АТТРАКТОРЫ ЭВОЛЮЦИОННЫХ СИСТЕМ ТИПА СОБОЛЕВА

Г. С. Акопян, Р. Л. Шахбагян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
том 29, № 5, 1994

В статье доказываются существование аттракторов полугрупп, порождаемых начально-краевыми задачами для некоторого класса вырождающихся квазилинейных систем типа Соболева. Для этих систем строится функция Ляпунова и с ее помощью описываются аттракторы полугрупп, порожденных рассматриваемыми операторами.

ВВЕДЕНИЕ

Проблема поведения при $t \rightarrow \infty$ траекторий эволюционных систем, для которых корректно поставлена задача Коши, тесно связана с существованием многообразий, называемых аттракторами (см. работы [1], [2] и приведенную в них библиографию). Эти многообразия обладают двумя замечательными свойствами:

- i) притяжения траекторий;
- ii) инвариантности относительно полугруппы $\{S_t\}$, порожденной этой задачей.

Здесь мы рассматриваем проблему описания структуры аттракторов. Как известно, их структура явно описывается при условии существования глобальной функции Ляпунова, т. е. такого функционала Φ , значения которого убывают вдоль траекторий уравнения, за исключением лишь стационарных траекторий, на которых Φ – постоянная. В этом случае аттракторы полугрупп явно описываются с помощью неустойчивых инвариантных многообразий, проходящих через неподвижные точки полугруппы $\{S_t\}$.

В настоящей статье рассмотрен класс вырождающихся нелинейных систем типа Соболева. Доказано существование аттракторов полугрупп, порождаемых смешанными задачами, построена функция Ляпунова и с ее помощью описаны эти аттракторы.

§1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. КЛАССЫ СИМВОЛОВ

Рассмотрим систему нелинейных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{\partial}{\partial t} Lu + Mu = 0 \quad (1)$$

в цилиндре $Q_T = \Omega \times (0, T)$, где Ω — ограниченная область полупространства $\mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n, x_n > 0\}$, имеющего достаточно гладкую границу $\Gamma = \partial\Omega$. Будем предполагать, что $\Gamma_0 = \Gamma \cap \{x_n = 0\} \neq \emptyset$.

Операторы L и M зададим следующими выражениями:

$$Lu = - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(B_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_n} \left(B_{nn}(x) \frac{\partial u}{\partial x_n} \right) + C(x)u,$$

$$Mu = - \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} (a_{1j}(x, \nabla u_1), a_{2j}(x, \nabla u_2), \dots, a_{Nj}(x, \nabla u_N))^{tr},$$

где $u(t, x) = (u_1(t, x), \dots, u_N(t, x))$ и $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n})$. Опишем классы рассматриваемых операторов. Пусть выполнены следующие условия:

(а) Матрицы B_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, n-1$) и B_{nn} (обе порядка $N \times N$) симметричны, их элементы непрерывны в Ω и $B_{ij} = B_{ji}$ для любых $i, j = 1, 2, \dots, n-1$.

Матрица $C(x)$ предполагается неотрицательно определенной при любом $x \in \Omega$.

(б) Для любых вещественных векторов $\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^n$ ($\xi^k = (\xi_1^k, \dots, \xi_N^k)$, $k = 1, 2, \dots, n$) таких, что $\sum_{i=1}^n |\xi^i|^2 \neq 0$, и любого $x \in \Omega$ справедливо неравенство

$$\sum_{i,j=1}^n (B_{ij}(x) \xi^i, \xi^j) + (B_{nn}(x) \xi^n, \xi^n) \geq \sum_{i=1}^n (\alpha^i(x) \xi^i, \xi^j). \quad (2)$$

Здесь $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, а $\alpha^i(x)$ — матрица вида

$$\alpha^i(x) = \begin{pmatrix} \alpha_{11}^i(x) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_{22}^i(x) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \alpha_{NN}^i(x) \end{pmatrix}, \quad (3)$$

при этом, ее элементы $\alpha_{kk}^i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, N$) – непрерывные в Ω функции, и существует постоянная $c_0 > 0$ такая, что $\alpha_{kk}^i \geq c_0 > 0$ при $i = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, N$.

Далее, предполагается существование показателей $m_r \geq 0$ ($r = 1, 2, \dots, N$) таких, что справедлива двусторонняя оценка

$$\gamma_1 \leq x_n^{-m_r} \alpha_{rr}^n(x) \leq \gamma_2, \quad r = 1, 2, \dots, N \quad (4)$$

с некоторыми положительными постоянными $\gamma_1 > 0, \gamma_2 > 0$.

(в) Функции $\alpha_{kj}(x, \xi^j), k = 1, 2, \dots, N; j = 1, 2, \dots, n$, определяющие оператор M , предполагаются вещественными и принадлежащими пространству $C^2(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^n)$.

Введем обозначения

$$A_j = \begin{pmatrix} \alpha_{1j} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_{2j}(x) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \alpha_{Nj}(x) \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$J(x; \xi^1, \dots, \xi^n) \equiv \sum_{i,j=1}^n (B_{ij}(x) \xi^i, \xi^j) + (B_{nn}(x) \xi^n, \xi^n)$$

и предположим, что для любых векторов $\xi^1, \dots, \xi^n; \eta^1, \dots, \eta^n \in \mathbb{R}^n$ и любого $x \in \bar{\Omega}$ справедливы следующие неравенства :

$$\sum_{j=1}^n (A_j(x; \xi^1, \dots, \xi^n) \xi^j, I) \geq c_1 J(x; \xi^1, \dots, \xi^n),$$

$$\sum_{j=1}^n (A_j(x; \xi^1, \dots, \xi^n) \eta^j, I) \leq c_2 J^{1/2}(x; \xi^1, \dots, \xi^n) J^{1/2}(x; \eta^1, \dots, \eta^n), \quad (5)$$

$$\sum_{i,j=1}^n (A_j^i(x; \tau^1, \dots, \tau^n) \xi^i, \xi^j) \geq c'_1 J(x; \xi^1, \dots, \xi^n),$$

$$\sum_{i,j=1}^n (A_j^i(x; \tau^1, \dots, \tau^n) \xi^i, \eta^j) \leq c'_2 J^{1/2}(x; \xi^1, \dots, \xi^n) J^{1/2}(x; \eta^1, \dots, \eta^n), \quad (6)$$

где c_1, c_2, c'_1, c'_2 – положительные постоянные, а A_j^i – матрицы

$$A_j^i = \begin{pmatrix} \alpha_{1j}^i & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_{2j}^i & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \alpha_{Nj}^i \end{pmatrix}$$

с элементами

$$\alpha_{kj}^i(x, \tau^k) = \frac{\partial \alpha_{kj}(x, \tau^k)}{\partial \tau_i^k}, \quad \tau^k = (\tau_1^k, \dots, \tau_n^k).$$

Условие (б) указывает на возможность вырождения символа оператора L , а оценка (4) уточняет его характер. Условие (в) есть условие типа Леви, естественно возникающее в задачах с вырождением.

Для дальнейшего изложения удобно представить границу $\Gamma = \partial\Omega$ в виде $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma'$, $\Gamma \subset \mathbb{R}_+^n$ и обозначить

$$\Gamma_l \equiv \begin{cases} \Gamma', & \text{при } 1 \leq m_l < 2 \\ \Gamma, & \text{при } 0 \leq m_l < 1 \end{cases}, \quad l = 1, 2, \dots, N. \quad (7)$$

Для системы дифференциальных уравнений (1) поставим следующую смешанную задачу :

$$u|_{t=0} = u^0, \quad x \in \bar{\Omega}, \quad (8)$$

$$u_l|_{\Gamma_l} = 0, \quad t \geq 0, \quad l = 1, 2, \dots, N. \quad (9)$$

§2. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Введем следующие обозначения :

$L_2(\Omega)$ – гильбертово пространство N -мерных вещественнозначных вектор-функций, заданных на Ω , с компонентами из $L_2(\Omega)$.

$C_0(\Omega)$ – множество бесконечно дифференцируемых, финитных вектор-функций, определенных на Ω .

Через $(\cdot, \cdot)$ и $\|\cdot\|_0$ обозначим, соответственно, скалярное произведение и норму в $L_2(\Omega)$. Согласно лемме 1 из [3], оператор L , определенный на всюду плотном в $L_2(\Omega)$ множестве $C_0^\infty(\Omega)$, симметричен и положительно определен. Это обстоятельство позволяет ввести на линейном многообразии $C_0^\infty(\Omega)$ новое скалярное произведение :

$$[u, v] = (Lu, v)_0 = \int_{\Omega} \left[\sum_{i,j=1}^n \left(B_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) + \left(B_{nn}(x) \frac{\partial u}{\partial x_n} \frac{\partial v}{\partial x_n} \right) + (C(x)u, v) \right]. \quad (10)$$

Обозначим через H_L гильбертово пространство, являющееся замыканием линейного многообразия $C_0^\infty(\Omega)$ в метрике, порождаемой скалярным произведением (10). Из легко проверяемой оценки

$$(Lu, u)_0 \geq c \|u\|_0^2$$

с некоторой постоянной $c > 0$ непосредственно следует вложение $H_L \subset L_2(\Omega)$.

Для нормы в H_L введем обозначение $\|\cdot\|_{H_L}$.

Замечание. Неравенство (2) интерпретирует сильную эллиптичность L в подобластях $\Omega_\delta = \Omega \cap \{x_n > \delta\}$ ($\delta > 0$ — любое). Отсюда следует, что норма $\|\cdot\|_{H_L}$ эквивалентна интегралу Дирихле, и, в соответствии с теоремой вложения Соболева, вектор-функции пространства H_L исчезают на $\Gamma_\delta = \Gamma' \cap \{x_n > \delta\} \subset \partial\Omega_\delta$. Вместе с тем, как доказано в лемме 2 из [1], при $0 \leq m_r < 1$ r -ая компонента u_r вектора $u \in H_L$ обращается в нуль на всей границе Γ .

Наконец, обозначим через $L_2(0, T; H_L)$ гильбертово пространство вектор-функций $u(t) : [0, T] \rightarrow H_L$, с нормой

$$\|u\| = \left(\int_0^T \|u(t)\|_{H_L}^2 dt \right)^{1/2}$$

§3. ПОСТРОЕНИЕ АТТРАКТОРОВ

В работе [3] показано, что исследование начально-краевой задачи (1), (8), (9) сводится к эквивалентной задаче Коши для эволюционного операторного уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + Au = 0, \tag{11}$$

$$u|_{t=0} = u^0, \tag{12}$$

где $A = L^{-1}M$. При этом, область определения замыкания оператора A совпадает с пространством H_L .

В этом параграфе доказано существование аттракторов полугрупп, порожденных задачами (11), (12), или эквивалентной задачей (1), (8), (9). Это доказательство существенно опирается на приводимые ниже результаты, полученные

в [1], [3]. Приведем формулировки используемых в дальнейшем результатов.

Теорема А. ([3], теоремы 2, 3) Для любого $u^0 \in H_L$ задача (11), (12) однозначно разрешима в пространстве $L_2(0, T; H_L)$.

Для приводимой ниже общей теоремы из [2] о существовании аттракторов необходимо

Определение 1. Пусть $\{S_t, t \geq 0\}$ – полугруппа операторов S_t , действующих в банаховом пространстве X . Ограниченное, замкнутое в X множество $M \subset X$ называется максимальным аттрактором полугруппы $\{S_t\}$, если

1) для любого ограниченного множества $B \subset X$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(S_t B, M) = 0,$$

где $\text{dist}(F, G) = \sup_{f \in F} \inf_{g \in G} \|f - g\|$ (условие притяжения);

2) $S_t M = M$ при любом $t \geq 0$ (условие инвариантности).

Теорема Б. ([1], теорема 1.1) Пусть полугруппа $\{S_t\}$, $S_t : X \rightarrow X$ удовлетворяет следующим условиям :

а) полугруппа S_t равномерно ограничена, т. е. для любого $R > 0$ существует постоянная $C(R) > 0$ такая, что

$$\|S_t u\| \leq C(R), \quad \text{при } \|u\| \leq R, \quad t > 0;$$

б) существует компактное в X поглощающее множество B_0 , т. е. для любого ограниченного множества $B \subset X$ существует число $T > 0$ такое, что $S_t B \subset B_0$ при $t \geq T$;

в) операторы $S_t : X \rightarrow X$ непрерывны при $t \geq 0$.

Тогда полугруппа $\{S_t\}$ обладает компактным максимальным аттрактором.

Теорема В. ([3], теорема 1) Оператор A , действующий в пространстве H_L , является монотонным, ограниченным и полунепрерывным, и справедлива оценка

$$[Au, u] \geq c \|u\|_{H_L}^2, \quad (13)$$

где $c > 0$ – некоторая постоянная.

Из теоремы А следует, что задача (11), (12) порождает семейство операторов $\{S_t, t \geq 0\}$, заданных на множестве начальных данных $u^0 \in H_L$ и определяемых следующим образом :

$$S_t u^0 = u(t, x),$$

где $u(t, x)$ – решение задачи. Легко проверить, что семейство $\{S_t\}$ – полугруппа.

Теорема 1. Пусть операторы L и M удовлетворяют условиям а) - в) теоремы Б. Тогда полугруппа $\{S_t\}$, порожденная задачей (1), (8), (9) обладает аттрактором, компактным в пространстве H_L .

Доказательство. Пусть $T > 0$ фиксировано и

$$U_0 = \{u^0 \in H_L, \|u^0\|_{H_L} \leq K < +\infty\}$$

– произвольное ограниченное множество в H_L . Подставляя решение $u(t, x)$ задачи (1), (8), (9) в уравнение (11) и умножая (скалярно в H_L) обе части последнего тождества на $u(t, x)$, получим

$$\left[\frac{\partial u}{\partial t}, u \right] + [Au, u] = 0,$$

или

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \|u\|_{H_L}^2 + [Au, u] = 0. \quad (14)$$

Далее, подставляя оценку (13) в тождество (14), будем иметь

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \|u\|_{H_L}^2 + c \|u\|_{H_L}^2 \leq 0.$$

Применяя неравенство Гронуолла, отсюда получим необходимую оценку :

$$\|S_t u^0\|_{H_L}^2 = \|u(t, x)\|_{H_L}^2 \leq \|u(0)\|_{H_L}^2 e^{-2ct} = \|u^0\|_{H_L}^2 e^{-2ct}. \quad (15)$$

Из (15) непосредственно следует равномерная ограниченность семейства операторов $\{S_t\}$ при $t \geq 0$.

Из той же оценки очевидным образом вытекает существование в пространстве H_L компактного поглощающего множества.

Таким образом, условия а) и б) теоремы Б выполнены, и для завершения доказательства остается проверить справедливость условия в). Пусть u^{10} и u^{20} — произвольные элементы пространства H_L , а $u^1(t, x)$, $u^2(t, x) \in L_2(0, T; H_L)$ — соответствующие им решения задачи (11), (12). Тогда имеет место тождество

$$\frac{\partial}{\partial t}(u^1 - u^2) + Au^1 - Au^2 = 0.$$

Умножив (скалярно в H_L) обе части этого тождества на $u^1 - u^2$ и интегрируя по t в промежутке $t \in [0, T]$, получим

$$\frac{1}{2} \int_0^T \frac{\partial}{\partial t} \|u^1 - u^2\|_{H_L}^2 dt + \int_0^T [Au^1 - Au^2, u^1 - u^2] dt = 0.$$

Отсюда легко следует, что

$$\|u^1(T, x) - u^2(T, x)\|_{H_L}^2 = \|u^1(0, x) - u^2(0, x)\|_{H_L}^2 - 2 \int_0^T [Au^1 - Au^2, u^1 - u^2] dt. \quad (16)$$

В силу теоремы В, оператор A , действующий в H_L , монотонен. Следовательно, из (16) приходим к оценке $\|u^1(T, x) - u^2(T, x)\|_{H_L} \leq \|u^1(0, x) - u^2(0, x)\|_{H_L}$, или $\|S_T u^{10} - S_T u^{20}\|_{H_L} \leq \|u^{10} - u^{20}\|_{H_L}$, и, стало быть, операторы S_t непрерывны при $t \geq 0$. Утверждение теоремы 1 теперь непосредственно следует из теоремы Б.

§4. ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА

В этом параграфе доказано существование функции Ляпунова для систем типа Соболева (1) и описаны аттракторы полугрупп, порожденных этим классом операторов. Предварительно приведем некоторые определения (см. [1], [2]).

Определение 2. Пусть $\{S_t\}$ — полугруппа операторов, действующих в банаховом пространстве X . Точка $z \in X$ называется неподвижной точкой полугруппы $\{S_t, t \geq 0\}$, если $S_t z = z$ для любого $t \geq 0$.

Определение 3. Пусть $Y \subset X$ — слабо инвариантное множество полугруппы $\{S_t\}$, т. е. $S_t Y \subset Y$ при любом $t \geq 0$. Непрерывный на Y функционал Φ :

$Y \rightarrow \mathbb{R}^1$ называется функцией Ляпунова полугруппы $\{S_t\}$ на множестве Y , если выполнены следующие условия :

- 1) для любого $u \in Y$ функция $\Phi(S_t u)$ переменной t убывает при $t \geq 0$;
- 2) если $\Phi(S_t u) = \Phi(S_0 u)$ при некотором $t > 0$, то $S_0 u$ является неподвижной точкой полугруппы $\{S_t\}$.

Теорема Г. ([1], теоремы 10.1, 10.2) Пусть полугруппа $\{S_t\}$ обладает компактным аттрактором M и функцией Ляпунова Φ на множестве M . Далее, пусть множество N неподвижных точек $\{S_t\}$ конечно и при любом $u \in M$ функция $\Phi(S_t u)$ непрерывна по t в X . Тогда

$$M = \bigcup_{z \in N} P(z),$$

где $P(z)$ – неустойчивое, инвариантное многообразие, выходящее из точки z .

Относительно понятия неустойчивого, инвариантного многообразия см. [1], определение 10.2.

Предположим, что коэффициенты a_{kj} , задающие оператор M , имеют вид

$$a_{kj}(x, \bar{\tau}^k) = \frac{\partial a_k(x, \bar{\tau}^k)}{\partial \tau_j^k}, \quad \bar{\tau}^k = (\tau_1^k, \dots, \tau_n^k), \quad j = 1, \dots, n; \quad k = 1, \dots, N, \quad (17)$$

где функции $a_k \in C^3(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^n)$. В пространстве H_L рассмотрим функционал

$$\Phi(u) = \sum_{k=1}^N \int_{\Omega} a_k(x, \nabla u_k) dx, \quad (18)$$

который, как будет показано ниже, является функцией Ляпунова системы (1).

Теорема 2. Пусть выполнены предположения теоремы 1, а также условие (17). Тогда функционал Φ , задаваемый выражением (18), является функцией Ляпунова полугруппы $\{S_t\}$, порожденной задачей (1), (8), (9).

Доказательство. Обозначим через M аттрактор полугруппы $\{S_t\}$, порожденной задачей (1), (8), (9). В силу теоремы 1, множество M компактно в пространстве H_L . В соответствии с определением 3 и теоремой Г, проверим вначале непрерывность функционала Φ на множестве M . С этой целью, для произвольных

$u, v \in \mathcal{M}$ рассмотрим разность

$$\begin{aligned} \Phi(u) - \Phi(v) &= \sum_{k=1}^N \int_{\Omega} [a_k(x, \nabla u_k) - a_k(x, \nabla v_k)] dx = \\ &= \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \tau_j^k} a_k(x, \nabla w_k) \frac{\partial}{\partial x_j} (u_k - v_k) dt dx = \\ &= \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \int_0^1 a_{kj}(x, \nabla w_k) \frac{\partial}{\partial x_j} (u_k - v_k) dt dx = \\ &= \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \int_0^1 \left[A_j \left(x; \frac{\partial w}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial w}{\partial x_n} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} (u - v), I \right] dx, \end{aligned}$$

где $w_k = v_k + t(u_k - v_k)$, $k = 1, \dots, N$. В силу условия (5), с некоторой постоянной $c_2 > 0$

$$\begin{aligned} |\Phi(u) - \Phi(v)| &\leq \\ &\leq c_2 \int_{\Omega} J^{1/2} \left(x; \frac{\partial w}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial w}{\partial x_n} \right) J^{1/2} \left(x; \frac{\partial(u-v)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial(u-v)}{\partial x_n} \right) dx \leq \\ &\leq c_2 \left[\int_{\Omega} J \left(x; \frac{\partial w}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial w}{\partial x_n} \right) dx \right]^{1/2} \left[\int_{\Omega} J \left(x; \frac{\partial(u-v)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial(u-v)}{\partial x_n} \right) dx \right]^{1/2} \quad (19) \end{aligned}$$

Далее, заметим, что из определения нормы в пространстве H_L легко следует, что с некоторой постоянной $c > 0$

$$\left[\int_{\Omega} J \left(x; \frac{\partial w}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial w}{\partial x_n} \right) dx \right]^{1/2} \leq c \|u\|_{H_L}, \text{ при любом } u \in H_L. \quad (20)$$

Из (19) и (20) следует, что

$$|\Phi(u) - \Phi(v)| \leq c_3 \|w\|_{H_L} \|u - v\|_{H_L} \leq c_4 (\|u\|_{H_L} + \|v\|_{H_L}) \|u - v\|_{H_L}. \quad (21)$$

Поскольку $\mathcal{M}$ ограничено, из (21) вытекает, что $|\Phi(u) - \Phi(v)| \leq c_5 \|u - v\|_{H_L}$

с некоторой постоянной $c_5 > 0$. Тем самым, непрерывность функционала Φ доказана. Легко видеть, что функционал Φ дифференцируем в смысле Фреше.

Производная $\frac{\partial \Phi}{\partial x_k}$ действует на элемент $v^k = (0, \dots, 0, v^k, 0, \dots, 0)$ по формуле

$$\left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial x_k}, v^k \right\rangle = [A u, v^k]. \quad (22)$$

В самом деле

$$\begin{aligned} \Phi(u_1, \dots, u_{k-1}, u_k + v_k, u_{k+1}, \dots, u_N) - \Phi(u_1, u_2, \dots, u_N) = \\ = \int_{\Omega} [a_k(x, \nabla u_k + \nabla v_k) - a_k(x, \nabla u_k)] dx. \end{aligned}$$

Выделяя линейную часть, находим

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial u_k}, v^k \right\rangle &= \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} a_{kj}(x, \nabla u_k) \frac{\partial v^k}{\partial x_j} dx = \\ &= - \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} a_{kj}(x, \nabla u_k) v^k dx = \int_{\Omega} (M u, v^k) dx = [A u, v^k]. \end{aligned}$$

Пусть $u \in M$ и $u^k \equiv (0, \dots, 0, u_k, 0, \dots, 0)$. В силу (22) и тождества (11)

$$\partial_t \Phi(u(t, x)) = \sum_{k=1}^N \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial u_k}, \frac{\partial u^k}{\partial t} \right\rangle = \sum_{k=1}^N \left[\mathcal{A}, \frac{\partial u^k}{\partial t} \right] = \left[\mathcal{A}, \frac{\partial u}{\partial t} \right] = -\|A u\|_{H_L}^2 \leq 0.$$

Таким образом, доказано, что для любого $u \in M$ функция $\Phi(S_t u^0)$ убывает по t при $t \geq 0$. Для завершения доказательства теоремы остается показать, что множество решений системы $A u = 0$ совпадает с множеством неподвижных точек полугруппы $\{S_t\}$. С этой целью предположим, что при некотором $t = t_0 > 0$

$$\Phi(u(t_0, x)) = \Phi(u(0, x)) = \Phi(u^0).$$

Имеем

$$0 = \Phi(u(t_0, x)) - \Phi(u^0) = \int_0^{t_0} \partial_t \Phi(u(t, x)) dt = - \int_0^{t_0} \|A u\|_{H_L}^2 dt,$$

откуда следует, что $A u = 0$ при $t \in [0, t_0]$. Обозначим $z = u^0(x)$. Поскольку $A u^0 = A u(0, x)$ и $\frac{\partial u^0}{\partial t} = 0$, $z(x)$ является решением задачи (11), (12), стало быть $S_t z = z$, и доказательство завершено.

ABSTRACT. The paper proves the existence of attractors of semigroups generated by initial-boundary problems for a class of Sobolev type degenerate quasilinear systems. A Lyapunov function for this systems is constructed and the structure of attractors of semigroups generated by these operators is described.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Бабин, М. И. Вишик, "Аттракторы эволюционных уравнений с частными производными и оценки их размерности", УМН, т. 38, № 4 (232), стр. 133 - 187, 1983.
2. А. В. Бабин, М. И. Вишик, Аттракторы эволюционных уравнений, Москва, Наука, 1989.
3. Г. С. Акопян, Р. Л. Шахбагян, "Начально-краевая задача для вырождающихся нелинейных систем типа Соболева", Известия НАН Армении, Математика, т. 28, № 3, стр. 18 - 30, 1993.