ФОРМУЛЫ ТИПА ГОХБЕРГА–ЛЕРЕРА–РОДМАНА ДЛЯ ЧАСТНЫХ ИНДЕКСОВ МАТРИЦЫ-ФУНКЦИИ

А. Г. Камалян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 29, № 5, 1994

В статье рассмотрена правая обобщенная факторизация Винера–Хопфа ограниченной, измеримой матрицы-функции $W = \Lambda V$, где $\Lambda = \mathrm{diag}[t^{\chi_1}, ..., t^{\chi_n}]$ с $\chi_1, ..., \chi_n \in \mathbb{Z}$, а V допускает каноническую факторизацию $V = V_- V_+$. Найдены явные формулы для частных индексов и множителей факторизации W. Эти формулы выражают частные индексы в терминах первых коэффициентов $\nu = \max_{1\leq i<j\leq n} |\chi_i - \chi_j|$ ряда Тейлора $V_-(z)$ в точке $z = \infty$. Описана зависимость частных индексов от матрицы-функции V.

В частности, полученные формулы могут быть применены в важном с точки зрения приложений случае треугольных матриц-функций с факторизуемыми диагональными элементами.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть γ – положительно ориентированный, замкнутый, спрямляемый контур в комплексной плоскости $\mathbf{C}$, ограничивающий область D_+ $(0 \in D_+)$. Через D_- будем обозначать дополнение к $D_+ \cup \gamma$ в расширенной плоскости $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$.

Пусть I – единичный оператор, а S – оператор сингулярного интегрирования вдоль γ, действующие в пространстве $L_p = L_p(\gamma)$:

$$(S\varphi)(t) = \frac{1}{\pi i} \text{ v.p. } \int_\gamma \frac{1}{\tau - t} \varphi(\tau)\, d\tau, \quad \varphi \in L_p, \quad 1 < p < \infty.$$

Далее, дополнительно будем предполагать, что контур γ таков, что оператор S ограничен в L_p. Известно, что это верно, в частности, для гладких, слабо липшицевых контуров. Здесь и всюду ниже для любого семейства L через $L^n(L^{n\times n})$ будем обозначать множество всех n-мерных векторов (матриц порядка

Данное исследование частично финансировано грантом № RYSOOO Международного научного фонда

$n \times n$) с элементами из L. Рассмотрим проекторы $P_{\pm} = 1/2(I \pm S)$ и классы функций $L_p^+ = P_+ L_p$, $L_p^- = P_- L_p$+const. Будем полагать, что операторы $P_{\pm}$ действуют в пространстве L_p^n покомпонентно. Оператор умножения на матрицу-функцию A будем обозначать той же буквой A.

Напомним, что под правой факторизацией Винера–Хопфа (WH–факторизацией) матрицы-функции $W \in L_\infty^{n\times n}$ относительно контура γ в пространстве L_p понимается представление

$$W(t) = W_-(t)\Lambda_{\overline{\kappa}}(t)W_+(t), \quad t \in \gamma, \tag{1}$$

где

$$W_+ \in [L_q^+]^{n\times n}, \quad W_+^{-1} \in [L_p^+]^{n\times n}, \ W_- \in [L_p^-]^{n\times n}, \ W_-^{-1} \in [L_q^-]^{n\times n}, \ q = \frac{p}{p-1},$$

$\Lambda_{\overline{\kappa}}(t)$ =diag$[t^{\kappa_1}, ..., t^{\kappa_n}]$, а $\kappa_1 \le \cdots \le \kappa_n$ – целые числа, называемые *правыми частными индексами* W. Если оператор $W_- P_+ W_-^{-1}$ ограничен в L_p^n, то (1) называется *обобщенной правой факторизацией* (GWH–факторизацией) матрицы-функции W. Факторизация называется *канонической*, если все частные индексы равны нулю (см. [1], [2]). Ниже рассмотрены только правые обобщенные факторизации, поэтому термин "правая" будем опускать.

Явные GWH–факторизации имеют важные применения в теориях сингулярных интегральных уравнений, уравнений Винера–Хопфа и при интегрировании нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи (см., напр., [1 – 5]). Особый интерес представляет вычисление частных индексов. В общем случае явных GWH–факторизаций в настоящее время неизвестно. Поэтому представляет интерес нахождение классов матриц-функций с явной GWH–факторизацией. Существенное продвижение в этом направлении было осуществлено И. Гохбергом, Л. Лерером и Л. Родманом. Им в частности удалось получить [6, 7] явные формулы для частных индексов матричного полинома в терминах рангов конечного числа блочно-ганкелевых (теплицевых) матриц, коэффициенты которых выписываются с помощью конечного числа степенных моментов некоторой известной матрицы-функции. Формулы типа Гохберга–Лерера–Родмана (GLR) для гельдеровских треугольных матриц-функций второго порядка, а также непрерывных, обратимых матриц–функций, допускающих мероморфное продолжение в D_+, получены В. М. Адуковым [8, 9]. Отметим, что во всех указанных работах рассматривалась классическая задача WH–факторизации, т. е. факторы и их обратные предполагались непрерывными матрицами-функциями.

В данной работе рассматривается класс матриц-функций W, представимых в виде

$$W(t) = \Lambda_{\overline{\chi}}(t)V(t), \quad t \in \gamma, \tag{2}$$

где предполагается, что $\Lambda_{\overline{\chi}}(t)$ $=\mathrm{diag}[t^{\chi_1}, ..., t^{\chi_n}]$, $\overline{\chi}$ $=\mathrm{col}[\chi_i]_{i=1}^n$ $\in$ $\mathbb{Z}^n$, и что матрицы-функции V допускают канонические GWH–факторизации : $V = V_- V_+$. Решена задача GWH-факторизации W в терминах матрицы-функции V, что эквивалентно WH-факторизации матрицы-функции $\Lambda_{\overline{\chi}} V_-$, допускающей мероморфное продолжение на D_-, которое, вообще говоря, не ограничено на γ. Специфика последней матрицы-функции (точные значения нулей и полюсов) позволяет выявить для частных индексов W экономные формулы типа GLR и в терминах нулевых пространств соответствующих матриц-функций построить точные формулы для факторов $W_\pm$.

Важным примером матриц-функций, допускающих представление (2), являются треугольные матрицы-функции с факторизуемыми диагональными элементами. Для них числа $\chi_1, ..., \chi_n$ совпадают с индексами диагональных элементов, а каноническая GWH-факторизация матрицы-функции V, в силу известных результатов И. Гохберга и М. Г. Крейна [3], сводится к решению конечного числа скалярных задач Римана (более подробно см. [1], гл. 4 и [2], гл. 4).

Автор выражает благодарность А. Б. Нерсесяну за полезные советы и

поддержку при выполнении работы.

§1 ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

1°. Пусть матрица-функция $W \in L_\infty^{n\times n}$ определена равенством (2). Обозначим

$$\chi_0 = \chi_1 + \dots + \chi_n, \quad \Delta = \{1, 2, ..., n\}, \quad \nu_- = \min_{i\in\Delta} \chi_i, \quad \nu_+ = \max_{i\in\Delta} \chi_i, \quad \nu = \nu_+ - \nu_-,$$

$$\Delta_m^1 = \{i \in \Delta;\ \chi_i < m\}, \quad \Delta_m^2 = \Delta \setminus \Delta_m^1, \quad m \in \mathbb{Z},$$

и рассмотрим следующие матрицы :

$$v_m = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma t^{-m-1} V_-(t)\, dt, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad u_m = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma t^{-m-1} V_-^{-1}(t)\, dt, \quad m \in \mathbb{Z},$$

$$w_{m,s}^{(j)} = \sum_{i=0}^{\nu_+ - j - m} v_{-i} u_{-(\nu_+ + s - m - j - i)},$$
$$j = \nu_- + 1, ..., \nu_+ - 1, \quad m = 1, ..., \nu_+ - j, \quad s = 1, ..., j - \nu_-.$$

Если Δ_1 и Δ_2 – некоторые подмножества Δ и $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$, то через $[A]_{\Delta_1\times\Delta_2}$ обозначим матрицу, полученную из матрицы A вычеркиванием всех строк с номерами из $\Delta \setminus \Delta_1$ и всех столбцов с номерами из $\Delta \setminus \Delta_2$. Обозначим через card B число элементов множества B.

Теорема 1. *Матрица-функция W, определенная равенством (2), допускает GWH-факторизацию и ее частные индексы κ_i $(i \in \Delta)$ можно вычислить по одной из следующих формул :*

$$\kappa_i = \nu_- + \text{ card}\,\{j :\ \alpha_{s,j+1} - \alpha_{s,j} < i;\ j = \nu_-, ..., \nu_+ - 1\}, \quad s = 1, 2, 3, \tag{3}$$

где $\alpha_{s,\nu_-} = 0$, $\alpha_{s,\nu_+} = n\nu_+ - \chi_0$, $\alpha_{s,j} = \dim \operatorname{Ker} K_{s,j}$, $j = \nu_- + 1, ..., \nu_+ - 1$, $s = 1, 2, 3$, *а матрицы $K_{s,j}$ определены формулами*

$$K_{1,j} = \left\| [w_{m,s}^{(j)}]_{\Delta^2_{\nu_- + 1 - m} \times \Delta^1_{j+1-s}} \right\|_{s=1,...,j-\nu_-}^{m=1,...,\nu_+ - j} \tag{4}$$

$$K_{2,j} = \left\| [u_{m-s}]_{\Delta \times \Delta^1_{\nu_+ + 1 - s}} \right\|_{s=1,...,\nu}^{m=1,...,\nu_+ - j} \tag{5}$$

$$K_{3,j} = \left\| [v_{m-s-\nu_+ +j}]_{\Delta^2_{\nu_+ +1-m} \times \Delta} \right\|_{s=1,\dots,j-\nu_-}^{m=1,\dots,\nu}, \tag{6}$$

Следствие. *Формулы (3) могут быть записаны в форме*

$$\begin{aligned} \kappa_i = & \nu_- + \ card\{j : \ r_{1,j} - r_{1,j+1} + \xi_{i+1} < i; j = \nu_-, \dots, \nu_+ - 1\} = \\ = & \nu_- + \ card\{j : \ r_{2,j} - r_{2,j+1} < i; j = \nu_-, \dots, \nu_+ - 1\} = \\ = & \nu_- + \ card\ \{j : \ r_{3,j} - r_{3,j+1} + n < i; \ j = \nu_-, \dots, \nu_+ - 1\}, \end{aligned} \tag{7}$$

где

$$\xi_j = \text{ card } \Delta_{1,j}, \qquad j \in \mathbb{Z},$$

$$r_{1,\nu_-} = r_{3,\nu_-} = r_{1,\nu_+} = r_{2,\nu_+} = 0, \quad r_{2,\nu_-} = n\nu_+ - \chi_0, \quad r_{3,\nu_+} = \chi_0 - n\nu_-,$$

$$r_{s,j} = \text{ rank } K_{s,j}, \quad s = 1, 2, 3, \quad j = \nu_- + 1, \dots, \nu_+ - 1.$$

Замечание 1. В случае $\nu = 0$ вторые слагаемые в (3) и (7) равны нулю.

Замечание 2. Фактор V_- можно подобрать таким образом, чтобы $V_-(\infty) = E$ (т. е. $v_0 = u_0 = E$, где E – единичная матрица порядка $n \times n$). Тогда в формулах (3) будут участвовать $\nu - 1$ степенных моментов и столько же матриц $K_{s,j}$. Если для матрицы-функции применимы как формулы (3), так и результаты работы [9], то в формулах типа GLR, полученных в [9], требуется знание $2(|\chi_1| + \dots + |\chi_n|) + 1$ моментов и используются столько же матриц существенно больших размерностей.

2°. Для каждого $\overline{\kappa} = \text{col}[\kappa_i]_{i=1}^n \in \mathbb{Z}^n$ введем функцию "распределения"

$$\mu_{\overline{\kappa}} : \ \mathbb{Z} \longmapsto N \cup \{0\} : \ \mu_{\overline{\kappa}}(j) = \text{ card } \{i \in \Delta : \ \kappa_i = j\}.$$

Определим отображение $\varphi_j : \mathbb{C}^{n(j-\nu_-)} \longmapsto L_p^n$ $(j > \nu_-)$ по формуле

$$\varphi_j y = \sum_{m=0}^{j-\nu_- -1} y_m t^m,$$

где $y = \text{col}[y_m]_{m=0}^{j-\nu_- -1} \in \mathbb{C}^{n(j-\nu_-)}$, $y_m \in \mathbb{C}^n$, $m = 1, \dots, j - \nu_- - 1$. Для матриц $K_{3,j}$ $(j > \nu_-)$, определенных равенством (6), рассмотрим семейства множеств $N_j = \{\varphi_j y : \ y \in \text{Ker } K_{3,j}\}$ $(j > \nu_-)$. При $j \leq \nu_-$ будем считать, что $N_j = \{0\}$.

Теорема 2. *Пусть частные индексы $\kappa_1 \leq \cdots \leq \kappa_n$ матрицы-функции W, определенной равенством (2), принимают значения $\eta_1 < \cdots < \eta_s$ и $\mu_{\overline{\kappa}}(\eta_k) = \zeta_k$ $(k = 1, ..., s)$. Тогда множества N_j $(j \in \mathbb{Z})$ обладают следующими свойствами :*

$$A. \qquad N_{j+1} = N_j + tN_j, \quad j \in \mathbb{Z} \setminus \{\eta_1, ..., \eta_s\};$$

$$B. \qquad N_{\eta_m+1} = (N_{\eta_m} + tN_{\eta_m}) \oplus M_m, \quad dim\, M_m = \zeta_m, \quad m = 1, ..., s.$$

Если $h_{m,1}, ..., h_{m,\zeta_m}$ – произвольный базис пространства M_m $(m = 1, ..., s)$, $U = [h_{1,1}, ..., h_{1,\zeta_1}, h_{2,1}, ..., h_{s,\zeta_s}]$, $W_+ = U^{-1}V_+$ и $\Lambda_{\overline{\kappa}}(t)$ $=diag[t^{\kappa_1}, ..., t^{\kappa_n}]$, то представление $W = W_-\Lambda_{\overline{\kappa}}W_+$ является GWH-факторизацией матрицы-функции W.

§2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ

1°. Пусть $\mathcal{E}_{i,m} = [E]_{\Delta\times\Delta^i_m} \cdot [E]_{\Delta^i_m\times\Delta}$ $(i = 1, 2\,; m \in \mathbb{Z})$. Рассмотрим семейство конечных проекторов :

$$\pi_j y = \sum_{s=j-\nu_+}^{-1} y_s t^s, \quad j < \nu_+,$$

$$\pi_{ij} y = \sum_{s=j-\nu_+}^{-1} \mathcal{E}_{i,j-s} y_s t^s, \quad i = 1, 2, \quad j < \nu_+,$$

$$\sigma_j y = \sum_{s=0}^{j-\nu_--1} y_s t^s, \quad j > \nu_-,$$

$$\sigma_{0j} y = \sum_{s=0}^{\nu_+-j-1} \mathcal{E}_{2,j+s+1} y_s t^s, \quad j < \nu_+,$$

$$\sigma_{ij} y = \sum_{s=0}^{j-\nu_--1} \mathcal{E}_{i,j-s} y_s t^s, \quad i = 1, 2, \quad j > \nu_-,$$

где

$$y_s = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma t^{-s-1} y(t)\, dt; \quad и \quad y \in L^n_p, \quad s \in \mathbb{Z}.$$

Будем считать, что операторы $\sigma_{0j}, \pi_j, \pi_{ij}$ $(i = 1, 2\,;\; j \geq \nu_+)$ и σ_j, σ_{ij} $(i = 1, 2\,;\; j \leq \nu_-)$ тождественно равны нулю. Введем в рассмотрение пространства

$$X_j = \operatorname{Im} \pi_j, \quad X_{ij} = \operatorname{Im} \pi_{ij}, \quad Y_j = \operatorname{Im} \sigma_j, \quad Y_{0j} = \operatorname{Im} \sigma_{0j}, \quad Y_{ij} = \operatorname{Im} \sigma_{ij},$$

$$i = 1, 2; \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Для $U \in L_\infty^{n\times n}$ через $T_1(U)$ и $T_2(U)$, соответственно, обозначим сингулярные операторы $T_1(U) = P_+U + P_-$ и $T_2(U) = UP_+ + P_-$. Далее, положим $\Lambda_j = t^{-j}\Lambda_{\overline{\chi}}$ $(j \in \mathbb{Z})$. Легко видеть, что $T_1(\Lambda_j^{-1})$ является обобщенно-обратным к $T_1(\Lambda_j)$, т. е.

$$T_1(\Lambda_j)T_1(\Lambda_j^{-1})T_1(\Lambda_j) = T_1(\Lambda_j), \quad T_1(\Lambda_j^{-1})T_1(\Lambda_j)T_1(\Lambda_j^{-1}) = T_1(\Lambda_j^{-1}).$$

Приведем некоторые элементарные свойства операторов $T_1(\Lambda_j^{\pm 1})$ и ганкелева оператора $H_j = P_+\Lambda_j P_-$ $(j \in \mathbb{Z})$:

$$\sigma_{0j}T(\Lambda_j) = T(\Lambda_j)\sigma_{1j} = \sigma_{1j}T(\Lambda_j^{-1}) = T_1(\Lambda_j^{-1})\sigma_{0j} = 0, \tag{8}$$

$$H_j\Lambda_j^{-1}P_- = P_+\Lambda_j^{-1}H_j = 0, \tag{9}$$

$$H_j = H_j\Lambda_j^{-1}H_j = \sigma_{0j}H_j = H_j\pi_{2j} = \Lambda_j\pi_{2j}, \tag{10}$$

$$\sigma_{0j} = H_j\Lambda_j^{-1} - H_j = H_j\Lambda_j^{-1}\sigma_{0j}. \tag{11}$$

Пусть $W \in L_\infty^{n\times n}$ определена равенством (2) и $W_j = t^{-j}W$ $(j \in \mathbb{Z})$. Рассмотрим семейство операторов

$$\Psi_j = I - P_+W_j - P_-VP_+, \quad \Phi_j = T_2^{-1}(V)\sigma_{1j}T_2(V), \quad R_j = T_1(\Lambda_j)T_2(V), \quad j \in \mathbb{Z},$$

отметив, что для обобщенно-обратных операторов последнего семейства имеем $R_j^{(-1)} = T_2^{-1}(V)T_1(\Lambda_j^{-1})$. Справедливость следующих тождеств проверяется непосредственно :

$$T_1(W_j)P_+ + H_j = P_+R_j, \quad j \in \mathbb{Z}, \tag{12}$$

$$\Psi_jP_+ = I + H_j - R_j, \quad j \in \mathbb{Z}, \tag{13}$$

$$R_j\Psi_j - H_j\Psi_j = \Psi_jT_1(W_j), \quad j \in \mathbb{Z}, \tag{14}$$

$$R_jR_j^{(-1)} = I - \sigma_{0j}, \quad R_j^{(-1)}R_j = I - \Phi_j, \quad j \in \mathbb{Z}. \tag{15}$$

Приведем теперь некоторые элементарные свойства оператора умножения на аналитическую в D_- матрицу-функцию.

Предложение 1. *Пусть $U^{\pm 1} \in [L_p^-]^{n\times n}$. Тогда справедливы равенства*

$$\pi_j U P_- = \pi_j U \pi_j, \quad P_+ U \sigma_j = \sigma_j U \sigma_j, \quad \pi_j U \pi_j U^{-1} \pi_j = \pi_j,$$

$$\sigma_j U \sigma_j U^{-1} \sigma_j = \sigma_j, \quad \pi_j U \pi_j U^{-1} \sigma_j = -\pi_j U \sigma_j U^{-1} \sigma_j, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

2°. Рассмотрим следующее семейство операторов

$$A_{1,2}(1,j) = H_j : X_{2,j} \longmapsto L_p^n, \quad j \in \mathbb{Z},$$

$$A_{2,1}(1,j) = \sigma_{1,j} T_2(V) \Psi_j : L_p^n \longmapsto Y_{1,j}, \quad j \in \mathbb{Z},$$

$$A_{2,2}(1,j) = -\sigma_{1,j} T_2(V) H_j : X_{2,j} \longmapsto Y_{1,j}, \quad j \in \mathbb{Z},$$

$$A_{1,2}(2,j) = -H_j V_- : X_j \longmapsto L_p^n, \quad j \in \mathbb{Z},$$

$$A_{2,1}(2,j) = \begin{bmatrix} \pi_j T_2^{-1}(V) A_{21}(1,j) \\ -A_{21}(1,j) \end{bmatrix} : L_p^n \longmapsto \begin{matrix} X_{1j} \\ \oplus \\ Y_{1j} \end{matrix}, \quad j \in \mathbb{Z},$$

$$A_{2,2}(2,j) = \begin{bmatrix} \pi_{1j}(I - T_2^{-1}(V) A_{22}(1,j)) V_- \\ A_{22}(1,j) \pi_{2j} V_- \end{bmatrix} : X_j \longmapsto \begin{matrix} X_{1j} \\ \oplus \\ Y_{1j} \end{matrix}, \quad j \in \mathbb{Z},$$

$$A_{1,2}(3,j) = [-H_j;\ H_j V_- \sigma_j V_-^{-1}] : \begin{matrix} X_{2j} \\ \oplus \\ Y_{2j} \end{matrix} \longmapsto L_p^n, \quad j \in \mathbb{Z},$$

$$A_{2,1}(3,j) = \sigma_j V_-^{-1} \sigma_{1j} A_{2,1}(1,j) : L_p^n \longmapsto Y_j, \quad j \in \mathbb{Z},$$

$$A_{2,2}(3,j) = [-\sigma_j V_-^{-1} A_{22}(1,j);\ \sigma_j V_-^{-1} \sigma_{2j} - \sigma_j V_-^{-1} A_{22}(1,j) V_- \pi_j V_-^{-1} \sigma_{2j}] : \begin{matrix} X_{2j} \\ \oplus \\ Y_{2j} \end{matrix} \longmapsto Y_j, \quad j \in \mathbb{Z},$$

$$B_{11}(i,j) = (I + P_+ R_j^{(-1)} \Psi_j) : L_p^n \longmapsto L_p^n, \quad i = 1,2,3, \quad j \in \mathbb{Z},$$

$$B_{12}(1,j) = P_+ T_2^{-1}(V) : Y_{1j} \longmapsto L_p^n, \quad j \in \mathbb{Z},$$

$$B_{21}(1,j) = \pi_{2j}(R_j^{(-1)} + \Lambda_j^{-1} \sigma_{0j}) \Psi_j : L_p^n \longmapsto X_{2j}, \quad j \in \mathbb{Z},$$

$$B_{1,2}(2,j) = [0;\ -B_{12}(1,j)] : \begin{matrix} X_{1j} \\ \oplus \\ Y_{1j} \end{matrix} \longmapsto L_p^n, \quad j \in \mathbb{Z},$$

$$B_{21}(2,j) = -\pi_j V_-^{-1} B_{21}(1,j) : L_p^n \longmapsto X_j, \quad j \in \mathbb{Z},$$

$$B_{12}(3,j) = B_{12}(1,j) \sigma_{1j} V_- \sigma_j : Y_j \longmapsto L_p^n, \quad j \in \mathbb{Z},$$

$$B_{2,1}(3,j) = \begin{bmatrix} -B_{21}(1,j) \\ 0 \end{bmatrix} : L_p^n \longmapsto \begin{matrix} X_{2j} \\ \oplus \\ Y_{2j} \end{matrix}, \quad j \in \mathbb{Z},$$

$$\mathcal{K}_{1j} = \pi_{2j} V_- \pi_j V_-^{-1} : Y_{1j} \longmapsto X_{2j}, \quad j \in \mathbb{Z},$$

$$\mathcal{K}_{2,j} = [\pi_j V_-^{-1};\ \pi_j V_-^{-1}] : \begin{matrix} X_{1j} \\ \oplus \\ Y_{1j} \end{matrix} \longmapsto X_j, \quad j \in \mathbb{Z},$$

$$\mathcal{K}_{3,j} = \begin{bmatrix} \pi_{2j} V_- \\ \sigma_{2j} V_- \end{bmatrix} : Y_j \longmapsto \begin{matrix} X_{2j} \\ \oplus \\ Y_{2j} \end{matrix}, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Предложение 2. *Для любого $j \in \mathbb{Z}$ справедливы следующие тождества :*

$$\begin{bmatrix} T_1(W_j) & A_{12}(i,j) \\ A_{21}(i,j) & A_{22}(i,j) \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} B_{11}(i,j) & B_{12}(i,j) \\ B_{21}(i,j) & \mathcal{K}_{i,j} \end{bmatrix}, \quad i = 1,2,3. \tag{16}$$

Проверка этих тождеств основана на равенствах (8) – (15) и предложении 1. Заметим, что равенства (16) означают, что для всех $j \in \mathbb{Z}$ оператор $T_1(W_j)$ матрично сцеплен с операторами $\mathcal{K}_{ij}$, $i = 1,2,3$ (см. [10]).

Доказательство теоремы 1. Из известной теоремы Симоненко о связи оператора $T_1(W_j)$ с GWH–факторизацией W_j (см. [11], либо [1, 2]) следует, что

$$\mu_{\overline{\kappa}}(j) = \dim \operatorname{Ker} T_1(W_{j+1}) - 2 \dim \operatorname{Ker} T_1(W_j) + \dim \operatorname{Ker} T_1(W_{j-1})$$

(более подробно см. [12]). С другой стороны, из (16) следует, что

$\dim \operatorname{Ker} T_1(W_j) = \dim \operatorname{Ker} \mathcal{K}_{sj}$ (см. [10]) для $j \in \mathbb{Z}$, $s = 1,2,3$. Отсюда имеем

$$\mu_{\overline{\kappa}}(j) = \alpha_{s,j+1} - 2\alpha_{s,j} + \alpha_{s,j-1}. \tag{17}$$

Нетрудно убедиться, что формулы (17) эквивалентны формулам (3), тем самым, теорема доказана.

Доказательство теоремы 2. В силу свойств матричного сцепления (см. [10]) из предложений 1 и 2 следует, что

$$\operatorname{Ker} T_1(W_j) = B_{12}(3,j)(\operatorname{Ker} \mathcal{K}_{3j}) = V_+\sigma_j V_-^{-1}\sigma_{1j} V_-(\operatorname{Ker} \mathcal{K}_{3j}).$$

Однако, для $x \in$. $\operatorname{Ker} \mathcal{K}_{3j}$ имеем $\sigma_{2j} V_- \sigma_j x = 0$. Отсюда, пользуясь предложением 1, получаем, что $\operatorname{Ker} T_1(W_j) = V_+^{-1}(\operatorname{Ker} \mathcal{K}_{3j})$. Доказательство теоремы следует теперь из надлежащих свойств множеств $\operatorname{Ker} T_1(W_j)$ (более подробно см. [12], §4).

Замечание 3. Множества N_j $(j = \nu_- + 1, ..., \nu_+ - 1)$ можно описать с помощью ядер матриц K_{1j} и K_{2j}. Действительно, из равенств

$$\operatorname{Ker} T_1(W_j) = B_{12}(1,j)(\operatorname{Ker} \mathcal{K}_{1j}) = V_+\sigma_j V_-^{-1}(\operatorname{Ker} \mathcal{K}_{3j}), \quad j = \nu_- + 1, ..., \nu_+ - 1$$

следует, что $N_j = \{\varphi_j F_j y : \ y \in \operatorname{Ker} \mathcal{K}_{1j}\}$, где

$$F_j = \left\| [u_{m-s}]_{\Delta\times\Delta^1_{j+1-s}} \right\|_{m,s=1,\dots,j-\nu_-}$$

Далее, заменяя каждый вектор $y = \mathrm{col}\,[y_m]_{m=0}^{\nu-1}$, $y_m \in \mathbf{C}^{\xi_{\nu_+-m}}$ вектором $\widetilde{y} = \mathrm{col}\,[y_m]_{m=\nu_+-j}^{\nu-1}$, аналогичным образом легко доказать, что $N_j = \{\varphi_j F_j \widetilde{y} : y \in \in \mathrm{Ker}\, \mathcal{K}_{2j}\}$.

§3. ЗАВИСИМОСТЬ ЧАСТНЫХ ИНДЕКСОВ ОТ $V(t)$

В этом параграфе дано описание множества возможных частных индексов матрицы-функции W, определенной равенством (2), в случае, когда $\Lambda_{\overline{\chi}}$ фиксировано, а $V \in L_\infty^{n\times n}$ допускает каноническую GWH–факторизацию. Для каждого $\overline{\kappa} \in \mathbb{Z}^n$ определим функции $\alpha_{\overline{\kappa}} : \mathbb{Z} \longmapsto \mathbb{Z}$ и $\beta_{\overline{\kappa}} : \mathbb{Z} \longmapsto \mathbb{Z}$ следующим образом :

$$\alpha_{\overline{\kappa}}(j) = \sum_{\kappa_i<j} (j-\kappa_i) = \sum_{m<j} (j-m)\mu_{\overline{\kappa}}(m),$$
$$\beta_{\overline{\kappa}}(j) = \sum_{\kappa_i>j} (\kappa_i - j) = \sum_{m>j} (m-j)\mu_{\overline{\kappa}}(m).$$

Через $\Omega_{\overline{\kappa}} \in \mathbb{Z}^n$ обозначим множество всех $\overline{\kappa}' \in \mathbb{Z}^n$ таких, что для любого $j \in \mathbb{Z}$ $\alpha_{\overline{\kappa}'}(j) \le \alpha_{\overline{\kappa}}(j)$ и $\beta_{\overline{\kappa}'}(j) \le \beta_{\overline{\kappa}}(j)$ (свойства этого множества см. в [2], лемму 4.1). Через $\Omega^0_{\overline{\kappa}} \subset \Omega_{\overline{\kappa}}$ обозначим множество всех $\overline{\kappa}' \in \mathbb{Z}^n$, для которых существуют $p, q \in \mathbb{Z}$ такие, что $\mu_{\overline{\kappa}}(p) > 0$, $\mu_{\overline{\kappa}}(q) > 0$, $q - p > 1$ и

$$\mu_{\overline{\kappa}'}(j) > 0 = \begin{cases} \mu_{\overline{\kappa}}(j) & \text{при } j \in \mathbb{Z} \setminus \{p, p+1, q-1, q\}, \\ \mu_{\overline{\kappa}}(j) - 1 & \text{при } j \in \{p, q\}, \\ \mu_{\overline{\kappa}}(j) + l & \text{при } j \in \{p+1, q-1\}. \end{cases}$$

Здесь полагаем $l = 1$, если $p + 1 < q - 1$, и $l = 2$, если $p + 1 = q - 1$.

Предложение 3. *Пусть* $\overline{\kappa} = col\,[\kappa_i]_{i=1}^n \in \Omega^0_{\overline{\chi}}$ *и* $\kappa_1 \le \dots \le \kappa_n$. *Тогда существует матрица-функция* V, *допускающая каноническую* GWH*–факторизацию и такая, что множество частных индексов матрицы-функции* $W = \Lambda_{\overline{\chi}} \cdot V$ *совпадает с множеством* $\kappa_1, \dots, \kappa_n$.

Доказательство. Пусть p и q $(q - p > 1)$ выбраны надлежащим образом. Существуют $l, m \in \Delta$ такие, что $\chi_l = q$, $\chi_m = p$. Пусть $V(t) = E + v_{-1}t^{-1}$, где все элементы матрицы $v_{-1} \in \mathbf{C}^{n\times n}$ равны нулю, за исключением $(v_{-1})_{l,m} = 1$. Ясно, что $V(t) = V_-(t)$, $V^{-1}(t) = E - v_{-1}t^{-1}$ и $w^{(j)}_{m,s} = u_{m+j-\nu_+-s}$. Тем самым, $w^{(j)}_{\nu_+-j,1} = u_{-1} = -v_{-1}$ и $w^{(j)}_{m,s} = 0$, если $m \neq \nu_+ - j$, либо $s \neq 1$. Поэтому все блоки матрицы K_{1j} $(\nu_- + 1 < j < \nu_+ - 1)$ равны нулю, кроме, быть может, расположенного в левом нижнем углу, который равен матрице $[u_{-1}]_{\Delta^2_{j+1}\times\Delta^1_j}$. Следовательно, матрицы K_{1j} отличны от тождественного нуля лишь при $j \in (p;q)$, и для этих значений j имеем rank $K_{1j} = 1$.

Пусть $\kappa'_1 \leq \cdots \leq \kappa'_n$ $(\overline{\kappa}' = \mathrm{col}\,[\kappa'_i]^n_{i=1})$ – частные индексы матрицы-функции $W = \Lambda_{\overline{\chi}}V$. Из теоремы Симоненко и предложения 2 следует, что $\alpha_{\overline{\kappa}'}(j) = \dim \mathrm{Ker}\, T_1(W_j) = \dim Y_{1j} = \alpha_{\overline{\chi}}(j)$, при $j \in \mathbb{Z} \setminus (p;q)$, а также $\alpha_{\overline{\kappa}'}(j) = \dim \mathrm{Ker}\, T_1(W_j) = \dim K_{1j} = \dim Y_{1j} - 1 = \alpha_{\overline{\chi}}(j) - 1$, при $j \in (p;q)$. Отсюда непосредственным подсчетом легко убедиться в том, что $\mu_{\overline{\kappa}'} = \mu_{\overline{\kappa}}$. Предложение доказано.

Теорема 3. *Пусть $\Lambda_{\overline{\chi}} = diag\,[t^{\chi_1}, ..., t^{\chi_n}]$ и $\overline{\chi} = col\,[\chi_i]^n_{i=1} \in \mathbb{Z}^n$. Для того, чтобы числа $\kappa_1 \leq \cdots \leq \kappa_n$ $(\overline{\kappa} = col\,[\kappa_i]^n_{i=1} \in \mathbb{Z}^n)$ представляли из себя частные индексы матрицы-функции $W = \Lambda_{\overline{\chi}}V$ при некотором V, допускающем каноническую GWH–факторизацию, необходимо и достаточно, чтобы $\overline{\kappa} \in \Omega_{\overline{\chi}}$.*

Доказательство. Необходимость следует из теоремы Симоненко и предложения 2. Для доказательства достаточности предположим, что $\overline{\kappa} \in \Omega_{\overline{\chi}}$. Тогда существует последовательность чисел $\overline{\kappa}^{(1)}, ..., \overline{\kappa}^{(m)} \in \mathbb{Z}^n$ таких, что $\overline{\kappa}^{(1)} = \overline{\chi}$, $\overline{\kappa}^{(m)} = \overline{\kappa}$ и $\overline{\kappa}^{(i+1)} \in \Omega^o_{\overline{\kappa}^{(i)}}$, $i = 1, ..., m-1$ (см. [2], лемму 6.1). В силу предложения 3 существует матрица-функция V_i $(i = 1, ..., m-1)$, допускающая каноническую GWH–факторизацию и такая, что частные индексы матрицы-функции $\Lambda_{\overline{\kappa}^{(i)}} V_i$ совпадают с $\overline{\kappa}^{(i+1)}$. Пусть представление

$$\Lambda_{\overline{\kappa}^{(i)}} V_i = \widetilde{W}^{(i)}_- \Lambda_{\overline{\kappa}^{(i+1)}} \widetilde{W}^{(i)}_+$$

является GWH–факторизацией $\Lambda_{\overline{\kappa}^{(i)}} V_i$. Составим матрицу-функцию

$$V = V_1 \left[\widetilde{W}^{(1)}_+\right]^{-1} V_2 \left[\widetilde{W}^{(2)}_+\right]^{-1} \cdots \left[\widetilde{W}^{(m-2)}_+\right]^{-1} V_{m-1}.$$

Легко видеть, что представление

$$\Lambda_{\overline{\chi}}V = \widetilde{W}^{(1)}_- \widetilde{W}^{(2)}_- \ldots \widetilde{W}^{(m-1)}_- \Lambda_{\overline{\kappa}} \widetilde{W}^{(m-1)}_+$$

является GWH–факторизацией матрицы-функции $\Lambda_{\chi}V$. Теорема доказана.

ABSTRACT. Generalised right Wiener–Hopf factorisation of bounded measurable matrix-function $W = \Lambda V$ is considered, where $\Lambda = \mathrm{diag}[t^{\chi_1}, ..., t^{\chi_n}]$ with $\chi_1, ..., \chi_n \in \mathbb{Z}$ and V admits canonical factorizations $V = V_- V_+$. Explicit formulae for partial indices and factorization factors of W are obtained. The formulae are given in terms of the first $\nu = \max_{1 \le i < j \le n} |\chi_i - \chi_j|$ coefficients of the power series of $V_-(z)$ at $z = \infty$. The dependence of matrix-function V on partial indices is described.

The class of triangular matrix-functions with factorizable diagonal elements is an important example where these formulae can be applied.

ЛИТЕРАТУРА

1. K. Clancey, I. Gohberg, "Factorization of matrix functions and singular integral operators", Operator Theory : Advances and Appl., vol. 3, Birkhäuser, Basel, 1981.
2. G. S. Litvinchuk, I. M. Spitkovski, Factorization of Matrix-Functions, Akademie–Verlag, Berlin, 1987.
3. И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, "Системы интегральных уравнений на луче с ядрами, зависящими от разности аргументов", Успехи матем. наук, т. 13, № 2, стр. 3 – 72, 1958
4. А. Б. Шабат, "Обратная задача рессеяния", Диф. уравнения, т. 15, № 10, стр. 1824 – 1834, 1979.
5. В. Е. Захаров, А. Б. Шабат, "Интегрирование нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи рассеяния II", Функц. анализ и его приложения, т. 13, № 3, стр. 13 – 22, 1979.
6. I. Gohberg, L. Lerer, L. Rodman, "Factorization indices for matrix polynomials", Bull. AMS, vol. 84, pp. 275 – 277, 1978.
7. I. Gohberg, L. Lerer, L. Rodman, "On factorization indices and completely decomposable matrix polynomials", Tel-Aviv Univ. Technical Report, vol. 80-47, pp. 1 – 72, 1980.
8. В. М. Адуков, "Факторизация треугольных матриц-функций второго порядка", Деп. в ВИНИТИ 01.12.82, № 5930 – 82, стр. 1 – 14, 1982.
9. В. М. Адуков, "Факторизация Винера–Хопфа мероморфных матриц-функций", Алгебра и анализ, т. 4, № 1, стр. 54 – 74, 1992.
10. H. Bart, I. Gohberg, M. A. Kaashoek, "The coupling method for solving integral equations", Operator Theory : Advances and Appl., vol. 12, pp. 39 – 73, Birkhäuser, Basel, 1984.
11. И. Б. Симоненко "Некоторые общие вопросы теории краевой задачи Римана", Изв. АН СССР, сер. матем., т. 32, № 5, стр. 567 – 587, 1968.
12. А. Г. Камалян, В. А. Оганян, "Конструктивный метод факторизации для одного класса матриц-функций", Известия НАН Армении, Математика, т. 28, № 3, стр. 1 – 15, 1993.

14 апреля 1994

Институт математики
Национальной Академии Наук Армении