ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ В ПОЛОСЕ В КЛАССАХ ПОЛИНОМИАЛЬНОГО РОСТА

А. А. Андрян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 29, № 5, 1994

Исследуется дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^n u(x,t)}{\partial t^n} + \sum_{j=1}^{n} a_j\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial^{n-j} u(x,t)}{\partial t^{n-j}} = 0, \quad x \in \mathbb{R},\ 0 < t < 1,$$

где $a_j(\xi)$ – полиномы от $\xi \in \mathbb{R}^1$ с постоянными коэффициентами. Ищем решения $u(x,t)$, имеющие, вместе со своими производными, полиномиальный рост по $x \in \mathbb{R}^1$. При условии, что корни $\lambda_1(\xi)$, ..., $\lambda_n(\xi)$ (часть из которых может совпадать) соответствующего характеристического полинома $\lambda^n + a_1(\xi)\lambda^{n-1} + \ldots + a_n(\xi)$ таковы, что : а)Re $\lambda_j(\xi) \le \alpha$, $j = 1,\ldots,m < n$, б) Re $\lambda_j(\xi) \to_{|\xi|\to+\infty} +\infty$, $j = m+1,\ldots,n$, в)$\{\lambda_1(\xi),\ldots,\lambda_m(\xi)\} \cap \{\lambda_{m+1}(\xi),\ldots,\lambda_n(\xi)\} = \emptyset$, показано, что граничная задача

$$\frac{\partial^j u(x,0)}{\partial t^j} = f_j(x),\ j = 0,\ldots,m-1, \qquad \frac{\partial^j u(x,1)}{\partial t^j} = f_{j+m}(x),\ j = 0,\ldots,n-m-1$$

разрешима по ядру конечной размерности. При тех же условиях изучена общая граничная задача.

§0. ВВЕДЕНИЕ

Обозначим через D полосу $D = \{(x,t)\,|\, x \in \mathbb{R}, 0 \le t \le 1\}$, а через $M_\gamma(D)$, $\gamma \in \mathbb{R}$ – класс функций $u(x,t) \in C^\infty(D)$, снабженных последовательностью конечных полунорм

$$||u||_{s,\gamma} = \sup_D (1+|x|)^{-\gamma} \sum_{j+k\le s} \left|\frac{\partial^{j+k} u(x,t)}{\partial x^j \partial t^k}\right| < \infty, \quad s = 0,1,\ldots. \tag{1}$$

Далее, пусть $M(D) = \cup_{\gamma\in\mathbb{R}} M_\gamma(D)$. Оператор $K : M(D) \to M(D)$ называется ограниченным, если для любого γ существует γ' такое, что $K : M_\gamma(D) \to M_{\gamma'}(D)$ является ограниченным оператором, т. е. для любого s существует s' такое, что

$$||Ku||_{s,\gamma'} \le c||u||_{s',\gamma}. \tag{2}$$

Рассмотрим дифференциальное уравнение вида

$$P_n(i\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t})u(x,t) = \frac{\partial^n u(x,t)}{\partial t^n} + \sum_{j=1}^{n} a_j(i\frac{\partial}{\partial x})\frac{\partial^{n-j}u(x,t)}{\partial t^{n-j}} = 0, \tag{3}$$

где $a_j(\xi)$ – многочлены от $\xi \in \mathbb{R}$ с постоянными коэффициентами и $u \in M(D)$.

С оператором $P_n(i\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t})$ естественно связан характеристический многочлен

$$P_n(\xi, \lambda) = \lambda^n + a_1(\xi)\lambda^{n-1} + \cdots + a_n(\xi). \tag{4}$$

Будем рассматривать следующую граничную задачу Коши для уравнения (3) :

$$\frac{\partial^j u(x,0)}{\partial t^j} = g_j(x), \quad j = 0, \dots, n-1, \tag{5}$$

где $g_j(x)$ лежат в подмножестве $M(R)$ функций из $M(D)$, не зависящих от $t \in [0,1]$.

Задача (3), (5) корректна [1], т. е. ее решение существует для всех правых частей, единственно и непрерывно зависит (см. (2)) от начальных данных тогда и только тогда, когда существует $\alpha \in \mathbb{R}$, для которого

$$P_n(\xi, \lambda) \neq 0 \quad \text{на} \quad \{\mathrm{Re}\,\lambda > \alpha\} \times \mathbb{R}. \tag{6}$$

Будем полагать, что $\lambda_1(\xi), \dots, \lambda_n(\xi)$ – корни многочлена $P_n(\xi, \lambda)$, пронумерованные с учетом кратностей.

В данной статье оператор (3) рассмотрен при предположениях, что :

а) существует $\alpha \in \mathbb{R}$ такое, что $\mathrm{Re}\,\lambda_j(\xi) \le \alpha$, $j = 1, \dots, m < n$ при любом $\xi \in \mathbb{R}$,

б) $\mathrm{Re}\,\lambda_j(\xi) \to_{|\xi| \to +\infty} +\infty$, $j = m+1, \dots, n$,

в) множества $\{\lambda_1(\xi), \dots, \lambda_m(\xi)\}$, $\{\lambda_{m+1}(\xi), \dots, \lambda_n(\xi)\}$ не пересекаются ни при каком $\xi \in \mathbb{R}$.

Заметим, что ввиду условия б) и разложения Пюизье

$$\lambda_j(\xi) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{jk}(\xi^{\frac{1}{r_j}})^k \quad \text{при} \quad |\xi| >> 1, \tag{7}$$

имеющего место в окрестности любой точки $\xi_0 \in \mathbb{R}$

$$\operatorname{Re} \lambda_j(\xi) \geq c_j(1+|\xi|)^{\alpha_j},\ c_j > 0, \alpha_j > 0,\ j = m+1, \ldots, n. \tag{8}$$

Тем самым, условие (6) не выполнено, и задача Коши (5) становится некорректной. Цель данной работы - указать граничные задачи, которые всегда разрешимы при ядре конечной размерности. В конце работы приведены примеры.

§1. МОДЕЛЬНАЯ ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА

Задача А. Найти решение $u \in M(D)$ уравнения (3), удовлетворяющее граничным условиям

$$\frac{\partial^j u(x,0)}{\partial t^j} = f_j(x), \quad j = 0, \ldots, m-1, \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial^j u(x,1)}{\partial t^j} = f_{j+m}(x), \quad j = 0, \ldots, n-m-1, \tag{1.2}$$

где $f_0(x), \ldots, f_{n-1}(x) \in M(\mathbb{R})$ - заданные функции.

Символами S и S' обычно обозначают хорошо известные классы Шварца [2]. Через S'_t обозначим класс функций $u(x,t) \in S'$, гладко зависящих от параметра $t \in [0,1]$ и удовлетворяющих неравенству

$$\left| \frac{\partial^k}{\partial t^k} < u(x,t), \varphi(x) > \right| \leq c_k ||\varphi||_p \quad \text{при любом} \quad \varphi \in S,\ k = 0, 1, \ldots,$$

где $||\varphi||_p$ - p-ая полунорма в S :

$$||\varphi||_p = \sup_x (1+x^2)^{p/2} \sum_{j \leq p} \left| \frac{\partial^j \varphi(x)}{\partial x^j} \right|.$$

При этом ясно, что если $u(x,t) \in M(D)$, то $u(x,t) \in S'_t$, т. е. $M(D) \subset S'_t$. Наконец, через $\hat{u}(\xi,t)$ или $F_x[u(x,t)](\xi)$ будем обозначать обобщенное преобразование Фурье функционала $u(x,t) \in S'_t$ по x. При переходе к преобразованиям Фурье, уравнение (3) и граничное условие (1.1), (1.2) приобретает вид

$$P_n(\xi, \frac{\partial}{\partial t})\hat{u}(\xi,t) = 0, \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial^j \hat{u}(\xi,0)}{\partial t^j} = \hat{f}_j(\xi),\ j=0,\ldots,m-1;\quad \frac{\partial^j \hat{u}(\xi,1)}{\partial t^j} = \hat{f}_{j+m}(\xi),\ j=0,\ldots,n-m-1. \quad (1.4)$$

Введем в рассмотрение следующие многочлены от λ :

$$P_m(\xi,\lambda) = \prod_{j=1}^{m}(\lambda-\lambda_j(\xi)) = \lambda^m + \sum_{j=1}^{m} p_j(\xi)\lambda^{m-j};\quad Q_{n-m}(\xi,\lambda) =$$

$$= \prod_{j=m+1}^{n}(\lambda-\lambda_j(\xi)) = \lambda^{n-m} + \sum_{j=1}^{n-m} q_j(\xi)\lambda^{n-m-j}. \quad (1.5)$$

Имеет место представление

$$\lambda_1^j(\xi)+\cdots+\lambda_m^j(\xi) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \lambda^j \frac{\frac{\partial}{\partial\lambda}P_n(\xi,\lambda)}{P_n(\xi,\lambda)}d\lambda,$$

где внутри замкнутого контура γ заключены только корни $\lambda_1(\xi),\ldots,\lambda_m(\xi)$. Тем самым, ввиду условия в), для функций $p_j(\xi)\in C^\infty(\mathbb{R})$ имеют место оценки

$$|p_j^{(k)}(\xi)| \le c_k(1+|\xi|)^{\alpha_k},\quad k=0,1,\ldots. \quad (1.6)$$

Те же оценки верны и для функций $q_j(\xi)$.

Пусть $v_j(\xi,t)$, $w_k(\xi,t)$ – решения следующих задач Коши в классе обычных функций :

$$P_m(\xi,\frac{\partial}{\partial t})v_j(\xi,t)=0,\quad \frac{\partial^l v_j(\xi,0)}{\partial t^l} = \delta_j^l,\ l=0,\ldots,m-1;\ j=0,\ldots,m-1, \quad (1.7)$$

$$Q_{n-m}(\xi,\frac{\partial}{\partial t})w_k(\xi,t)=0,\quad \frac{\partial^l w_k(\xi,1)}{\partial t^l} = \delta_k^l,\ l=0,\ldots,n-m-1;\ k=0,\ldots,n-m-1, \quad (1.8)$$

где δ_r^s – символ Кронекера. Справедлива следующая

Лемма 1.1. *Функции $v_j(\xi,t)$, $w_k(\xi,t)$ принадлежат $C^\infty(D)$ и удовлетворяют оценкам*

$$\left|\frac{\partial^{l+s} v_j(\xi,t)}{\partial\xi^l\partial t^s}\right| + \left|\frac{\partial^{l+s} w_k(\xi,t)}{\partial\xi^l\partial t^s}\right| \le c_{ls}(1+|\xi|)^{\alpha_{ls}},\ l,s=0,1,\ldots \quad (1.9)$$

Более того, при любых $0\le t<1$ и $\alpha\in\mathbb{R}$

$$\lim_{|\xi|\to+\infty}(1+|\xi|)^\alpha w_k(\xi,t) = 0. \quad (1.10)$$

Доказательство проведем только для $w_k(\xi,t)$, поскольку для $v_j(\xi,t)$ оно вполне аналогично. Перепишем (1.8) в матричной форме

$$\frac{\partial w(\xi,t)}{\partial t} = A(\xi)w(\xi,t), \ w(\xi,1) = e_k = (0,\ldots,\frac{1}{k},\ldots,0),$$

где $w = (w_k,\ldots,\frac{\partial^{n-m-1}w_k}{\partial t^{n-m-1}})$, а $A(\xi)$ – квадратная матрица порядка $n-m$, имеющая вместе со своими производными полиномиальный рост с собственными значениями $\lambda_{m+1}(\xi)$, ..., $\lambda_n(\xi)$. Имеем $w(\xi,t) = \exp(A(\xi)(t-1))e_k$. Воспользовавшись хорошо известной оценкой [3]

$$||\exp(A(\xi))|| \le c\cdot\sum_{j=1}^{n-m}\exp(\lambda_{m+j}(\xi))(1+||A(\xi)||)^{n-m-1}$$

получаем

$$|w(\xi,t)| \le c\cdot\sum_{j=1}^{n-m}\exp(\lambda_{m+j}(\xi)(t-1))(1+|\xi|)^{s_0}.$$

Отсюда следует неравенство (1.9) при $l = s = 0$. Производные оцениваются аналогично. Из (8) непосредственно следует (1.10), и лемма доказана.

Для дальнейшего изложения важна также следующая

Лемма 1.2. *Пусть $\hat{u}(\xi,t) \in S'_t$ – произвольное решение уравнения (1.3). Тогда имеет место представление*

$$\hat{u}(\xi,t) = \sum_{j=0}^{m-1} v_j(\xi,t)\alpha_j(\xi) + \sum_{k=0}^{n-m-1} w_k(\xi,t)\beta_k(\xi), \tag{1.11}$$

где $\alpha_j(\xi),\beta_k(\xi) \in S'$ однозначно определенные функционалы.

Доказательство. Сначала докажем единственность представления (1.11).

Пусть

$$\sum_{j=0}^{m-1} v_j(\xi,t)\alpha_j(\xi) + \sum_{k=0}^{n-m-1} w_k(\xi,t)\beta_k(\xi) \equiv 0. \tag{1.12}$$

Придифференцируем (1.12) по t последовательно $m-1$ раз в точке $t=0$. Затем $n-m-1$ раз, в точке $t=1$. В результате получим систему

$$M(\xi)\gamma(\xi) = 0, \tag{1.13}$$

где

$$M(\xi)=\left\|\begin{array}{ccc|ccc} & E_m & & w_o(\xi,0) & \dots & w_{n-m-1}(\xi,0) \\ & & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & w_o^{(m-1)}(\xi,0) & \dots & w_{n-m-1}^{(m-1)}(\xi,0) \\ v_o(\xi,1) & \dots & v_{m-1}(\xi,1) & & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & & E_{n-m} & \\ v_o^{(n-m-1)}(\xi,1) & \dots & v_{m-1}^{(n-m-1)}(\xi,1) & & & \end{array}\right\|,$$

$$\gamma(\xi)=(\alpha_o(\xi),\dots,\alpha_{m-1}(\xi),\beta_o(\xi),\dots,\beta_{n-m-1}(xi)),$$

а E_k – единичная матрица порядка k. Из леммы 1.1 и теоремы Лапласа об определителях следует, что

$$\det M(\xi)=1+o(1),\quad |\xi|\to+\infty. \tag{1.14}$$

Поскольку $M(\xi)$ аналитична по ξ, отсюда следует, что функция $\det M(\xi)$ имеет не более чем конечное число нулей. Пусть для определенности пусть $\xi=0$ – единственный нуль этой функции, порядка $k_o\geq 0$. Тогда из (1.13) следует, что функционал $\gamma(\xi)$ сосредоточен в точке $\xi=0$. Следовательно, функционал

$$\omega(\xi,t)=\sum_{j=0}^{m-1}v_j(\xi,t)\alpha_j(\xi)=-\sum_{k=0}^{n-m-1}w_k(\xi,t)\beta_k(\xi) \tag{1.15}$$

сосредоточен в той же точке $\xi=0$ и удовлетворяет уравнениям

$$P_m(\xi,\frac{\partial}{\partial t})\omega(\xi,t)=0,\quad Q_{n-m}(\xi,\frac{\partial}{\partial t})\omega(\xi,t)=0. \tag{1.16}$$

Подставив представление

$$\omega(\xi,t)=\sum_{j\leq n_o}c_j(t)\delta^{(j)}(\xi),\quad c_j(t)\in C^\infty[0,1],$$

где $\delta(\xi)$ – дельта-функция Дирака, в (1.16), в силу линейной независимости функционалов $\delta(\xi),\dots,\delta^{(n_o)}(\xi)$ получим

$$P_m(0,\frac{\partial}{\partial t})c_{n_o}(t)=0,\quad Q_{n-m}(0,\frac{\partial}{\partial t})c_{n_o}(t)=0. \tag{1.17}$$

Ввиду того, что множества $\{\lambda_1(0),\dots,\lambda_m(0)\}$, $\{\lambda_{m+1}(0),\dots,\lambda_n(0)\}$ не пересекаются (см. условие в)), отсюда следует, что $c_{n_*}(t)\equiv 0$. Аналогично находим, что $c_o(t)=\dots=c_{n_*-1}(t)\equiv 0$, т. е. $\omega(\xi,t)\equiv 0$. Таким образом

$$\sum_{j=0}^{m-1} v_j(\xi,t)\alpha_j(\xi)\equiv 0,\qquad \sum_{k=0}^{n-m-1} w_k(\xi,t)\beta_k(\xi)\equiv 0 \tag{1.18}$$

откуда легко вывести, что $\alpha_j(\xi)\equiv\beta_k(\xi)\equiv 0$. Единственность представления (1.11) доказана, теперь докажем ее существование. Пусть $u_j(\xi,t)$ – решение следующей задачи Коши (см, (1.7), (1.8)) :

$$P_n(\xi,\frac{\partial}{\partial t})u_j(\xi,t)=0,\ \ \frac{\partial^l u_j(\xi,0)}{\partial t^l}=\delta_j^l,\ l=0,\dots,n-1;\,j=0,\dots,n-1. \tag{1.19}$$

Тогда легко проверить, что

$$u_j(\xi,t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma(\xi)}\frac{\lambda^{n-j-1}+a_1(\xi)\lambda^{n-j-2}+\dots+a_{n-j-1}(\xi)}{P_n(\xi,\lambda)}e^{\lambda t}d\lambda, \tag{1.20}$$

где в $\gamma(\xi)$ – замкнутый контур, содержащий внутри себя все корни $P_n(\xi,\lambda)$. Общее решение уравнения (1.3) записывается в виде

$$\hat u(\xi,t)=\sum_{j=0}^{n-1}u_j(\xi,t)Q_j(\xi),\quad Q_j(\xi)=\frac{\partial^j\hat u(\xi,0)}{\partial t^j}\in S'. \tag{1.21}$$

Так как многочлены $P_m(\xi,\lambda)$ и $Q_{n-m}(\xi,\lambda)$ взаимно просты, то существуют многочлены $r_1(\xi,\lambda)$, $r_2(\xi,\lambda)$, с коэффициентами, удовлетворяющими (1.6), такие, что

$$\frac{\lambda^{n-j-1}+a_1(\xi)\lambda^{n-j-2}+\dots+a_{n-j-1}(\xi)}{P_n(\xi,\lambda)}=\frac{r_1(\xi,\lambda)}{P_m(\xi,\lambda)}+\frac{r_2(\xi,\lambda)}{Q_{n-m}(\xi,\lambda)}. \tag{1.22}$$

Используя (1.22) представим функцию $u_j(\xi,t)$ в виде

$$u_j(\xi,t)=u_{j1}(\xi,t)+u_{j2}(\xi,t), \tag{1.23}$$

где

$$u_{j1}(\xi,t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma(\xi)}\frac{r_1(\xi,\lambda)}{P_m(\xi,\lambda)}e^{\lambda t}d\lambda,\quad u_{j2}(\xi,t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma(\xi)}\frac{r_2(\xi,\lambda)}{Q_{n-m}(\xi,\lambda)}e^{\lambda t}d\lambda.$$

Очевидно $P_m(\xi,\frac{\partial}{\partial t})u_{j1}(\xi,t)=0$, $Q_{n-m}(\xi,\frac{\partial}{\partial t})u_{j2}(\xi,t)=0$, поэтому

$$u_{j1}(\xi,t)=\sum_{k=0}^{m-1}v_k(\xi,t)\frac{\partial^k u_{j1}(\xi,0)}{\partial t^k};\ u_{j2}(\xi,t)=\sum_{k=0}^{n-m-1}w_k(\xi,t)\frac{\partial^k u_{j2}(\xi,0)}{\partial t^k}. \tag{1.24}$$

Заметим, что $\frac{\partial^k u_{j1}(\xi,0)}{\partial t^k}$ является мультиимпликатором в S' (в отличие от $\frac{\partial^k u_{j2}(\xi,0)}{\partial t^k}$). Подставляя представления (1.23) для $u_j(\xi,t)$ в (1.21) и учитывая (1.24) получим

$$\hat{u}(\xi,t)=\sum_{k=0}^{m-1} v_k(\xi,t)\alpha_j(\xi)+\sum_{k=0}^{n-m-1} w_k(\xi,t)\beta_k(\xi), \tag{1.25}$$

где $\alpha_k(\xi)\in S'$. В силу оценок (1.9) первое слагаемое в (1.25) принадлежит классу S'_t, и так как $\hat{u}(\xi,t)\in S'_t$, заключаем что S'_t принадлежит также второе слагаемое. Отсюда легко вывести, что $\beta_k(\xi)\in S'$. Тем самым, лемма 1.2 доказана.

Задача А. Подставив выражение (1.11) $\hat{u}(\xi,t)$ в (1.4), получим систему

$$M(\xi)\gamma(\xi)=\hat{f}(\xi), \tag{1.26}$$

где $M(\xi)$ и $\gamma(\xi)$ те же, что в (1.13), а $\hat{f}(\xi)\doteq(\hat{f}_o(\xi),\ldots,\hat{f}_{n-1}(\xi))$. Для простоты предположим, что $\xi=0$ – единственный нуль функции $\Delta(\xi)=\det M(\xi)$ (см. (1.14)). Далее, пусть $\Delta(\xi)=\xi^{k_o}\Delta_o(\xi)$, где $k_o\geq 0$ целое число и $\Delta_o(\xi)\neq 0$ при любом $\xi\in\mathbb{R}$. Представим матрицу $M(\xi)$ в виде [4]

$$M(\xi)=N_1(\xi)D(\xi)N_2(\xi), \tag{1.27}$$

где $\det N_j(\xi)\neq 0$ в $\mathbb{R}$, $N_j(\xi)$ и ее производные полиномиального роста, $D(\xi)=$ $=\{\xi^{k_j}\delta_j^l\}$ – диагональная матрица, и $k_1+\cdots+k_n=k_o$, где $k_j\geq 0$ – целые числа. В силу (1.27) однородная ($\hat{f}(\xi)\equiv 0$) система (1.26) имеет k_o линейно независимых решения. Тем самым, также однородная задача А имеет k_o линейно независимых решения.

Докажем теперь разрешимость неоднородной системы (1.26) для любой функции $f(x)\in M(\mathbb{R})$. Для этого сначала выберем $F_j(x)\in M(\mathbb{R})$ такое, что $F_j^{(k_o)}(x)=f_j(x)$. Ясно, что в качестве частного решения (1.26) можно взять функционал $\gamma(\xi)=(-i\xi)^{(k_o)}M^{-1}(\xi)\hat{F}(\xi)$, $\hat{F}(\xi)=(\hat{F}_o(\xi),\ldots,\hat{F}_{n-1}(\xi))$. Подставив $\gamma(\xi)$ в (1.11), получим

$$\hat{u}(\xi,t)=\sum_{j=0}^{n-1}\omega_j(\xi,t)\hat{F}_j(\xi), \tag{1.28}$$

где $\omega_j(\xi,t)$ – вполне определенные функции, удовлетворяющие неравенству (1.9).

Перепишем (1.28) в виде

$$\hat{u}(\xi,t)=\sum_{j=0}^{n-1}(1+\xi^2)^{-s}\omega_j(\xi,t)\cdot(1+\xi^2)^s\hat{F}_j(\xi),$$

где s – целое число. Пусть $F_j\in M_\gamma(\mathbb{R})$. Выберем s так, чтобы для обратного преобразования Фурье $w_j(x,t)=F_\xi^{-1}[(1+\xi^2)^{-s}\omega_j(\xi,t)](x,t)$ имели

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial t^k}w_j(x,t)\right|\le c_k(1+|x|)^{-|\gamma|-2},\quad k=0,\dots,n-1.$$

Тогда при $\gamma\ge 0$ будем иметь $(1+|x-\tau|)^\gamma\le(1+|x|)^\gamma(1+|\tau|)^\gamma$, и, следовательно

$$|F_\xi^{-1}[(1+\xi^2)^{-s}\omega_j(\xi,t)\cdot(1+\xi^2)^s\hat{F}_j(\xi)]|\le\int|w_j(\tau,t)||(1-\frac{\partial^2}{\partial\tau^2})^sF_j(x-\tau)|d\tau\le$$

$$\le c_0\int(1+|\tau|)^{-\gamma-2}\cdot(1+|x|)^\gamma\cdot(1+|\tau|)^\gamma d\tau\le c_1(1+|x|)^\gamma.$$

При $\gamma<0$ воспользуемся неравенством Питри $(1+|x-\tau|)^{-|\gamma|}\le(1+|x|)^\gamma(1+|\tau|)^{-\gamma}$ и получим аналогичную оценку : $F_\xi^{-1}[\omega_j(\xi,t)\cdot\hat{F}_j(\xi)](x,t)\in M(D)$. Таким образом, нами доказана

Теорема 1.1. *Однородная граничная задача А может иметь лишь конечное число линейно независимых решений, а неоднородная – разрешима при любых $f_j\in M(R)$.*

§2. ОБЩАЯ ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА

В граничной задаче А заменим условия (1.1), (1.2) следующими :

$$\sum_{j=0}^{n-1}b_{jk}(i\frac{\partial}{\partial x})\frac{\partial^j u(x,0)}{\partial t^j}=f_k(x),\quad k=0,\dots,m-1,\tag{2.1}$$

$$\sum_{j=0}^{n-1}c_{jk}(i\frac{\partial}{\partial x})\frac{\partial^j u(x,1)}{\partial t^j}=f_{k+m}(x),\quad k=0,\dots,n-m-1,\tag{2.2}$$

где $b_{jk}(\xi)$, $c_{jk}(\xi)$ – многочлены от ξ с постоянными коэффициентами. Далее, введем в рассмотрение многочлены

$$\sum_{j=0}^{m-1}b^1_{jk}(\xi)\lambda^j=\sum_{j=0}^{n-1}b_{jk}(\xi)\lambda^j(\mathrm{mod}\ P_m(\xi,\lambda)),\quad k=0,\dots,m-1,\tag{2.3}$$

$$\sum_{j=0}^{n-m-1}c^1_{jk}(\xi)\lambda^j=\sum_{j=0}^{n-1}c_{jk}(\xi)\lambda^j(\mathrm{mod}\ Q_{n-m}(\xi,\lambda)),\quad k=0,\dots,n-m-1,\tag{2.4}$$

и квадратные матрицы $B_1(\xi)=(b^1_{jk}(\xi))_{j,k=0}^{m-1}$, $C_1(\xi)=(c^1_{jk}(\xi))_{j,k=0}^{n-m-1}$.

Теорема 2.1. *Условие*

$$\det B_1(\xi)\cdot\det C_1(\xi)\not\equiv 0. \tag{2.5}$$

необходимо и достаточно для того, чтобы однородная задача (3), (2.1), (2.2) имела конечное число линейно независимых решений, а соответствующая неоднородная задача имела решение при любых $f_o,\dots,f_{n-1}\in M(\mathbb{R})$.

Доказательство. *Достаточность.* Пусть (2.5) выполнено. Поскольку функции $\det B_1(\xi)$, $\det B_2(\xi)$ аналитичны, то они либо имеют конечное число нулей, либо же тождественно равны нулю. В (2.1), (2.2) перейдем к образам Фурье. Затем, воспользовавшись представлением (1.11) получим

$$\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{m-1} b_{jk}(\xi)\frac{\partial^j v_l(\xi,0)}{\partial t^j}\cdot\alpha_l(\xi)+\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{n-m-1} b_{jk}(\xi)\frac{\partial^j w_l(\xi,0)}{\partial t^j}\cdot\beta_l(\xi)=\hat f_k(\xi),$$
$$k=0,\dots,m-1, \tag{2.6}$$

$$\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{m-1} c_{jk}(\xi)\frac{\partial^j v_l(\xi,1)}{\partial t^j}\cdot\alpha_l(\xi)+\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{n-m-1} c_{jk}(\xi)\frac{\partial^j w_l(\xi,1)}{\partial t^j}\cdot\beta_l(\xi)=\hat f_{k+m}(\xi),$$
$$k=0,\dots,n-m-1. \tag{2.7}$$

Применяя обозначения (2.3), (2.4), условия (2.6), (2.7) можно записать в виде

$$\sum_{j,l=0}^{m-1} b^1_{jk}(\xi)\frac{\partial^j v_l(\xi,0)}{\partial t^j}\cdot\alpha_l(\xi)+\sum_{j,l=0}^{n-m-1} b^2_{jk}(\xi)\frac{\partial^j w_l(\xi,0)}{\partial t^j}\cdot\beta_l(\xi)=\hat f_k(\xi),$$
$$k=0,\dots,m-1, \tag{2.8}$$

$$\sum_{j,l=0}^{m-1} c^2_{jk}(\xi)\frac{\partial^j v_l(\xi,1)}{\partial t^j}\cdot\alpha_l(\xi)+\sum_{j,l=0}^{n-m-1} c^1_{jk}(\xi)\frac{\partial^j w_l(\xi,1)}{\partial t^j}\cdot\beta_l(\xi)=\hat f_{k+m}(\xi),$$
$$k=0,\dots,n-m-1. \tag{2.9}$$

Матрица системы (2.8), (2.9) имеет вид

$$A(\xi)=\begin{pmatrix}B_1(\xi) & B_2(\xi)\\ C_2(\xi) & C_1(\xi)\end{pmatrix}, \tag{2.10}$$

где $B_1(\xi)$, $C_1(\xi)$ введены выше, а $B_2(\xi)=\left(b^2_{jk}(\xi)\frac{\partial^j w_l(\xi,0)}{\partial t^j}\right)_{j,l=0}^{n-m-1}$, $C_2(\xi)=$ $=\left(c^2_{jk}(\xi)\frac{\partial^j v_l(\xi,1)}{\partial t^j}\right)_{j,l=0}^{m-1}$. Разлагая определитель $\det A(\xi)$ по теореме Лапласа, получим

$$\Delta(\xi)=c\cdot\xi^\alpha(1+o(1)),\quad c\neq 0,\alpha\in\mathbb{R},|\xi|\to+\infty. \tag{2.11}$$

Отсюда следует, что функция $\Delta(\xi)$ может иметь лишь конечное число нулей. Отсюда, как и при исследовании задачи А, следует достаточность условия (2.5).

Необходимость. Пусть условие (2.5) не выполнено. Тогда по крайней мере один из множителей в (2.5) – тождественный ноль. Для определенности пусть $\det B_1(\xi) \equiv 0$. Нам достаточно показать, что при выполнении такого тождества неоднородная задача (3), (2.1), (2.2) разрешима не для всех $f_o, \ldots, f_{n-1} \in M(\mathbb{R})$. Согласно (2.3), условия (2.1) равносильны следующим условиям :

$$\sum_{j=0}^{m-1} b_{jk}^1(\xi)\frac{\partial^j \hat{u}(\xi,0)}{\partial t^j} = \hat{f}_k(\xi), \quad k = 0,\ldots,m-1. \tag{2.12}$$

Так как элементы $b_{jk}^1(\xi)$ матрицы $B_1(\xi)$ – аналитические функции, то существует интервал (a_o, b_o) такой, что либо $b_{jk}^1(\xi) \neq 0$ в (a_o, b_o), либо же $b_{jk}^1(\xi) \equiv 0$. Ясно, что существует интервал $(a_1, b_1) \subset (a_o, b_o)$, на котором матрица $B_1(\xi)$ представима в виде

$$B_1(\xi) = N_1(\xi)D(\xi)N_2, \tag{2.13}$$

где $\det N_1(\xi) \cdot \det N_2 \neq 0$, N_2 – постоянная матрица, элементы $N_1(\xi)$ и $D(\xi)$ аналитичны по $\xi \in (a_1, b_1)$, и матрица $D(\xi)$ имеет трапецоидальный вид. Так как $\det D(\xi) \equiv 0$, то по крайней мере один из диагональных элементов $D(\xi)$ – тождественный ноль. Отсюда следует, что тождественным нулем является некоторая нетривиальная линейная комбинация $\hat{f}_k(\xi)$. Теорема доказана.

Следствие 2.1. Рассмотрим следующую задачу для уравнения (3) :

$$\frac{\partial^j u(x,0)}{\partial t^j} = f_j(x), \quad j = 0,\ldots,m-1, \tag{2.14}$$

$$\frac{\partial^j u(x,1)}{\partial t^j} = f_j(x), \quad j = 0,\ldots,n-1, \tag{2.15}$$

где (2.15) есть часть условий задачи Коши при $t = 1$. Проверим выполнение условия (2.5). Ясно, что $B_1(\xi)$ – единичная матрица порядка m. Пусть

$$\lambda^s = r_s(\xi,\lambda)Q_{n-m}(\xi,\lambda) + q_s(\xi,\lambda), \quad s = m,\ldots,n-1. \tag{2.16}$$

Пусть при больших $|\xi|$ существует набор функций $c_m(\xi), \ldots, c_{n-1}(\xi)$ такой, что

$$\lambda^m(c_m(\xi)+c_{m+1}(\xi)\lambda+\cdots+c_{n-1}(\xi)\lambda^{n-m-1}) \equiv Q_{n-m}(\xi,\lambda)\sum_{s=m}^{n-1} r_s(\xi,\lambda)c_s(\xi). \tag{2.17}$$

Из условия б) следует, что многочлены $Q_{n-m}(\xi,\lambda)$ и λ^m взаимно просты. Поэтому из (2.17) находим deg $(\sum_{s=m}^{n-1} r_s(\xi,\lambda)c_s(\xi)) \geq m$, и тождество (2.17) может иметь место лишь при $c_m(\xi) = \cdots = c_{n-1}(\xi) \equiv 0$. Таким образом, многочлены $q_m(\xi,\lambda)$, ..., $q_{n-1}(\xi,\lambda)$ линейно независимы при $|\xi| >> 1$, и поэтому $\det C_1(\xi) \not\equiv 0$.

§3. ПРИМЕРЫ

1. Простейшим уравнением вида (3), удовлетворяющим условиям а), б), в) является уравнение составного типа

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 1\right)u(x,t) = 0, u \in M(D), \tag{3.1}$$

для которого $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -\sqrt{1+\xi^2}$, $\lambda_3 = \sqrt{1+\xi^2} \to_{\xi\to\infty} +\infty$.

Задача А имеет вид

$$u(x,0) = f_o(x), \quad \frac{\partial u(x,o)}{\partial t} = f_1(x), \quad u(x,1) = f_2(x), f_j \in M(\mathbb{R}). \tag{3.2}$$

Образ Фурье $\hat{u}(\xi,t)$ решения $u(x,t)$ уравнения (3.1) имеет вид

$$\hat{u}(\xi,t) = \hat{c}_o(\xi) + \hat{c}_1(\xi)e^{-\sqrt{1+\xi^2}t} + \hat{c}_2(\xi)e^{\sqrt{1+\xi^2}(t-1)},$$

и, в силу (3.2) приходим к системе

$$M(\xi)\hat{c}(\xi) = \hat{f}(\xi), \tag{3.3}$$

$\hat{c}(\xi) = (\hat{c}_o(\xi), \hat{c}_1(\xi), \hat{c}_2(\xi))$, $\hat{f}(\xi) = (\hat{f}_o(\xi), \hat{f}_1(\xi), \hat{f}_2(\xi))$, $\det M(\xi) = -\sqrt{1+\xi^2}(1-$ $-e^{-\sqrt{1+\xi^2}})^2 \neq 0$ при любых $\xi \in \mathbb{R}$. Однородная система (3.3), и вместе с ней однородная задача (3.1), (3.2), очевидно имеют только тривиальное решение. Из (3.3) следует, что

$$\hat{c}_j(\xi) = \sum_{k=0}^{2} p_{jk}(\xi)\hat{f}_k(\xi), \quad j = 0,1,2,$$

где $p_{jk}(\xi) \in C^\infty(\mathbb{R})$. Эта функция, а также ее производные, имеют степенной рост. Поэтому $c_j(x) = F_\xi^{-1}(\hat{c}_j(\xi)) \in M(\mathbb{R})$. Ясно, что $u(x,t) = F_\xi^{-1}[\hat{u}(\xi,t)] \in$ $\in M(D)$, тем самым задача (3), (3.1), (3.2) корректна.

2. Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}-2\pi i\right)u(x,t)=0, u\in M(D). \tag{3.4}$$

Имеем $\lambda_1=0$, $\lambda_2=\xi^2+2\pi i$. Граничная задача А имеет вид

$$u(x,0)=f_o(x),\quad u(x,1)=f_1(x). \tag{3.5}$$

Рассуждая как выше, получим $\hat{u}(\xi,t)=\hat{c}_o(\xi)+\hat{c}_1(\xi)e^{(\xi^2+2\pi i)(t-1)}$. В силу (3.5)

$$\hat{c}_o(\xi)+\hat{c}_1(\xi)e^{-\xi^2}=\hat{f}_o(\xi),\quad \hat{c}_o(\xi)+\hat{c}_1(\xi)=\hat{f}_1(\xi). \tag{3.6}$$

Сначала рассмотрим однородную систему (3.6). Ясно, что $\hat{c}_1(\xi)=-\hat{c}_o(\xi)$, $\hat{c}_o(\xi)(1-e^{-\xi^2})=0$ в S'. Поскольку $\varphi(\xi)=\xi^{-2}(1-e^{-\xi^2})\in C^\infty$ и $\varphi(0)\neq 0$, то имеем $\hat{c}_o(\xi)=(\alpha_1\delta(\xi)+\alpha_2\delta'(\xi))\varphi^{-1}(\xi)$. Тем самым, однородная система (3.6), а также однородная задача (3.4), (3.5), имеют два линейно независимых решения. В качестве частного решения (3.6) можно брать

$$\hat{c}_o(\xi)=\frac{\hat{F}_o(\xi)-e^{-\xi^2}\hat{F}_1(\xi)}{\varphi(\xi)},\quad \hat{c}_1(\xi)=\hat{f}_1(\xi)-\frac{\hat{F}_o(\xi)-e^{-\xi^2}\hat{F}_1(\xi)}{\varphi(\xi)},$$

где $F_j''(x)=f(x)$, $j=0,1$. Очевидно $F^{-1}(\hat{c}_j(\xi))\in M(\mathbb{R})$. Таким образом, однородная задача (3.4), (3.5) имеет два линейно независимых решения, а неоднородная – разрешима при любых $f_0(x), f_1(x)\in M(R)$ (см. теорему 1.1).

3. Нижеследующий пример показывает, что условия а), б), в), накладываемые на оператор $P_n(i\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t})$, являются достаточными, но не необходимы для того, чтобы задача А удовлетворяла теореме 1.1.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0,\quad \text{для которого}\quad \lambda_1=\lambda_2=0, \tag{3.7}$$

с граничными условиями

$$u(x,0)=f(x),\quad u(x,1)=g(x),\quad f,g\in M(\mathbb{R}). \tag{3.8}$$

Ясно, что единственное решение задачи (3.7), (3.8) задается формулой

$$M(D) \ni u(x,t) = f(x) + t(g(x) - f(x)).$$

Однако, условие б) не выполнено, так как на $u(x,t)$ необходимо наложить только условия Коши в точке $t = 0$, т. е. $u(x,0) = f(x)$, $\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = g(x)$.

ABSTRACT. Consider the differential equation

$$\frac{\partial^n u(x,t)}{\partial t^n} + \sum_{j=1}^{n} a_j\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial^{n-j} u(x,t)}{\partial t^{n-j}} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, 0 < t < 1,$$

where $a_j(\xi)$ are polynomials in $\xi \in \mathbb{R}^1$ with constant coefficients. We are looking for solutions $u(x,t)$ which together with their derivatives polynomial growth in $x \in \mathbb{R}^1$. Assume that the roots $\lambda_1(\xi)$, ..., $\lambda_n(\xi)$ (some of them can coincide) of the corresponding characteristic polynomial $\lambda^n + a_1(\xi)\lambda^{n-1} + \ldots + a_n(\xi)$ satisfy the conditions : a) $\mathrm{Re}\,\lambda_j(\xi) \leq \alpha$, $j = 1,\ldots,m < n$, b) $\mathrm{Re}\,\lambda_j(\xi) \to_{|\xi|\to+\infty} +\infty$, $j = m+1,\ldots,n$, c) $\{\lambda_1(\xi),\ldots,\lambda_m(\xi)\} \cap \{\lambda_{m+1}(\xi),\ldots,\lambda_n(\xi)\} = \emptyset$.
The boundary value problem

$$\frac{\partial^j u(x,0)}{\partial t^j} = f_j(x),\ j = 0,\ldots,m-1, \qquad \frac{\partial^j u(x,1)}{\partial t^j} = f_{j+m}(x),\ j = 0,\ldots,n-m-1$$

is shown to be always solvable by a kernel of finite dimension. The general boundary value problem is discussed from this point of view as well.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Р. Волевич, С. Г. Гиндикин, "Задача Коши", Итоги науки и техники, Современные проблемы математики, т. 32, Москва, 1988.
2. В. С. Владимиров, Обобщенные функции в математической физике, Москва, "Наука", 1976.
3. Г. Е. Шилов, Математический анализ. Второй спецкурс, Москва, "Наука", 1965.
4. З. Прёсдорф, Некоторые классы сингулярных уравнений, Москва, "Мир", 1974.

5 апреля 1994

Государственный инженерный университет Армении