_0^{+}(x,\lambda) + \sum_{s \in M_0^{+}(\lambda\overline{\omega})} a_s^{-}(\lambda)\eta_s^{+}(x,\lambda), \tag{66}$$

$$u^{-}(x,\lambda) = a_0^{-}(\lambda)\xi_0^{-}(x,\lambda) + \sum_{s \in M_0^{-}(\lambda\overline{\omega})} a_s^{-}(\lambda)\xi_s^{-}(x,\lambda). \tag{67}$$

Здесь использованы равенство $\omega = \exp\left(\dfrac{\pi i}{4m}\right)$ и обозначения (49) – (52), (62) и (63). Воспользовавшись (48) – (52), приходим к представлениям

$$u^{+}(x,\lambda) = y_0^{+}(x,\lambda) + \sum_{s \in M_0^{+}(\lambda\omega)} b_s(\lambda)y_s^{+}(x,\lambda), \tag{68}$$

$$u^{+}(x,\lambda) = b_0(\lambda)y_0^{-}(x,\lambda) + \sum_{s \in M_0^{-}(\lambda\omega)} b_s(\lambda)y_s^{-}(x,\lambda), \tag{69}$$

$$u^{-}(x,\lambda) = y_0^{+}(x,\lambda) + \sum_{s \in M_0^{+}(\lambda\overline{\omega})} c_s(\lambda)y_s^{+}(x,\lambda), \tag{70}$$

$$u^{-}(x,\lambda) = c_0(\lambda)y_0^{-}(x,\lambda) + \sum_{s \in M_0^{-}(\lambda\overline{\omega})} c_s(\lambda)y_s^{-}(x,\lambda), \tag{71}$$

где $b_0(\lambda) = a_0^{+}(\lambda)$, $c_0(\lambda) = a_0^{-}(\lambda)$, а коэффициенты $b_s(\lambda)$ и $c_s(\lambda)$, $1 \le s \le m-1$, вообще говоря, отличаются от $a_s^{+}(\lambda)$ и $a_s^{-}(\lambda)$. Из (68) и (70) следует, что при $\lambda \in l(\varepsilon) \setminus G'$ для $u^{\pm}(x,\lambda)$ выполняются асимптотические равенства (41), а из (69) и (71) следуют выполнение асимптотических равенств (42). В силу произвольности ε, асимптотические равенства (41) и (42) выполняются при любом $\lambda \in l \setminus G'$. Таким образом, представления (68) – (71) справедливы для каждого $\lambda \in$ $\in l \setminus G'$ и при любом выборе решений $y_k^{\pm}(x,\lambda)$, $k = 0, 1, ..., m-1$, уравнения (1), обладающих асимптотикой (13). Заметим, что если $\lambda \in l \setminus G'$, то для некоторого натурального числа j $(1 \le j \le m-1)$ имеет место равенство $\omega_j = -\overline{\lambda}/\lambda$, а в асимптотических формулах (41) и (42) $\varphi^{+}(\lambda) = b_j(\lambda)$ и $\psi^{-}(\lambda) = c_j(\lambda)$ при $\operatorname{Re}\lambda < 0$, а также $\varphi^{-}(\lambda) = c_j(\lambda)$ и $\psi^{+}(\lambda) = b_j(\lambda)$ при $\operatorname{Re}\lambda > 0$. Ясно, что в представлениях (68) – (71) лишь коэффициенты $b_0(\lambda)$, $c_0(\lambda)$, $b_j(\lambda)$ и $c_j(\lambda)$ не зависят от выбора решений $y_k^{\pm}(x,\lambda)$.

Пусть решения $y_k^{\pm}(x,\lambda)$, $k = 0,1,...,m-1$, уравнения (1) выбраны так, что для $x \geq 0$ решения $y_k^+(x,\lambda)$ и $\widetilde{y}_k^+(x,\lambda)$, а для $x \leq 0$ – решения $y_k^-(x,\lambda)$ и $\widetilde{y}_k^-(x,\lambda)$, удовлетворяют асимптотическим равенствам (55) и (56). Из этих равенств, соответствующих значению $x = 0$ и из формулы Крамера для решения $a_s(\lambda)$, $s = 0,1,...,m-1$, системы (46) следует, что при $|\lambda| \to \infty$ справедливы асимптотические равенства

$$a_0(\lambda) = 1 + O(\lambda^{-1}), \quad a_0^{\pm}(\lambda) = 1 + O(\lambda^{-1}),$$

$$a_s(\lambda) = O(\lambda^{-1}), \quad a_s^{\pm}(\lambda) = O(\lambda^{-1}), \qquad s = 1,...,m-1.$$

Но тогда, в силу равенств (49) – (52), (55) и (56), из представлений (44), (45) и (64) – (67) получим асимптотические равенства (36) и (43). Отметим, что справедливость асимптотических равенств (43) можно доказать также но основе представлений (68) и (71). Действительно, из (68) – (71) следует, что

$$b_0(\lambda)y_0^{-[\nu]}(x,\lambda) + \sum_{s\in M_0^-(\lambda\omega)} b_s(\lambda)y_s^{-[\nu]}(x,\lambda) - \sum_{s\in M_0^+(\lambda\omega)} b_s(\lambda)y_s^{+[\nu]}(x,\lambda) = y_0^{+[\nu]}(x,\lambda),$$

$$c_0(\lambda)y_0^{-[\nu]}(x,\lambda) + \sum_{s\in M_0^-(\lambda\overline{\omega})} c_s(\lambda)y_s^{-[\nu]}(x,\lambda) - \sum_{s\in M_0^+(\lambda\overline{\omega})} c_s(\lambda)y_s^{+[\nu]}(x,\lambda) = y_0^{+[\nu]}(x,\lambda),$$

$$\nu = 0,1,...,m-1.$$

Полученные равенства будем рассматривать как системы уравнений относительно $b_s(\lambda)$ и $c_s(\lambda)$, $s = 0,1,...,m-1$. Решая эти системы с помощью формул Крамера и учитывая равенства (55) для $x = 0$ получим, что при $|\lambda| \to \infty$:

$$b_0(\lambda) = 1 + O(\lambda^{-1}), \quad c_0(\lambda) = 1 + O(\lambda^{-1}),$$

$$b_s(\lambda) = O(\lambda^{-1}), \quad c_s(\lambda) = O(\lambda^{-1}), \qquad s = 1,...,m-1.$$

Поэтому, в силу (55), из представлений (68) – (71) вытекает справедливость асимптотических равенств (43) и асимптотических равенств леммы для функций $\varphi^{\pm}(\lambda)$ и $\psi^{\pm}(\lambda)$. Лемма доказана.

Введем следующие множества комплексных чисел :

$$\widetilde{G} = \{\lambda\omega_k : \lambda \in G, \ k = 0,1,...,m-1\},$$

$$\widetilde{G}' = \{\lambda\omega_k : \lambda \in G' \cup (l_0 \cap G), \ k = 0,1,...,m-1\},$$

где G и G' – указанные в лемме 2 множества. Далее, рассмотрим следующие решения уравнения (1) :

$$u_k(x,\lambda) = u(x,\lambda\omega_k), \quad \lambda \in \widetilde{\Omega} \setminus \widetilde{G}, \quad k = 0,1,...,m-1, \tag{72}$$

$$u_k^{\pm}(x,\lambda) = u^{\pm}(x,\lambda\omega_k), \quad \lambda \in \widetilde{l} \setminus \widetilde{G}', \quad k = 0,1,...,m-1, \tag{73}$$

где $u(x,\lambda)$ и $u^{\pm}(x,\lambda)$ – указанные в лемме 2 решения уравнения (1), а $\widetilde{\Omega}, \widetilde{l}$ – множества, определенные по формулам (8) и (9), причем, для $\lambda \in l_m \cup (l_0 \setminus G)$ полагаем, что $u^+(x,\lambda) = u^-(x,\lambda) = u(x,\lambda)$. Из (34) и (41) следует, что каждая из систем решений $u_k^+(x,\lambda), u_k^-(x,\lambda)$ и $u_k(x,\lambda)$, $k = 0,1,...,m-1$, фундаментальна. Тем самым, для каждого $\lambda \in \widetilde{l} \setminus \widetilde{G}'$ получим две фундаментальные системы решений уравнения (1) : $u_k^+(x,\lambda)$ и $u_k^-(x,\lambda)$, $k = 0,1,...,m-1$. Поэтому существует невырожденная матрица

$$S(\lambda) = \Big(S_{kj}(\lambda)\Big)_{k,j=0}^{m-1}, \quad \lambda \in \widetilde{l} \setminus \widetilde{G}', \tag{74}$$

преобразующая систему решений $u_k^+(x,\lambda)$ в систему решений $u_k^-(x,\lambda)$:

$$u_k^-(x,\lambda) = \sum_{j=0}^{m-1} S_{kj}(\lambda) u_j^+(x,\lambda), \quad k = 0,1,...,m-1. \tag{75}$$

Матричная функция $S(\lambda)$, которая, очевидно, непрерывна в своей области определения, была введена в работе [4] и называется ***матрицей рассеяния дифференциального оператора*** L. В связи с этим отметим, что приведенное выше доказательство существования решения $u(x,\lambda)$ уравнения (1), обладающего асимптотикой (34), (35), значительно проще доказательства аналогичного утверждения в [4]. Кроме того, полученные представления (68) – (71) решений $u^{\pm}(x,\lambda)$ уравнения (1) позволяют выяснить структуру матрицы $S(\lambda)$.

Теорема 1. *Для матрицы рассеяния $S(\lambda)$ дифференциального оператора L порядка $m \geq 3$ справедливы следующие утверждения :*

1) Для любого $\lambda \in \widetilde{l} \setminus \widetilde{G}'$ и любого целого числа n $(0 \leq n \leq m-1)$

$$S_{kj}(\lambda\omega_n) = S_{k'j'}(\lambda), \quad k,j = 0,1,...,m-1, \tag{76}$$

где k' и j' определяются из равенств $\omega_{k'} = \omega_k\omega_n$ и $\omega_{j'} = \omega_j\omega_n$. Следовательно, матричная функция $S(\lambda)$ вполне определяется своими значениями лишь на двух произвольных лучах (7) с номерами разной четности (в частности, на двух соседних лучах или, в случае нечетного m, на двух лучах, симметричных относительно вещественной оси).

2) Для каждого $\lambda \in \widetilde{l} \setminus \widetilde{G}'$ имеют место неравенства

$$S_{kj}(\lambda) = 0, \quad k \neq j, \quad \lambda\omega_k + \overline{\lambda\omega_j} \neq 0, \tag{77}$$

$$S_{kk}(\lambda) = 1, \quad \mathrm{Re}\,(\lambda\omega_k) \leq 0, \tag{78}$$

$$S_{kk}(\lambda) = 1 + S_{kj}(\lambda)S_{jk}(\lambda), \quad \mathrm{Re}\,(\lambda\omega_k) > 0, \quad \lambda\omega_k + \overline{\lambda\omega_j} = 0. \tag{79}$$

Следовательно, для каждого $\lambda \in \widetilde{l} \setminus \widetilde{G}'$ матрица $S(\lambda)$ вполне определяется лишь теми своими элементами $S_{kj}(\lambda)$, для которых $k \neq j$ и $\lambda\omega_k + \overline{\lambda\omega_j} = 0$. Число этих элементов при нечетном m равно $m-1$, а при четном m на одном из любых двух соседних лучей (7) равно $m-2$, на другом равно m.

Доказательство. Равенство (76) вытекает из (73) и (75). Из равенств (68) – (71), учитывая (11) и (73), получаем

$$u_k^+(x,\lambda) = y_k^+(x,\lambda) + \sum_{n\in M_k^+(\lambda\omega)} b_{kn}(\lambda)y_n^+(x,\lambda), \tag{80}$$

$$u_k^+(x,\lambda) = b_{kk}(\lambda)y_k^-(x,\lambda) + \sum_{n\in M_k^-(\lambda\omega)} b_{kn}(\lambda)y_n^-(x,\lambda), \tag{81}$$

$$u_k^-(x,\lambda) = y_k^+(x,\lambda) + \sum_{n\in M_k^+(\lambda\overline{\omega})} c_{kn}(\lambda)y_n^+(x,\lambda), \tag{82}$$

$$u_k^-(x,\lambda) = c_{kk}(\lambda)y_k^-(x,\lambda) + \sum_{n\in M_k^-(\lambda\overline{\omega})} c_{kn}(\lambda)y_n^-(x,\lambda), k = 0, 1, ..., m-1. \tag{83}$$

Здесь множества $M_k^{\pm}(\lambda)$ определяются по формулам (22) и (23), $b_{kn}(\lambda) = b_s(\lambda\omega_k)$ и $c_{kn}(\lambda) = c_s(\lambda\omega_k)$, причем число n определяется из равенства $\omega_n = \omega_k\omega_s$. Пользуясь представлениями (80) – (83), для каждого k $(0 \leq k \leq m-1)$ из равенств (75) получаем

$$y_k^+(x,\lambda) + \sum_{n\in M_k^+(\lambda\overline{\omega})} c_{kn}(\lambda)y_n^+(x,\lambda) =$$

$$= \sum_{j=0}^{m-1} S_{kj}(\lambda) \left\{ y_j^+(x,\lambda) + \sum_{n\in M_j^+(\lambda\omega)} b_{jn}(\lambda) y_n^+(x,\lambda) \right\}, \tag{84}$$

$$c_{kk}(\lambda) y_k^-(x,\lambda) + \sum_{n\in M_k^-(\lambda\overline{\omega})} c_{kn}(\lambda) y_n^-(x,\lambda) =$$

$$= \sum_{j=0}^{m-1} S_{kj}(\lambda) \left\{ b_{jj}(\lambda) y_j^-(x,\lambda) + \sum_{n\in M_j^-(\lambda\omega)} b_{jn}(\lambda) y_n^-(x,\lambda) \right\}. \tag{85}$$

После перестановки порядка суммирования (84) – (85) принимают вид

$$y_k^+(x,\lambda) + \sum_{n\in M_k^+(\lambda\overline{\omega})} c_{kn}(\lambda) y_n^+(x,\lambda) =$$

$$= \sum_{n=0}^{m-1} y_n^+(x,\lambda) \left\{ S_{kn}(\lambda) + \sum_{j\in M_n^-(\lambda\omega)} b_{jn}(\lambda) S_{kj}(\lambda) \right\},$$

$$c_{kk}(\lambda) y_k^-(x,\lambda) + \sum_{n\in M_k^-(\lambda\overline{\omega})} c_{kn}(\lambda) y_n^-(x,\lambda) =$$

$$= \sum_{n=0}^{m-1} y_n^+(x,\lambda) \left\{ b_{nn}(\lambda) S_{kn}(\lambda) + \sum_{j\in M_n^+(\lambda\omega)} b_{jn}(\lambda) S_{kj}(\lambda) \right\}.$$

Отсюда следует, что

$$S_{kk}(\lambda) + \sum_{j\in M_k^-(\lambda\omega)} b_{jk}(\lambda) S_{kj}(\lambda) = 1, \tag{86}$$

$$S_{kn}(\lambda) + \sum_{j\in M_n^-(\lambda\omega)} b_{jn}(\lambda) S_{kj}(\lambda) = c_{kn}(\lambda), \quad n \in M_k^+(\lambda\overline{\omega}), \tag{87}$$

$$S_{kn}(\lambda) + \sum_{j\in M_n^-(\lambda\omega)} b_{jn}(\lambda) S_{kj}(\lambda) = 0, \quad n \in M_k^-(\lambda\overline{\omega}), \tag{88}$$

$$b_{nn}(\lambda) S_{kn}(\lambda) + \sum_{j\in M_n^+(\lambda\omega)} b_{jn}(\lambda) S_{kj}(\lambda) = 0, \quad n \in M_k^+(\lambda\overline{\omega}), \tag{89}$$

$$b_{nn}(\lambda) S_{kn}(\lambda) + \sum_{j\in M_n^+(\lambda\omega)} b_{jn}(\lambda) S_{kj}(\lambda) = c_{kn}(\lambda), \quad n \in M_k^-(\lambda\overline{\omega}), \tag{90}$$

$$b_{kk}(\lambda) S_{kk}(\lambda) + \sum_{j\in M_k^+(\lambda\omega)} b_{jk}(\lambda) S_{kj}(\lambda) = c_{kk}(\lambda). \tag{91}$$

Для данного k $(0 \le k \le m-1)$ равенства (86) – (89) будем рассматривать в качестве системы уравнений относительно функций $S_{kn}(\lambda)$, $n = 0, 1, ..., m-1$. Заметим, что если $n \in M_k^-(\lambda\overline{\omega})$, то $k \in M_0^-(\lambda\omega)$ только в случае, когда

$\mathrm{Re}\,(\lambda\omega_k) < 0$ и $\lambda\omega_k + \lambda\omega_n = 0$. Если же $n \in M_k^+(\lambda\overline{\omega})$, то $k \in M_0^+(\lambda\omega)$ может быть верно лишь в случае, когда $\mathrm{Re}\,(\lambda\omega_k) > 0$ и $\lambda\omega_k + \overline{\lambda\omega_n} = 0$. Кроме того, поскольку $b_{nn}(\lambda) = b_0(\lambda\omega_n) = a_0^+(\lambda\omega_n)$, где $a_0^+(\lambda)$ – указанная в лемме 2 функция, то множество $G'' \subset \widetilde{I} \setminus \widetilde{G}'$ нулей функций $b_{nn}(\lambda)$ ограничено и имеет нулевую линейную меру Лебега. При j таком, что $j \neq k$ и $\lambda\omega_k + \overline{\lambda\omega_j} \neq 0$, из системы (88) – (89) приходим к равенству $S_{kj}(\lambda) = 0$, сначала для $\lambda \in \widetilde{I} \setminus (\widetilde{G} \cup G'')$, а затем, в силу непрерывности функций $S_{kj}(\lambda)$, для всех $\lambda \in \widetilde{I} \setminus \widetilde{G}'$. Учитывая это равенство, из (86) получаем $S_{kk}(\lambda) = 1$ при $\mathrm{Re}\,(\lambda\omega_k) \leq 0$. Если же $\mathrm{Re}\,(\lambda\omega_k) < 0$, а число n таково, что $\lambda\omega_k + \overline{\lambda\omega_n} = 0$, то из (88) получаем

$$S_{kn}(\lambda) + b_{kn}(\lambda) S_{kk}(\lambda) = 0,$$

и, следовательно

$$S_{kn}(\lambda) = -b_{kn}(\lambda), \qquad \mathrm{Re}\,(\lambda\omega_k) < 0, \quad \lambda\omega_k + \overline{\lambda\omega_n} = 0. \tag{92}$$

В случае, когда $(\lambda\omega_k) > 0$, из (87), для значения n такого, что $\lambda\omega_k + \overline{\lambda\omega_n} = 0$, получаем

$$S_{kn}(\lambda) = c_{kn}(\lambda), \qquad \mathrm{Re}\,(\lambda\omega_k) > 0, \quad \lambda\omega_k + \overline{\lambda\omega_n} = 0, \tag{93}$$

а из (86) получаем равенство $S_{kk}(\lambda) + b_{nk}(\lambda) S_{kn}(\lambda) = 1$, которое, в силу (92) и (93), можно записать в виде

$$S_{kk}(\lambda) = 1 - b_{nk}(\lambda) c_{kn}(\lambda), \qquad \mathrm{Re}\,(\lambda\omega_k) > 0, \quad \lambda\omega_k + \overline{\lambda\omega_n} = 0, \tag{94}$$

или в виде $S_{kk}(\lambda) = 1 + S_{nk}(\lambda) S_{kn}(\lambda)$. Теорема доказана.

С учетом (77) и (78) из соотношений (86) – (91) нетрудно вывести равенства

$$
\begin{aligned}
& c_{kj}(\lambda) = b_{kj}(\lambda), \qquad \mathrm{Re}\,(\lambda\omega_k) = 0, \quad j = 0, 1, \dots, m-1, \\
& c_{kj}(\lambda) = b_{jj}(\lambda) S_{kj}(\lambda), \qquad \mathrm{Re}\,(\lambda\omega_k) < 0, \quad \lambda\omega_k + \overline{\lambda\omega_j} = 0, \\
& c_{kk}(\lambda) = b_{kk}(\lambda) + b_{jk}(\lambda) S_{kj}(\lambda), \qquad \mathrm{Re}\,(\lambda\omega_k) < 0, \quad \lambda\omega_k + \overline{\lambda\omega_j} = 0, \\
& b_{kj}(\lambda) S_{kk}(\lambda) + b_{jj}(\lambda) S_{kj}(\lambda) = 0, \qquad \mathrm{Re}\,(\lambda\omega_k) > 0, \quad \lambda\omega_k + \overline{\lambda\omega_j} = 0, \\
& c_{kk}(\lambda) = b_{kk}(\lambda) S_{kk}(\lambda), \qquad \mathrm{Re}\,(\lambda\omega_k) > 0, \quad \lambda\omega_k + \overline{\lambda\omega_j} = 0
\end{aligned} \tag{95}
$$

$$
\begin{aligned}
& c_{k\nu}(\lambda) = b_{k\nu}(\lambda) S_{kk}(\lambda) + b_{j\nu}(\lambda) S_{kj}(\lambda), \qquad \mathrm{Re}\,(\lambda\omega_k) \neq 0, \\
& \qquad \mathrm{Im}\,(\lambda\omega_\nu - \lambda\omega_k) \neq 0, \quad \lambda\omega_k + \overline{\lambda\omega_j} = 0.
\end{aligned} \tag{96}
$$

Из теоремы 1 следует, что задание матричной функции рассеяния $S(\lambda)$ равносильно заданию $2m-2$ комплексных функций на полупрямой, или $m-1$ комплексных функций на прямой. Значит, в обратной задаче рассеяния имеет место согласование между числом задаваемых и числом определяемых функций. Ниже доказана теорема, из которой следует, что указанное согласование сохраняется в случае вещественных коэффициентов $p_k(x)$, $k=0,1,....,m-2$.

Теорема 2. *В случае вещественных коэффициентов* $p_k(x)$, $k=0,1,...,m-2$, *для любого* $\lambda \in \widetilde{l} \setminus \widetilde{G}'$ *элементы матричной функции рассеяния (74) удовлетворяют соотношениям*

$$S_{m-j,m-k}(\overline{\lambda}) = \omega_j \overline{\omega}_k \overline{S_{kj}(\lambda)}, \quad j \neq k, \quad \lambda\omega_k + \overline{\lambda\omega_j} = 0, \tag{97}$$

где считается, что $S_{mn}(\overline{\lambda}) = S_{0n}(\overline{\lambda})$ *и* $S_{nm}(\overline{\lambda}) = S_{n0}(\overline{\lambda})$, $n=1,...,m-1$. *При этом, если* m *четно, то системы соотношений (97), соответствующие случаям* $Re\ (\lambda\omega_k) > 0$ *и* $Re\ (\lambda\omega_k) < 0$, *совпадают и, в силу (76), могут быть записаны в виде*

$$S_{k'j'}(\lambda) = \omega_j \overline{\omega}_k \overline{S_{kj}(\lambda)}, \qquad Re\ (\lambda\omega_k) > 0, \quad \lambda\omega_k + \overline{\lambda\omega_j} = 0, \tag{98}$$

где k' *и* j' *определяются из равенств* $\omega_{k'} = -\omega_k$ *и* $\omega_{j'} = -\omega_j$. *В случае нечетного* m, *для каждого* $\lambda \in \widetilde{l} \setminus \widetilde{G}'$ *число соотношений (97) равняется* $m-1$. *В случае же четного* $m=2m_0$ *число соотношений (98) равняется* $m_0 - 1$ *на одном из соседних лучей (7), а на другом оно равняется* m_0.

Доказательство. Пусть $y_k^{\pm}(x,\lambda)$, $k = 0,1,...,m-1$ – некоторые решения уравнения (1), обладающие асимптотикой (13). Если коэффициенты $p_k(x)$, $k = 0,1,...,m-2$, вещественны, то определенные по формуле (3) выражения $[y_s^{\pm}(x,\lambda), y_j^{\pm}(x,\overline{\lambda})]$ постоянны относительно x. Докажем равенства для $s = 0,1,...,m-1$:

$$[y_s^+(x,\lambda), y_j^+(x,\overline{\lambda})] = \begin{cases} m\overline{\omega}_s\lambda^{m-1} & \text{при } \overline{\omega}_j = \omega_s, \\ 0 & \text{при } \overline{\omega}_j \neq \omega_s, \ \ \mathrm{Im}\,(\lambda\overline{\omega}_j - \lambda\omega_s) \leq 0, \end{cases} \tag{99}$$

$$[y_s^-(x,\lambda), y_j^-(x,\overline{\lambda})] = \begin{cases} m\overline{\omega}_s\lambda^{m-1} & \text{при } \overline{\omega}_j = \omega_s, \\ 0 & \text{при } \overline{\omega}_j \neq \omega_s, \ \ \mathrm{Im}\,(\lambda\overline{\omega}_j - \lambda\omega_s) \geq 0. \end{cases} \tag{100}$$

В силу (13) имеем

$$[y_s^+(x,\lambda), y_j^+(x,\overline{\lambda})] = \sum_{\nu=0}^{m-1} y_s^{+[m-1-\nu]}(x,\lambda)\overline{y_j^{+[\nu]}(x,\overline{\lambda})} =$$

$$= \overline{\omega}_s\lambda^{m-1}e^{i(\omega_s-\overline{\omega}_j)\lambda x}\sum_{\nu=0}^{m-1}\left[(\overline{\omega}_s\,\overline{\omega}_j)^\nu + o(1)\right],\ x\to\infty. \quad (101)$$

Однако

$$\sum_{\nu=0}^{m-1}(\overline{\omega}_s\,\overline{\omega}_j)^\nu = \begin{cases} m & \text{при } \overline{\omega}_j = \omega_s, \\ 0 & \text{при } \overline{\omega}_j \neq \omega_s, \end{cases} \qquad s,j = 0,1,\ldots,m-1. \quad (102)$$

С учетом (102) и (101) получаем, что предел $\lim_{x\to\infty}[y_s^+(x,\lambda), y_j^+(x,\overline{\lambda})]$ равен правой части равенства (99), а это, в силу независимости выражения $[y_s^+(x,\lambda), y_j^+(x,\overline{\lambda})]$ от x, эквивалентно (99). Равенство (100) доказывается аналогично.

Для каждого $\lambda \in \widetilde{l}\setminus\widetilde{G}'$ вычислим значение выражения $[u_k^+(x,\lambda), u_n^-(x,\overline{\lambda})]$, полагая числа k и n $(0 \le k,n \le m-1)$ такими, что Re $(\lambda\omega_k) < 0$ и $\lambda\omega_k + \overline{\lambda}\omega_n = 0$. Из представлений (81) и (83), в силу (100), получим равенство $[u_k^+(x,\lambda), u_n^-(x,\overline{\lambda})] = 0$. Из (80), (82) и (99) имеем

$$[u_k^+(x,\lambda), u_n^-(x,\overline{\lambda})] = m\lambda^{m-1}\left\{\overline{\omega}_k\overline{c_{n,m-k}(\overline{\lambda})} + \omega_n b_{k,m-n}(\lambda)\right\},$$

где считается, что $b_{jm}(\lambda) = b_{j0}(\lambda)$ и $c_{jm}(\overline{\lambda}) = c_{j0}(\overline{\lambda})$, $j = 0,1,\ldots,m-1$. Поэтому

$$\overline{\omega}_k\overline{c_{n,m-k}(\overline{\lambda})} + \omega_n b_{k,m-n}(\lambda) = 0, \qquad \text{Re }(\lambda\omega_k) < 0, \quad \lambda\omega_k + \overline{\lambda}\omega_n = 0. \quad (103)$$

В силу (92) и (93) равенство (103) может быть записано в виде (97). Тем самым, равенство (97) доказано в случае Re $(\lambda\omega_k) < 0$. Заменив в (97) λ, k и j на $\overline{\lambda}$, $m-j$ и $m-k$ соответственно, легко получаем равенство (97) при Re $(\lambda\omega_k) > 0$. При четном m из условия $\lambda\omega_k + \overline{\lambda\omega_j} = 0$ следует, что $\overline{\lambda} = \lambda\omega_n$, где $\omega_n = -\omega_k\omega_j$. Поэтому, в силу (76) $S_{m-j,m-k}(\overline{\lambda}) = S_{m-j,m-k}(\lambda\omega_n) = S_{k'j'}(\lambda)$, где $\omega_{k'} = \omega_{m-j}\omega_n = -\overline{\omega}_j\omega_k\omega_j = -\omega_k$ и $\omega_{j'} = \omega_{m-k}\omega_n = -\overline{\omega}_k\omega_k\omega_j = -\omega_j$. Отсюда и из (97) приходим к равенству (98). Теорема доказана.

ABSTRACT. **Differential operator L of arbitrary order $m \ge 3$ acting in $L^2(-\infty,\infty)$ with summable coefficients is considered. The structure of the**

scattering matrix of L is investigated and in particular it is proved that in the case of self-adjoint operator as well as in general case in the inverse scattering problem there is an agreement between the numbers of given and definable functions.

ЛИТЕРАТУРА

1. D. J. Kaup, "On the inverse scattering problem for cubic eigenvalue problems of the class $\phi_{xxx} + 6Q\phi_x + 6R\phi = \lambda\phi$", Stud. Appl. Math., vol. 62, no. 3, pp. 189 – 216, 1980.
2. P. Deift, C. Tomei, E. Trubowitz, "Inverse scattering and the Boussinesq equation", Comm. Pure Appl. Math., vol. 35, no. 5, pp. 567 – 623, 1982.
3. P. J. Caudrey, "The inverse problem for a general $N \times N$ spectral equation", Physica, 6D, no. 1, pp. 51 – 66, 1982.
4. R. Beals, "The inverse problem for ordinary differential operators on the line", Amer. J. Math., vol. 107, no. 2, pp. 281 – 366, 1985.
5. И. Г. Хачатрян, "Об обратной задаче на всей оси для дифференциальных операторов произвольного порядка", Изв. АН Армении, Математика, т. 18, № 5, стр. 395 – 402, 1983.
6. В. А. Марченко, Операторы Штурма–Лиувилля и их применения, Наукова думка, Киев, 1977.
7. Б. М. Левитан, Обратные задачи Штурма–Лиувилля, Наука, Москва, 1984.
8. И. Г. Хачатрян, "О некоторых обратных задачах на полупрямой для дифференциальных операторов произвольного порядка", Функц. анализ и его прилож., т. 17, № 1, стр. 40 – 52, 1983.
9. И. Г. Хачатрян, "Об одной формуле для следов", Изв. АН Армении, Математика, т. 20, № 1, стр. 41 – 52, 1985.

10 августа 1994 Ереванский государственный университет