

# КОНЕЧНО-АДДИТИВНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ НА ПЛОСКОСТИ

Г. С. Сукиасян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,  
том 29, №4, 1994

В статье рассмотрены конечно-аддитивные функционалы, определенные на выпуклых, ограниченных многоугольниках на плоскости. Найдены условия, при которых эти функционалы определяют знакопеременные меры на евклидовой плоскости. В одном из рассматриваемых случаев для этого оказывается необходимым и достаточным выполнение тригонометрического условия на “флаговую плотность”, связанного с классической формулой Грина.

## ВВЕДЕНИЕ

Настоящая статья из ряда работ, начатых Р. В. Амбарцумяном [1] и продолженных в [2–4], относящихся к конечно-аддитивным (эйлеровым) функционалам в интегрально-геометрических пространствах прямых в  $\mathbb{R}^2$  и плоскостей в  $\mathbb{R}^3$ . Здесь рассмотрены аналогичные конечно-аддитивные функционалы в евклидовой плоскости  $\mathbb{R}^2$ . Сначала выводятся некоторые комбинаторные представления, позволяющие представить значения меры многоугольников с помощью “примарных” функций, зависящих от “игл” или от “углов” (определения этих геометрических элементов даны в §1 и §3). Мы рассматриваем локально-конечные, знакопеременные меры на плоскости, абсолютно непрерывные по отношению к лебеговой мере.

Полученные представления лежат в основе определения исследуемых функционалов на ограниченных, выпуклых многогранниках. Основным вопросом

---

Данное исследование частично финансировано грантом по. RYB000 Международного Научного Фонда.

является: при каких условиях этими функционалами определяется мера на  $\mathbb{R}^2$ ?

В специальном случае, когда примарная функция зависит от игл (§§1,2), показано, что для продолжения меры необходимо и достаточно выполнение тригонометрического условия на "флаговую плотность", известного из классической формулы Грина. В случае, когда примарная функция зависит от углов, удалось свести задачу к случаю иглы (§3). При этом, решение получено с применением критерия Грина (§4). Наконец, в следствии 6.3 рассмотрен смешанный случай. Это мотивировано тем, что подобные смешанные функционалы естественно возникают в контексте общей задачи построения меры в пространстве плоскостей в  $\mathbb{R}^3$  (см. статью Р. Арамяна [4] в этом номере). В [4] смешанные функционалы определены на поверхности сферы, а здесь – на плоскости. При этом, некоторые из приведенных ниже подходов по-видимому применимы также на сфере.

## §1. ПРИМАРНЫЕ ФУНКЦИИ НА ИГЛАХ

В этом параграфе мы представим значения мер на многоугольниках посредством некоторых функций, определенных на *иглах*. Игла  $\nu$  является направленным отрезком прямой, т. е.  $\nu$  есть упорядоченная пара  $\nu = (P_1, P_2)$  точек  $P_1, P_2 \in \mathbb{R}^2$ . Для любой иглы  $\nu$  естественным образом определяются ее *правая* и *левая полуплоскости* (ограниченные прямой, содержащей  $\nu$ ). Полагая, что начало координат  $O$  фиксировано, определим функцию на иглах

$$b_\nu = \begin{cases} +1, & \text{если } O \text{ лежит в правой полуплоскости } \nu, \\ -1, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Через  $\mathcal{M}$  обозначим класс локально-конечных, знакопеременных мер на  $\mathbb{R}^2$ , абсолютно непрерывных по отношению к лебеговой мере. Рассмотрим меру  $m \in \mathcal{M}$ . Обозначая через  $\Delta OP_1P_2$  треугольник с вершинами  $O, P_1, P_2 \in \mathbb{R}^2$ , определим следующую функцию на иглах:

$$H(\nu) = b_\nu m(\Delta OP_1P_2), \quad (1.1)$$

где  $\nu$  – игла с началом в  $P_1$  и с концом в  $P_2$ . Очевидно, что  $H$  удовлетворяет

следующим условиям :

- (а)  $H$  непрерывна в топологии  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ ,  $H(P, P) = 0$  при любом  $P \in \mathbb{R}^2$ ;
- (б) если точки  $O, P_1$  и  $P_2$  лежат на одной прямой, то  $H(P_1, P_2) = 0$ ;
- (в)  $H$  антисимметрична, т. е.  $H(P_1, P_2) = -H(P_2, P_1)$ ;
- (г)  $H$  линейно-аддитивна, т. е. для каждой тройки точек  $P_1, P_2, P_3$ , лежащих на прямой, причем  $P_2$  лежит между  $P_1$  и  $P_3$ , имеем

$$H(P_1, P_2) + H(P_2, P_3) = H(P_1, P_3).$$

Любой ограниченный, выпуклый, плоский многоугольник  $D$  обладает набором игл  $S(D)$ . По определению, любая игла  $\nu \in S$  является стороной  $D$ , и  $\nu$  направлено по часовой стрелке вдоль границы  $\partial D$ , т. е. внутренность  $D$  принадлежит правой полуплоскости стороны  $\nu$ . Легко проверить, что

Для значения меры  $m$  на ограниченном, выпуклом многоугольнике  $D$  справедливо представление

$$m(D) = \sum_{\nu \in S(D)} H(\nu). \tag{1.2}$$

Представление (1.2) является основой для следующего определения. Пусть

$F_1(\nu) = F_1(P_1, P_2)$  — непрерывная функция, определенная на пространстве игл.

Построим функционал  $\Phi_1$ , определенный на ограниченных, выпуклых многоугольниках :

$$\Phi_1(D) = \sum_{\nu \in S(D)} F_1(\nu). \tag{1.3}$$

Функцию  $F_1$  назовем примарной для  $\Phi_1$ .

**Замечание.** Значение  $\Phi_1(D)$  не зависит от предположений типа “ $D$  замкнуто”, или “ $D$  открыто”. Фактически  $D$  будет обозначать класс эквивалентных множеств. Два множества  $D_1, D_2 \subset \mathbb{R}^2$  по определению эквивалентны, если они совпадают с точностью до множества, допускающего покрытие конечным набором прямых. Точнее, множество  $D \subset \mathbb{R}^2$  называем многоугольником, если оно эквивалентно множеству, являющемуся обычным открытым многоугольником.

Если конечное объединение  $D = \bigcup_{i=1}^n D_i$  непересекающихся, выпуклых многоугольников  $D_i$  само является выпуклым многоугольником, то будем писать  $D = D_1 \uplus \dots \uplus D_n$ . Функционал  $\Phi(D)$ , определенный на многоугольниках называется *конечно-аддитивным*, если из равенства  $D = D_1 \uplus \dots \uplus D_n$  следует, что  $\Phi(D) = \sum_{i=1}^n \Phi(D_i)$ . Имеет место следующая простая

**Лемма 1.1.** Пусть  $F_1(\nu)$  – непрерывная функция, определенная на пространстве игл. Функционал (1.3) аддитивен тогда и только тогда, когда примарная функция  $F_1$  антисимметрична и линейно-аддитивна.

### Примеры

1) Если  $F_1(\nu) = H(\nu)$ , т. е. примарная функция  $F_1$  определяется мерой  $m$  по формуле (1.1), то  $F_1$  по (1.3) определяет аддитивный функционал, значение которого равно  $m(D)$  на любом многоугольнике  $D$ . В частности, мере Лебега  $\mu$  на плоскости, с нормирующим условием  $\mu([0, 1] \times [0, 1]) = 1$ , соответствует примарная функция

$$F_1(P_1, P_2) = \frac{1}{2} r_1 r_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{1}{2} p(\nu) |\nu|, \quad (1.4)$$

где  $(r_i, \varphi_i)$  – полярные координаты точки  $P_i$ ,  $i = 1, 2$ , угол  $\varphi_i$  измерен против часовой стрелки,  $|\nu|$  – длина иглы  $\nu = (P_1, P_2)$ , а  $p(\nu)$  – знакопеременное расстояние между началом координат  $O$  и прямой, содержащей  $\nu$ . Если  $O$  лежит в правой полуплоскости  $\nu$ , то полагаем, что  $p > 0$ .

2) Пусть  $f(p)$  – непрерывная, нечетная функция на  $\mathbb{R}$ . Тогда примарная функция  $F_1(\nu) = f(p(\nu)) |\nu|$  удовлетворяет условиям (а) – (г) и порождает конечно-аддитивный функционал  $\Phi_1(D)$  по формуле (1.3). Ниже будет доказано, что  $\Phi_1$  порождает меру  $m \in \mathcal{M}$  только в том случае, когда  $f(p)$  – линейная функция.

Последний пример показывает, что условия (а) – (г) не гарантируют того, чтобы  $\Phi_1$  было мерой в  $\mathbb{R}^2$ . На вопрос *каковы дополнительные условия на*

примарную функцию  $F_1$ , обеспечивающие порождение меры, будет дан ответ в следующем параграфе в терминах "флаговых плотностей".

## §2. ФЛАГОВЫЕ ПЛОТНОСТИ И ФОРМУЛА ГРИНА

Флагом называется пара  $f = (P, h)$ , где  $P$  – точка в  $\mathbb{R}^2$ , а  $h$  – полуплоскость с границей  $\partial h$ , содержащей  $P$ . Ниже мы будем пользоваться обозначением  $f = (x, y, \alpha)$ , где  $(x, y)$  – декартовы координаты точки  $P$ , а  $\alpha \in [0, 2\pi)$  – направление внешней нормали к  $\partial h$ . Любой непрерывной функцией  $\rho(f)$ , заданной на пространстве флагов, определяется функция  $F_1$  на пространстве игл:

$$F_1(P_1, P_2) = \int_{P_1}^{P_2} \rho(l, h) dl, \quad (2.1)$$

где  $h$  – правая полуплоскость к игле  $(P_1, P_2)$ , направленной из  $P_1$  к  $P_2$  ( $\rho$  называется *флаговой плотностью*). Функция  $F_1$ , заданная формулой (2.1), линейно-аддитивна. Если  $\rho$  удовлетворяет условию

$$\rho(x, y, \alpha) = -\rho(x, y, \alpha + \pi), \quad \text{т. е. } \rho(l, h) = -\rho(l, \bar{h}), \quad l \in \partial h, \quad (2.2)$$

где  $\bar{h}$  – дополнительная к  $h$  полуплоскость, то функция  $F_1$  антисимметрична. Всюду ниже мы будем рассматривать только примарные функции  $F_1$ , представимые в виде (2.1) с плотностью  $\rho$ , удовлетворяющей условию (2.2) и дважды непрерывно дифференцируемой. В последнем случае будем говорить, что  $F_1$  обладает *гладкой* флаговой плотностью  $\rho$ .

**Пример.** Функция  $\rho(l, h) = 1/2r(h)$  является флаговой плотностью функции (1.4). Здесь  $r(h)$  – *знакопеременное расстояние* между  $O$  и  $\partial h$ . При  $O \in h$  будем считать, что  $r > 0$ . Прямая  $\partial h$  определяется равенством  $x \cos \alpha + y \sin \alpha = r$ ,  $\alpha \in [0, 2\pi)$ , где  $\alpha$  – направление внешней к  $h$  нормали. Тем самым, флаговая плотность

$$\rho_o(x, y, \alpha) = \frac{1}{2}(x \cos \alpha + y \sin \alpha) \quad (2.3)$$

порождает по формулам (2.1) и (1.3) плоскую меру Лебега.

Рассмотрим гладкую флаговую функцию  $\rho(f)$ , удовлетворяющую (2.2). Пользуясь (2.1) и (1.3) построим соответствующую функцию  $\Phi_1$ . По лемме 1.1,  $\Phi_1$  – аддитивна.

**Лемма 2.1.** Пусть  $D$  – произвольный ограниченный, выпуклый многоугольник. Тогда справедливо представление

$$\begin{aligned} \Phi_1(D) = & \iint_D \left[ \frac{\partial}{\partial x} \rho(x, y, 0) + \frac{\partial}{\partial y} \rho(x, y, \pi/2) \right] dx dy + \\ & + \int_{\partial D} [\rho(l_1, l_2, \alpha) - \cos \alpha \rho(l_1, l_2, 0) - \sin \alpha \rho(l_1, l_2, \pi/2)] dl, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где  $\partial D$  – граница  $D$ , а  $\alpha$  – направление внешней нормали в точке  $l \in \partial D$ ,  $l = (l_1, l_2)$ .

**Доказательство.** Поскольку  $\Phi_1(D) = \int_{\partial D} \rho(l_1, l_2, \alpha) dl$ , то (2.4) эквивалентно классической формуле Грина :

$$\begin{aligned} \iint_D \left[ \frac{\partial}{\partial x} \rho(x, y, 0) + \frac{\partial}{\partial y} \rho(x, y, \pi/2) \right] dx dy = \\ = \int_{\partial D} [\cos \alpha \rho(l_1, l_2, 0) + \sin \alpha \rho(l_1, l_2, \pi/2)] dl. \end{aligned}$$

**Замечание.** Другое доказательство леммы 2.1 основано на использовании асимптотических разложений

$$\Phi_1(\square) = \delta_x \delta_y \left[ \frac{\partial}{\partial x} \rho(x_0, y_0, 0) + \frac{\partial}{\partial y} \rho(x_0, y_0, \pi/2) \right] + o(\delta_x \delta_y), \quad (2.5)$$

$$\Phi_1(\triangle) = [-\cos \alpha \rho(x, y, 0) - \sin \alpha \rho(x, y, \pi/2) + \rho(x, y, \alpha)] \delta + o(\delta). \quad (2.6)$$

В (2.5)  $\square$  – прямоугольник со сторонами длины  $\delta_x$  и  $\delta_y$ , параллельными координатным осям,  $(x_0, y_0)$  – координаты нижних левых вершин, а длины  $\delta_x, \delta_y$  стремятся к нулю. В (2.6)  $\triangle$  – прямоугольный треугольник с катетами, параллельными координатным осям,  $(x, y)$  – вершина прямого угла  $\triangle$ ,  $\delta$  – длина гипотенузы,  $\alpha$  – направление внешней нормали к гипотенузе, и  $\delta$  стремится к нулю.

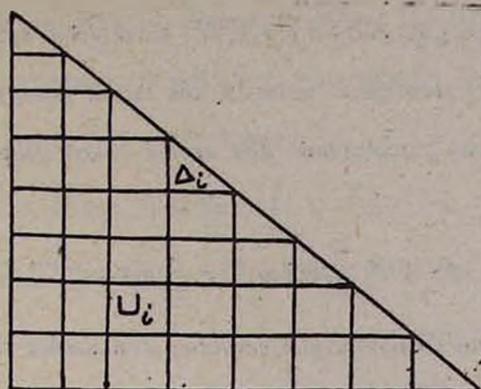


Рис. 1.

Предположим сначала, что  $D$  – прямоугольный треугольник с катетами, параллельными координатным осям, и гипотенузой  $\nu$ . Разобьем  $\nu$  на  $n$  равных отрезков и через их концы проведем вертикальные и горизонтальные прямые, разбивающие на части  $D$  (см. рис. 1). Обозначим через  $\{U_i\}$  квадратные, а через  $\{\Delta_i\}$  – треугольные компоненты разбиения  $D$ . В силу конечной аддитивности

$$\Phi_1(D) = \sum_{U_i} \Phi_1(U_i) + \sum_{\Delta_i} \Phi_1(\Delta_i). \tag{2.7}$$

Подстановкой (2.5) и (2.6) суммы в (2.7) приводятся к интегральным суммам для интегралов из (2.4) и дополнительному слагаемому. Поскольку  $\rho$  предполагалось гладким, то дополнительное слагаемое стремится к нулю при  $n \rightarrow \infty$ , и (2.7) переходит в (2.4). В случае произвольного  $D$  искомое утверждение следует из конечной аддитивности  $\Phi_1$ , поскольку любой ограниченный, выпуклый многоугольник может быть представлен в виде конечного объединения непересекающихся прямоугольных треугольников с катетами, параллельными координатным осям.

Это “длинное” доказательство леммы 2.1 было приведено ввиду того, что оно схоже с некоторыми доказательствами, данными (в других ситуациях) в других статьях этого номера, а также в работах [1], [2].

**Теорема 2.1.** Пусть  $\Phi_1(D)$  – функционал, порожденный по (1.3) и (2.1) гладкой флаговой плотностью  $\rho(f)$ . Функционалом  $\Phi_1$  порождается мера  $m \in \mathcal{M}$  тогда и только тогда, когда  $\rho(f)$  удовлетворяет условию

$$\rho(x, y, \alpha) = \cos \alpha \rho(x, y, 0) + \sin \alpha \rho(x, y, \pi/2). \quad (2.8)$$

Если равенство (2.8) выполнено хотя бы для одной декартовой координатной системы  $(x, y)$ , то оно справедливо для любой такой координатной системы.

Функция

$$q(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \rho(x, y, 0) + \frac{\partial}{\partial y} \rho(x, y, \pi/2) \quad (2.9)$$

не зависит от выбора координатной системы и является плотностью меры  $m$  относительно меры Лебега.

Доказательство. Достаточность условия (2.8) следует непосредственно из (2.4).

Предположим, что  $\Phi_1(D) = m(D)$  для некоторой меры  $m \in \mathcal{M}$  и покажем, что в этом случае имеет место (2.8). Для этого рассмотрим прямоугольный треугольник  $D$  с катетами, параллельными координатным осям и гипотенузой  $\nu$ . Как и в доказательстве леммы 2.1, произведем разбиение  $D$  (см. рис. 1). Из (2.4) следует, что

$$\Phi_1(\cup_i \Delta_i) = \iint_{\cup_i \Delta_i} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \rho(x, y, 0) + \frac{\partial}{\partial y} \rho(x, y, \pi/2) \right] dx dy. \quad (2.10)$$

Пусть  $D_n = \cup_i \Delta_i$ . Согласно (2.10)

$$m(D_n) = \iint_{D_n} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \rho(x, y, 0) + \frac{\partial}{\partial y} \rho(x, y, \pi/2) \right] dx dy.$$

Поскольку  $D$  можно предполагать открытой областью, то  $m(D) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(D_n)$ .

Отсюда следует, что

$$\int_{\nu} [\rho(l_x, l_y, \alpha) - \cos \alpha \rho(l_x, l_y, 0) - \sin \alpha \rho(l_x, l_y, \pi/2)] dl = 0. \quad (2.11)$$

Так как (2.11) верно для любой иглы  $\nu$ , то подынтегральная функция тождественно равна нулю. Теорема 2.1 доказана.

Замечание. Второй пример в §1, показывает, что только независимости (2.9) от выбора координатной системы не достаточно для порождения меры.

Следствие 2.1. Пусть  $\rho(f)$  – гладкая функция, заданная на пространстве флагов, а  $q(x, y)$  – непрерывная функция, заданная на  $\mathbb{R}^2$ . Если для любых выпуклых многоугольников  $D$  тождественно

$$\iint_D q(x, y) dx dy = \int_{\partial D} \rho(x, y, \alpha) dl, \quad (2.12)$$

то существуют функции  $P$  и  $Q$ , определенные на  $\mathbb{R}^2$  и такие, что

$$q = \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \rho = P \sin \alpha + Q \cos \alpha, \text{ т. е. (2.12) есть формула Грина.}$$

### §3. ПРИМАРНЫЕ ФУНКЦИИ НА УГЛАХ

В §4 будет рассмотрена задача порождения меры посредством функционалов, зависящих от примарных функций, заданных не на иглах, а на углах. Сделанная в этом параграфе подготовительная работа дает возможность применять в §4 результаты §2.

Часть плоскости, ограниченная двумя лучами, исходящими из одной точки, называется *углом*. Выделим первую и вторую стороны  $R_1$  и  $R_2$  угла  $c$ , полагая, что угол отмеренный против часовой стрелки от  $R_1$  к  $R_2$  должен быть меньше  $\pi$ . Будем писать  $c = (P, \alpha, \beta)$ , где  $P = R_1 \cap R_2$  – вершина  $c$ ,  $\alpha \in [0, 2\pi)$  – направление  $R_1$ , а  $\beta \in [0, \pi)$  – раствор угла между  $R_1$  и  $R_2$ . Пусть  $D$  – плоский, ограниченный, выпуклый многоугольник. Будем говорить, что *угол  $c$  принадлежит  $D$* , если вершина угла  $c$  является вершиной для  $D$ , и каждая сторона  $c$  содержит сторону  $D$ . Множество углов, принадлежащих  $D$ , обозначим через  $C(D)$ .

Пусть  $F_2(c)$  – непрерывная функция, заданная на пространстве углов. Будем говорить, что  $F_2$  *ангулярно-аддитивна*, если при любых  $P \in \mathbb{R}^2$ ,  $\alpha \in [0, 2\pi)$ ,  $\beta_1, \beta_2 \in [0, \pi)$  и  $\beta_1 + \beta_2 \leq \pi$  имеет место равенство

$$F_2(P, \alpha, \beta_1) + F_2(P, \alpha + \beta_1, \beta_2) = F_2(P, \alpha, \beta_1 + \beta_2).$$

Если раствор  $\beta$  угла  $c$  равен  $\pi$ , то  $c$  будем называть *развернутым* углом.

Рассмотрим функционал

$$\Phi_2(D) = \sum_{c \in C(D)} F_2(c), \quad (3.1)$$

заданный на классе ограниченных, выпуклых многоугольников. Функцию  $F_2$  будем называть примарной для  $\Phi_2$ .

**Лемма 3.1.** Если примарная функция  $F_2(c)$  ангулярно-аддитивна и равняется нулю на развернутых углах, то функционал (3.1) аддитивен.

Доказательство просто, его мы оставляем читателю.

**Пример.** Заданная на углах функция

$$F_2(P, \alpha, \beta) = \frac{1}{4}r^2[\sin 2(\alpha + \beta - \varphi) - \sin 2(\alpha - \varphi)], \quad (3.2)$$

где  $(r, \varphi)$  – полярные координаты вершины  $P$  угла, ангулярно-аддитивна и равняется нулю на развернутых углах. Эта примарная функция с помощью (3.1) порождает лебегову меру.

Основным результатом данного параграфа является следующая

**Лемма 3.2.** Пусть  $F_2(c)$  – непрерывная функция, заданная на пространстве углов, а  $\Phi_2$  – соответствующий функционал (3.1). Если примарная функция  $F_2(c)$  ангулярно-аддитивна и равняется нулю на развернутых углах, то существует непрерывная, линейно-аддитивная, антисимметричная примарная функция  $F_1(\nu)$ , заданная на углах, для которой соответствующий функционал  $\Phi_1$ , определенный по (1.3), совпадает с  $\Phi_2$ , т. е. для любого выпуклого, ограниченного многоугольника  $D$  имеем  $\Phi_1(D) = \Phi_2(D)$ .

**Доказательство.** Пусть  $(P_1, P_2)$  – угла, для которого направление  $\beta$  от  $P_1$  к  $P_2$  принадлежит  $[0, \pi)$ . Полагая, что на плоскости фиксировано нулевое направление, положим

$$F_1(P_1, P_2) = F_2(P_1, 0, \beta) - F_2(P_2, 0, \beta), \quad (3.3)$$

$$F_1(P_1, P_2) = -F_1(P_2, P_1). \quad (3.4)$$

Тогда  $F_1(\nu)$  определено на  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ . Подставим (3.3) и (3.4) в (1.3). Возникающая при этом сумма будет содержать два знакопеременных слагаемых  $F_2(P, 0, \beta_2)$  –

$-F_2(P, 0, \beta_1)$ , соответствующих одной и той же вершине  $P$  многоугольника  $D$ .

Возможны четыре случая, показанные на рис. 2.

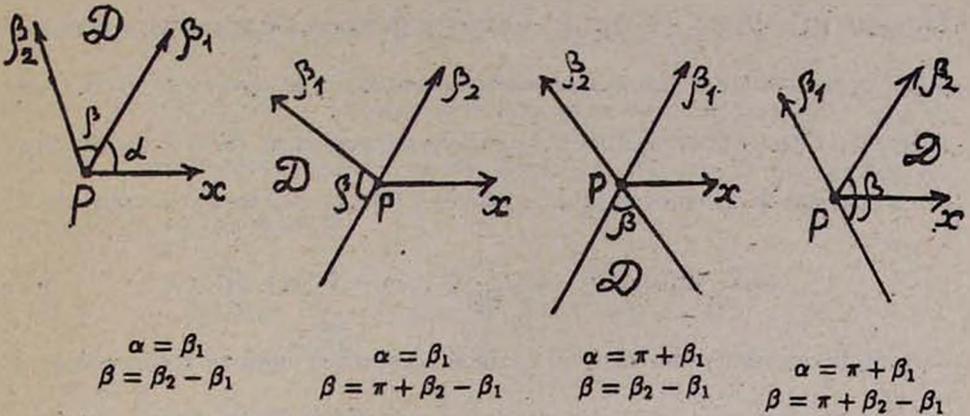


Рис. 2.

Ввиду ангулярной аддитивности, в любом случае

$$F_2(P, 0, \beta_2) - F_2(P, 0, \beta_1) = F_2(c), \quad c = (P, \alpha, \beta) \in C(D). \quad (3.5)$$

К примеру, если  $\alpha = \pi + \beta_1$  и  $\beta = \pi + \beta_2 - \beta_1$ , то  $F_2(P, 0, \beta_1) = -F_2(P, \alpha, \pi - \beta_1)$ , и, воспользовавшись ангулярной аддитивностью, получим (3.5). Согласно (3.3),

для любой тройки точек  $P_1, P_2, P_3$ , лежащей на прямой, имеем  $F_1(P_1, P_2) + F_1(P_2, P_3) = F_2(P_1, 0, \beta) - F_2(P_2, 0, \beta) + F_2(P_2, 0, \beta) - F_2(P_3, 0, \beta) = F_1(P_1, P_3)$ .

Отсюда следует, что  $F_1(\nu)$  линейно-аддитивна, и лемма доказана, поскольку (3.4) является условием антисимметричности.

Естественным образом возникает задача, аналогичная решенной в §2 : для каких примарных функций  $F_2(c)$  соответствующим функционалом  $\Phi_2$  порождается мера в  $\mathbb{R}^2$  ? Ответ на этот вопрос дан в следующем параграфе.

#### §4. СВЕДЕНИЕ К ФУНКЦИОНАЛУ $\Phi_1$

В этом параграфе мы выводим условие на угловую функцию  $F_2(c)$ , при котором функционал (3.1) является мерой из  $\mathcal{M}$ . Положим

$$W(x, y, \beta) = F_2(P, 0, \beta), \quad V(x, y) = W(x, y, \pi/2), \quad \beta \in [0, \pi], \quad (4.1)$$

где  $(x, y)$  – декартовы координаты вершины  $P$ . Функцию  $F_2(c)$  будем называть *гладкой*, если функция  $W$  дважды непрерывно дифференцируема.

**Теорема 4.1.** Пусть  $F_2(P, \alpha, \beta)$  – гладкая функция, заданная на множестве углов, *ангулярно-аддитивная* и *равняющаяся нулю на развернутых углах*. Функционал  $\Phi_2(D)$ , определенный по (3.1), является мерой из  $\mathcal{M}$  тогда и только тогда, когда примарная функция  $F_2(c)$  при любом  $\beta \in [0, \pi]$  удовлетворяет условию

$$\cos \beta \frac{\partial}{\partial x} W(x, y, \beta) - \sin \beta \frac{\partial}{\partial y} [V(x, y) - W(x, y, \beta)] = 0. \quad (4.2)$$

Если (4.2) удовлетворено хотя бы в одной декартовой системе координат  $(x, y)$ , то оно имеет место в любой такой системе координат. Смешанная производная  $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} V(x, y)$  не зависит от выбора координатной системы и является плотностью меры  $\Phi_2$ .

**Доказательство.** Пусть  $F_1(\nu)$  – функция на иглах, соответствующая  $F_2(c)$  согласно лемме 3.2. Так как  $W(x, y, \beta)$  – гладкая функция, то  $F_1(\nu)$  обладает гладкой флаговой плотностью  $\rho(f)$ . Имеем

$$F_1(P_1, P_2) = \int_{P_1}^{P_2} \rho(l_1, l_2, \beta + \pi/2) dl = W(x_1, y_1, \beta) - W(x_2, y_2, \beta),$$

где  $\beta$  – направление от  $P_1 = (x_1, y_1)$  к  $P_2 = (x_2, y_2)$ . Поэтому флаговая плотность  $\rho(f)$  равняется частной производной  $W$ , взятой по направлению  $\beta$ :

$$\rho(x, y, \beta + \pi/2) = -\cos \beta \frac{\partial}{\partial x} W(x, y, \beta) - \sin \beta \frac{\partial}{\partial y} W(x, y, \beta). \quad (4.3)$$

Согласно теореме 2.1, функционал  $\Phi_1$  является мерой из  $\mathcal{M}$  только тогда, когда для  $\alpha = \beta + \pi/2$  выполнено условие (2.8) ( $\alpha$  – направление внешней нормали флага). Из равенства (4.3) следует, что

$$\rho(x, y, 0) = \frac{\partial}{\partial y} V(x, y), \quad \rho(x, y, \pi/2) = \frac{\partial}{\partial x} W(x, y, 0) = 0. \quad (4.4)$$

Далее, из (2.8), (4.3) и соотношения  $\alpha = \beta + \pi/2$  следует (4.2), и для завершения доказательства остается применить (2.9) и (4.4).

§5. ДРУГОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Для проверки результатов предыдущего параграфа здесь мы дадим другое доказательство теоремы 4.1, не основанное на теореме 2.1 и лемме 3.2.

**Лемма 5.1.** Пусть  $F_2(c)$  – гладкая функция, заданная на пространстве углов, ангулярно-аддитивная и равная нулю на развернутых углах. Тогда для любого выпуклого многоугольника  $D$

$$\begin{aligned} \Phi_2(D) = \sum_{c \in C(D)} F_2(c) = \iint_D \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} V(x, y) dx dy - \\ - \int_{\partial D} \left[ \sin \alpha \frac{\partial}{\partial x} W(l_1, l_2, \beta) + \cos \alpha \frac{\partial}{\partial y} [V(l_1, l_2) - W(l_1, l_2, \beta)] \right] dl, \end{aligned} \quad (5.1)$$

где  $\alpha$  – направление внешней нормали в точке  $l = (l_1, l_2) \in \partial D$ , а  $\beta$  – направление касательной к границе  $\partial D$  в точке  $l$ .

**Доказательство.** Как и в §2, сначала мы вычислим значение  $\Phi_2(\square)$  на прямоугольнике  $\square = \square(x_0, y_0, \delta_x, \delta_y)$ . В силу ангулярной аддитивности  $F_2$

$$\begin{aligned} \Phi_2(\square) = V(x_0, y_0) - V(x_0, y_0 + \delta_y) + V(x_0 + \delta_x, y_0 + \delta_y) - V(x_0 + \delta_x, y_0) = \\ = \delta_x \delta_y \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} V(x_0, y_0) + o(\delta_x \delta_y). \end{aligned} \quad (5.2)$$

Рассмотрим теперь прямоугольный треугольник  $\Delta = \Delta(x, y, \delta, \beta)$ , где  $(x, y)$  – вершина прямого угла, катеты параллельны координатным осям, а длина и направление гипотенузы равны, соответственно,  $\delta$  и  $\beta$ . Если  $\beta \in [0, \pi/2]$ , то

$$\Phi_2(\Delta) = -V(x, y) + W(x - h \cos \beta, y, \beta) + F_2(x, y + h \sin \beta, \pi + \beta, 3\pi/2).$$

Из установленных выше свойств  $F_2(c)$  вытекает, что  $F_2(x, y, \pi + \beta, \frac{3}{2}\pi) = F_2(x, y, \beta, \frac{1}{2}\pi) = V(x, y) - W(x, y, \beta)$ . Отсюда следует, что  $\Phi_2(\Delta) = -V(x, y) + W(x - h \cos \beta, y, \beta) + V(x, y + h \sin \beta) - W(x, y + h \sin \beta, \beta)$ . Разлагая в ряд Тейлора по  $\delta$ , получаем, что при любом  $\beta \in [0, \pi/2]$

$$\Phi_2(\Delta) = -\delta \cos \beta \frac{\partial}{\partial x} W(x, y, \beta) + \delta \sin \beta \frac{\partial}{\partial y} [V(x, y) - W(x, y, \beta)] + o(\delta). \quad (5.3)$$

При  $\beta \in [\pi/2, \pi]$  аналогичным образом получаем

$$\Phi_2(\Delta) = \delta \cos \beta \frac{\partial}{\partial x} W(x, y, \beta) - \delta \sin \beta \frac{\partial}{\partial y} [V(x, y) - W(x, y, \beta)] + o(\delta). \quad (5.4)$$

Если заменить  $\beta$  на направление  $\alpha$  внешней нормали к гипотенузе, то как (5.3), так и (5.4) приводятся к виду

$$\Phi_2(\Delta) = -\delta \sin \alpha \frac{\partial}{\partial x} W(x, y, \beta) - \delta \cos \alpha \frac{\partial}{\partial y} [V(x, y) - W(x, y, \beta)] + o(\delta). \quad (5.5)$$

Последняя формула имеет место для всех  $\beta \in [0, \pi)$ ,  $\alpha \in [0, 2\pi)$  таких, что  $\cos(\alpha - \beta) = 0$ . Теперь для завершения доказательства остается рассмотреть, как в доказательстве леммы 2.1, интегральные суммы и воспользоваться (5.2) и (5.5). Лемма 5.1 доказана.

Пользуясь леммой 5.1 так, как леммой 2.1 при доказательстве теоремы 2.1, мы приходим к новому доказательству теоремы 4.1.

## §6. СЛЕДСТВИЯ

Рассмотрим примарные функции  $F_2(c)$ , допускающие представления посредством флаговых плотностей. В этом параграфе *флагом* будем называть пару (точка, направление) :  $f = (x, y, \gamma)$ , где  $(x, y)$  – декартовы координаты вершины  $P$  флага, а  $\gamma \in [0, \pi)$  – направление. Любая функция  $u(f)$ , заданная на множестве флагов, определяет “угловую функцию”  $F_2(c)$  :

$$F_2(x, y, \alpha, \beta) = \int_{\alpha}^{\alpha+\beta} u(x, y, \gamma) d\gamma \quad (6.1)$$

(функция  $u$  называется *флаговой плотностью* для  $F_2$ ). Будем полагать, что  $u(x, y, \gamma + \pi) \equiv u(x, y, \gamma)$ . Если флаговая плотность обладает свойством

$$\int_0^{\pi} u(x, y, \gamma) = 0, \quad (6.2)$$

то, по лемме 3.1, соответствующий функционал  $\Phi_2$  аддитивен.

Пример. Флаговая плотность

$$u(x, y, \gamma) = \frac{1}{2} r^2 \cos 2(\gamma - \varphi) \quad (6.3)$$

по (6.1) порождает примарную функцию (3.2).

Флаговую функцию  $u(x, y, \gamma)$  будем называть *гладкой*, если  $u$  дважды непрерывно дифференцируема. Из теоремы 4.1 вытекает

**Следствие 6.1.** Пусть  $u(x, y, \gamma)$  – гладкая флаговая функция, удовлетворяющая (6.2). Функционал  $\Phi_2$ , порожденный по формулам (6.1), (3.1) флаговой плотностью  $u$ , является мерой из  $\mathcal{M}$  тогда и только тогда, когда  $u(f)$  удовлетворяет при любом  $\beta \in [0, \pi)$  условию

$$\cos \beta \int_0^\beta \frac{\partial}{\partial x} u(x, y, \gamma) d\gamma - \sin \beta \int_\beta^{\pi/2} \frac{\partial}{\partial y} u(x, y, \gamma) d\gamma = 0. \quad (6.4)$$

Воспользовавшись (6.1), леммой 5.1 и аппроксимируя плоскую область  $D$  многоугольниками, приходим к такому следствию.

**Следствие 6.2.** Для любой выпуклой, ограниченной области  $D$  с границей, обладающей непрерывной кривизной  $\kappa$ , и для любой гладкой флаговой плотности  $u(f)$ , удовлетворяющей условию (6.2), имеем

$$\int_{\partial D} u(l_1, l_2, \gamma) \kappa(l) dl = \iint_D \left[ \int_0^{\pi/2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} u(x, y, \gamma) d\gamma \right] dx dy - \int_{\partial D} \left[ dx \int_0^\beta \frac{\partial}{\partial x} u(x, y, \gamma) d\gamma + dy \int_\beta^{\pi/2} \frac{\partial}{\partial y} u(x, y, \gamma) d\gamma \right],$$

где  $\beta$  – направление, касательное к  $\partial D$ .

Пусть  $F_1(\nu)$  – функция, заданная на пространстве игл, и пусть  $F_2(c)$  – функция, заданная на пространстве углов. Построим смешанный функционал  $\Phi_3$  на классе ограниченных, выпуклых многоугольников :

$$\Phi_3(D) = \sum_{\nu \in S(D)} F_1(\nu) + \sum_{c \in C(D)} F_2(c). \quad (6.5)$$

В силу линейного характера условий (2.8) и (4.2) имеет место

**Следствие 6.3.** Пусть примарные функции  $F_1$  и  $F_2$  удовлетворяют, соответственно, условиям теорем 2.1 и 4.1. Тогда смешанный функционал  $\Phi_3$  является мерой из  $\mathcal{M}$  тогда и только тогда, когда для любого  $\beta \in [0, \pi)$  удовлетворено следующее условие :

$$\begin{aligned} \rho(l_1, l_2, \alpha) - \cos \alpha \rho(l_1, l_2, 0) - \sin \alpha \rho(l_1, l_2, \pi/2) = \\ = \sin \alpha \frac{\partial}{\partial x} W(l_1, l_2, \beta) + \cos \alpha \frac{\partial}{\partial y} [V(l_1, l_2) - W(l_1, l_2, \beta)], \end{aligned} \quad (6.6)$$

где  $\rho, W, V$  определены в (2.1) и (4.1),  $\alpha$  – направление внешней нормали в точке  $l = (l_1, l_2) \in \partial D$ ,  $\beta$  – направление касательной к границе  $\partial D$  в точке  $l$ .

**ABSTRACT.** In the paper we consider finitely additive functionals defined on planar bounded convex polygons and find some conditions, when these functionals actually determine signed measures in the Euclidian plane. In one of the cases we recover as a necessary and sufficient condition the trigonometric form of the “flag density” which is related with the classical Green formula.

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Р. В. Амбарцумян, “О конечно-аддитивных функционалах в  $\mathbb{R}^3$ ”, Известия НАН Армении, Математика, т. 28, № 2, стр. 51 – 59, 1993.
2. R. V. Ambartzumian, “Planar measure generation by Euler functionals”, Submitted to Journal of Applied Probability, Stochastic Geometry Section.
3. Р. В. Амбарцумян, В. К. Оганян, “Конечно-аддитивные функционалы в пространстве плоскостей”, Известия НАН Армении, Математика, т. 29, № 4, стр. 7 – 63, 1994.
4. Р. Г. Арамян, “Порождение мер в пространстве плоскостей и сферические эйлеровы функционалы”, Известия НАН Армении, Математика, т. 29, № 4, стр. 64 – 90, 1994.

2 декабря 1994

Институт математики  
Национальной Академии Наук Армении