

ПОРОЖДЕНИЕ МЕР В ПРОСТРАНСТВЕ ПЛОСКОСТЕЙ И СФЕРИЧЕСКИЕ ЭЙЛЕРОВЫ ФУНКЦИОНАЛЫ

Р. Г. Арамян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
том 29, №4, 1994

В статье рассмотрена задача порождения мер в пространстве \mathbb{E} плоскостей в \mathbb{R}^3 , посредством конечно-аддитивных функционалов, заданных на множествах, которые в обычных сферических координатах в \mathbb{E} имеют форму произведений. Найдено условие, в терминах так называемых флаговых плотностей, необходимое и достаточное для порождения меры. Решение задачи приводит к порождению меры на сфере, посредством некоторого функционала типа Эйлера, записанного в явном виде.

§0. ВВЕДЕНИЕ

Эйлеровы функционалы впервые были рассмотрены Р. В. Амбарцумяном в [6] в связи с задачей порождения знакопеременной меры в евклидовой плоскости. Одним из стимулов их дальнейшего исследования является тот факт, что они естественным образом возникают в задачах порождения мер в многомерных пространствах. Пример этого можно найти в статье [4] Р. В. Амбарцумяна и В. К. Оганяна, относящейся к порождению мер в пространстве \mathbb{E} плоскостей в \mathbb{R}^3 , опубликованной в этом номере (функционал E_2). Другой тип эйлеровых функционалов появляется в той же задаче порождения мер в \mathbb{E} , если эту задачу поставить для функционалов, зависящих от множеств произведений в координатном пространстве (p, ω) , описывающем \mathbb{E} (что в некотором смысле предпочтительнее бюффоновых множеств, рассмотренных в [4]). Как обычно, p – расстояние

Данное исследование частично финансировано грантом по RYB000 Международного Научного Фонда.

плоскости $e \in \mathbb{E}$ от начала координат O , а ω – пространственное направление, ортогональное e . В этом случае эйлеровы функционалы заданы на сферах. Вывод явного выражения для этих функционалов (которые ниже будем обозначать через E), а также рассмотрение задачи порождения через E знакопеременной меры на сфере – необходимые этапы, предшествующие проведенному нами исследованию по порождению мер в \mathbb{E} . Отметим, что в случае инвариантности относительно параллельных переносов соответствующие функционалы были найдены в [8].

Ввиду иного подхода, в данной работе бюффоновы множества и их комбинаторика, имевшие первостепенное значение в [4], не имеют существенных применений. Фактически их применение ограничено доказательством нижеприводимой теоремы 1, устанавливающей представление для мер множеств

$$[B] = \{e \in \mathbb{E}: e \text{ пересекается с гладким, выпуклым телом } B\}$$

в терминах так называемой (пространственной) *флаговой плотности* ρ . Отметим, что в случае инвариантности относительно параллельных переносов, разные доказательства результата теоремы 1 были приведены в работах [1] – [3] в контексте теории выпуклых множеств, а в общем случае она была анонсирована в [9]. Ниже представление теоремы 1 использовано для нахождения значений "условных" мер множеств типа

$$\{e \in \mathbb{E}: \omega \in A, \quad p = R, \quad R \text{ является постоянной}\},$$

где A из кольца сферических областей, содержащего геодезически выпуклые многоугольники. Соответствующим явным представлением определяется семейство сферических эйлеровых функционалов E , зависящих от флаговой плотности ρ .

Далее следует параграф, в котором устанавливаются результаты, относящиеся к общим сферическим эйлеровым функционалам, в том числе к необходимому условию порождения меры. В §6 на множествах произведений в координатных моделях (p, ω) множества \mathbb{E} определен функционал \mathbb{E} . Получено необходимое и достаточное условие для порождения меры в пространстве \mathbb{E} , при определенном,

дополнительном условии об инвариантности \mathbb{F} . В заключение (в дополнении Р. В. Амбарцумяна), с использованием последнего условия вместе с условием необходимости из [4], получено следующее следствие. Пусть существенно гладкой флаговой функцией ρ порождается локально-конечная знакопеременная мера в \mathbb{E} с помощью функционала Ψ , рассмотренного в [4]. Если ρ не зависит от угловых переменных, то ρ является постоянной (т. е. ρ не зависит от параметра местоположения). Из тех же рассуждений следует доказательство для теоремы, сформулированной в Предисловии редактора, предваряющей данный номер журнала.

§1. ОБОЗНАЧЕНИЯ И ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Ниже будет иметь особое значение понятие флага в \mathbb{R}^3 , естественным образом возникшее в комбинаторной интегральной геометрии [1]. Детальный обзор, относящийся к этому понятию, содержится в §3 статьи Р. В. Амбарцумяна и В. К. Оганяна, приведенной в этом номере. Повторим определение флага.

Флагом является тройка $f = (P, g, e)$, где P — точка в \mathbb{R}^3 , называемая *вершиной* f , g — прямая, содержащая точку P , а e — плоскость, содержащая g .

Имеют место два эквивалентных представления флага :

$$f = f(P, \Omega, \Phi), \quad \text{или} \quad f = f(P, \omega, \varphi),$$

где Ω — пространственное направление g в \mathbb{R}^3 , Φ — поворот e вокруг g , ω — нормаль к e , а φ — направление g на плоскости e . Моделью Ω и ω является стандартное эллиптическое 2-пространство \mathcal{E}_2 , которое может быть получено из единичной сферы идентификацией точек — антиподов (см. [5]), а ϕ и φ принадлежат $(0, \pi)$.

Пусть \mathbb{E} — пространство плоскостей в \mathbb{R}^3 . Рассмотрим локально-конечные, знакопеременные меры μ в пространстве \mathbb{E} , обладающие плотностями относительно стандартной меры, инвариантной при евклидовых движениях, т. е.

$$\mu(de) = h(e)de. \quad (1.1)$$

Напомним, что элемент de стандартной меры может быть записан в виде

$$de = dp d\xi,$$

где (p, ξ) – обычная параметризация плоскости e : p – расстояние e от начала координат O ; $\xi \in \mathcal{E}_2$ – направление, нормальное к e , $d\xi$ – элемент телесного угла.

Условимся писать $h(e) = h(p, \xi)$. Используя меру μ , определим в пространстве флагов следующую (флаговую) функцию

$$\rho(f) = \rho(P, \omega, \varphi) = \int_{[P]} \sin^2 \alpha(\xi, \omega, \varphi) h(\xi) d\xi. \quad (1.2)$$

Здесь $[P]$ – пучок плоскостей, содержащих точку $P \in \mathbb{R}^3$, $h(\xi)$ – сужение h на $[P]$. Обозначение $h(\xi)$ корректно, поскольку ξ однозначно определяет плоскость из $[P]$. Аналогичным кратким обозначением мы будем пользоваться также в других случаях. Для объяснения угла $\alpha(\xi, \omega, \varphi)$, запишем $f = (P, g, e)$. Тогда $\alpha(\xi, \omega, \varphi)$ – угол между g и следом $e_\xi \cap e$, где e_ξ – плоскость, нормальная к ξ .

Пусть K – выпуклое тело с границей ∂K , обладающей непрерывной кривизной (в этом случае K будем называть *гладким*). Через k_1, k_2 обозначим главные нормальные кривизны ∂K в точке $s \in \partial K$, а через f_1, f_2 – *основные флаги* $f_i = (s, g_i, t)$, где t – плоскость, касательная в точке s , прямые g_i имеют направления главных кривизн.

Теорема 1. Пусть μ – *звукпеременная мера* в \mathbb{E} , обладающая плотностью $h(e)$.

Для любого гладкого, выпуклого тела K справедливо следующее представление :

$$\mu([K]) = (2\pi)^{-1} \int_{\partial K} [k_1 \rho(f_2) + k_2 \rho(f_1)] ds, \quad (1.3)$$

где флаговая функция ρ задана по (1.2).

Доказательство получается применением теоремы 1 из [4] с функцией клива $F(w)$, приведенной в (5.1), [4], к мере множества $[K']$, где K' – многогранник в \mathbb{R}^3 и аппроксимацией K многогранниками. Реализации этой процедуры, в

случае инвариантности относительно сдвигов, можно найти в работах [1] – [3]. Нам понадобятся также нижеприводимые обозначения.

Через $S(Q, R)$ обозначим сферу с центром в точке Q и радиусом R , через S обозначим $S(O, 1)$ т. е. пространство направлений в \mathbb{R}^3 . Предположим, что $h(e)$ – плотность, заданная формулой (1.1). На $S(Q, R)$ определим функцию

$$h^*(s) = h(t(s)),$$

где $t(s)$ – плоскость, касательная к $S(Q, R)$ в некоторой точке $s \in S(Q, R)$. Меры $R^{-2} h^*(s) ds$, где ds – элемент площади на $S(Q, R)$, назовем *условной* мерой на $S(Q, R)$, порожденной μ (или h).

Пусть A – геодезически выпуклая область на $S(Q, R)$, содержащаяся в некоторой полусфере. Далее, пусть $B_\varepsilon \subset \mathbb{R}^3, \varepsilon > 0$ – выпуклое тело, ограниченное $S(Q, R + \varepsilon)$, плоскостями, касательными к сфере $S(Q, R)$ в точках ∂A и конической поверхностью с вершиной Q (см. рис. 1).

Теорема 2. Пусть μ – мера на \mathbb{E} с непрерывной плотностью $h(e)$, $A \subset S(Q, R)$ – открытое, выпуклое множество, содержащееся в некоторой полусфере. Тогда

$$\frac{1}{R^2} \int_A h^*(s) ds = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mu([B_\varepsilon]) - \mu([B_0])}{\varepsilon}. \quad (1.4)$$

Доказательство. Пусть Q совпадает с началом координат. На множестве B_ε имеем $h(p, \xi) = h(R, \xi) + O(p - R)$. Тем самым

$$\begin{aligned} \mu([B_\varepsilon]) &= \mu([B_0]) + \mu([B_\varepsilon] \setminus [B_0]) = \mu([B_0]) + \int_{[B_\varepsilon] \setminus [B_0]} h(e) dp d\xi = \\ &= \mu([B_0]) + \varepsilon \int_{A^*} h(R, \xi) d\xi + \int_{A \setminus A^*} b(\xi) h(R, \xi) d\xi + o(\varepsilon), \end{aligned}$$

где A и A^* – телесные углы, соответствующие A и $\partial B_\varepsilon \cap S(Q, R + \varepsilon)$ (см. рис. 1), а $b(\xi)$ получено интегрированием по $dp, 0 \leq b(\xi) \leq \varepsilon$. Ясно, что A^* стремится к A при $\varepsilon \rightarrow 0$ (монотонная сходимость). Отсюда следует, что

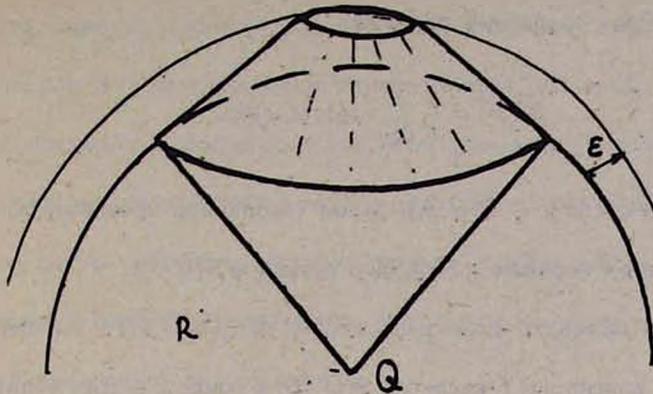


Рис. 1

$$\left| \frac{\mu([B_\epsilon]) - \mu([B_0])}{\epsilon} - \int_A h(R, \xi) d\xi \right| \leq \left| \int_{A^*} h(e) d\xi - \int_A h(e) d\xi \right| + \left| \epsilon^{-1} \int_{A \setminus A^*} b(\xi) h(R, \xi) d\xi \right| \rightarrow 0$$

при $\epsilon \rightarrow 0$. Теорема доказана.

Замечание. Может показаться естественной замена B_ϵ в (1.4) более простым телом, например, $B_\epsilon = \text{conv}\{(1+\epsilon)A \cup \{O\}\}$, где $(1+\epsilon)A$ – центральная проекция геодезически выпуклого $A \subset S(O, 1)$ на $S(O, 1+\epsilon)$, conv означает минимальную выпуклую оболочку. Однако, можно проверить, что при такой замене отношение $\epsilon^{-1}[\mu(\{\text{conv}\{(1+\epsilon)A \cup \{O\}\}) - \mu(\{\text{conv}\{A \cup \{O\}\})]$ не сходится к $\int_A h^*(s) ds$.

В следующих §§2 – 4 мы вычислим значения “условной меры” различных областей $A \subset S(Q, R)$. При этом будет использовано тождество (1.4), где вместо $\mu([B_\epsilon])$ и $\mu([B_0])$ будут подставлены их выражения (1.3). Полученные результаты будут содержать нижеприводимые обозначения. Рассмотрим функцию от так называемой массы пучка в P :

$$M(P) = \int_{[P]} h(\xi) d\xi.$$

Из (1.2) следует, что

$$\rho(P, \omega, \varphi) + \rho(P, \omega, \varphi + \pi/2) = \int_{[P]} (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) h(\xi) d\xi = M(P).$$

Интегрируя последнее уравнение, находим

$$M(P) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \rho(P, \omega, \varphi) d\varphi. \quad (1.5)$$

Ниже через $\frac{\partial M(s)}{\partial n}$, где $s \in S(Q, R)$, будем обозначать производную $M(P)$ в направлении внешней нормали к $S(Q, R)$ в точке $s \in S(Q, R)$.

Флаг f будем называть флагом-носителем $A \subset S(Q, R)$ в $l \in \partial A$, если f расположено в l , плоскость f касается $S(Q, R)$ в точке $l \in \partial A$, а прямая f – “носитель” ∂A в l . Через $\langle \partial A \rangle$ будем обозначать множество флагов-носителей A . В рассматриваемом случае каждая точка $l \in \partial A$ – точка гладкости, и флаг – носитель в l единственный. Тем самым $\rho(l)$ является корректным обозначением для сужения флаговой функции $\rho(f)$ на $\langle \partial A \rangle$. В случае, когда A является сферическим многоугольником с вершинами $\{V_i\}$ и геодезическими сторонами $\{a_i\}$, имеем

$$\langle \partial A \rangle = (\cup \langle V_i \rangle) \cup (\cup \langle a_i \rangle),$$

где через $\langle V_i \rangle$ обозначено множество флагов-носителей, расположенных в V_i , а через $\langle a_i \rangle$ – множество флагов-носителей, расположенных на a_i . Сужения $\rho(f)$ на $\langle a_i \rangle$ или $\langle V_i \rangle$ будем обозначать через $\rho(l)$, $l \in a_i$ и, соответственно, $\rho(V_i, \varphi)$. Отметим, что углом φ определяется флаг из $\langle V_i \rangle$.

Для определения частных производных функции $\rho(f)$ необходимо рассмотреть так называемые *направленные флаги* $\bar{f} = (P, \bar{g}, \bar{e})$. Здесь \bar{e} – ориентированная плоскость, т. е. плоскость с определенным направлением положительной нормали, \bar{g} – направленная прямая в \bar{e} , т. е. прямая, на которой одно из двух возможных направлений определено как *положительное*. Для направленных флагов пространство параметров (Ω, ϕ) и (ω, φ) есть $S \times [0, 2\pi)$, и снова $P \in \bar{g} \subset \bar{e}$. Значения ρ распространяются на пространство направленных флагов по правилу

$$\rho(P, \bar{g}, \bar{e}) = \rho(P, g, e).$$

С каждым направленным флагом $f = (P, \bar{g}, \bar{e})$ связаны три ортогональные оси,

проходящие через P : по определению, ось 1 совпадает с \bar{g} ; ось 2 лежит в e , ортогональна к \bar{g} и направлена внутрь правой половины e , ограниченной \bar{g} ; ось 3 совпадает с положительной нормалью к e . Потребуем, чтобы оси 1,2,3 составляли левую тройку. Через $\rho'_i(f)$ обозначим производную ρ в f , соответствующую положительным поворотам f вокруг оси i . По определению, положительный поворот пространства вокруг оси i – по часовой стрелке, при взгляде в направлении оси i . Ясно, что

$$\rho'_1(P, \Omega, \phi) = \frac{\partial \rho(P, \Omega, \phi)}{\partial \phi}, \quad \rho'_3(P, \omega, \varphi) = \frac{\partial \rho(P, \omega, \varphi)}{\partial \varphi}.$$

Поэтому, ниже вместо $\rho'_1(f)$ будем использовать обозначение $\rho'_\phi(f)$. При этом, $\rho'_2(f)$ нуждается в аналогичной интерпретации, поскольку поворот вокруг оси 2 меняет \bar{g} и e одновременно.

Далее, через $\frac{\partial \rho}{\partial \xi P}$ обозначим частную производную по аргументу P , взятую в направлении $\xi \in S$. В специальных случаях, когда ξ совпадает с направлениями осей 1, 2, 3, значения $\frac{\partial \rho}{\partial \xi P}$ обозначим, соответственно, через $\rho'_x, \rho'_y, \rho'_z$.

§2. ИНТЕГРАЛЫ ОТ $h(e)$ ПО СФЕРИЧЕСКИМ ДИСКАМ

В этом параграфе мы вычислим условную меру сферического диска $A \subset S(Q, R)$ с угловым радиусом $\alpha < \pi/2$. Такой результат в случае инвариантности относительно сдвигов был получен в [8].

Точки окружности ∂A мы параметризуем по *угловому* параметру λ . Через $d\lambda$ будем обозначать меру на ∂A или $\langle \partial A \rangle$, инвариантную относительно вращений и подчиненную условию $\int_{\partial A} d\lambda = 2\pi$. В приводимом ниже уравнении (2.1) множество *направленных* флагов-носителей заменено областью интегрирования $\langle \partial A \rangle^+$. Согласно определению, для направленного флага $f = (P, \bar{g}, \bar{e}) \in \langle \partial A \rangle^+$ будем всегда предполагать, что положительная нормаль к \bar{e} совпадает с внешней нормалью к $S(Q, R)$ в точке касания, положительное направление на \bar{g} соответствует сдвигу вдоль ∂A , при котором ∂A (локально)

остается слева.

Теорема 2.1. Пусть μ – мера на \mathbb{E} , имеющая непрерывную плотность $h(\epsilon)$, а $\rho(f)$ – флаговая плотность (1.2). Тогда для любого сферического диска $A \subset S(Q, R)$ имеет место

$$\frac{2\pi}{R^2} \int_A h^*(s) ds = \frac{1}{R^2} \int_A M(s) ds + \frac{1}{R} \int_A \frac{\partial M(s)}{\partial n} ds + \cos \alpha \int_{\partial A} M(\lambda) d\lambda - \\ - \sin \alpha \int_{\langle \partial A \rangle^+} \rho'_s(\lambda) d\lambda - 2 \cos \alpha \int_{\langle \partial A \rangle^+} \rho(\lambda) d\lambda - R \sin \alpha \int_{\langle \partial A \rangle^+} \rho'_\nu(\lambda) d\lambda. \quad (2.1)$$

Доказательство. Не теряя общности можем предположить, что $S(Q, R) = S(O, 1)$. В обычных сферических координатах с центром диска A в качестве полюса имеем $s = (\lambda, \nu)$, $ds = d\xi = \sin \nu d\nu d\lambda$, и уравнением ∂A является $\nu = \alpha$. Нам необходимо вычислить $\mu([B_\epsilon])$ и $\mu([B_0])$. С целью применения (1.3), вместо B_ϵ и B_0 рассмотрим их гладкие аналоги $B_\epsilon + S(O, \delta)$ и $B_0 + S(O, \delta)$ при некотором $\delta > 0$ (сложение в смысле Минковского). Тогда будем иметь

$$\mu([B_\epsilon]) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mu([B_\epsilon + S(O, \delta)]), \quad \mu([B_0]) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mu([B_0 + S(O, \delta)]). \quad (2.2)$$

Для получения $\mu([B_\epsilon + S(O, \delta)])$, разобьем поверхность $B_\epsilon + S(O, \delta)$ на области I – VI, как это показано на рис. 2, далее, запишем интеграл в (1.3) как сумму интегралов по этим областям и рассмотрим полученные слагаемые.

а) В любой точке s из I имеем $k_1 = k_2 = (1 + \delta + \epsilon)^{-1}$. Из (1.2) следует, что

$$\rho(f_1) + \rho(f_2) = M(s). \quad (2.3)$$

Тем самым

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_I [k_1 \rho(f_2) + k_2 \rho(f_1)] ds = \frac{1}{1 + \epsilon} \int_I M(s) ds. \quad (2.4)$$

б) Область II – часть тора с радиусом осевой окружности $r(\epsilon) = (1 + \epsilon) \sin \alpha_1$ и с радиусом меридиана δ (см. рис. 2). Согласно стандартному представлению элемента площади на торе

$$ds = \delta(r(\epsilon) + \delta \sin \phi) d\phi d\lambda, \quad (2.5)$$

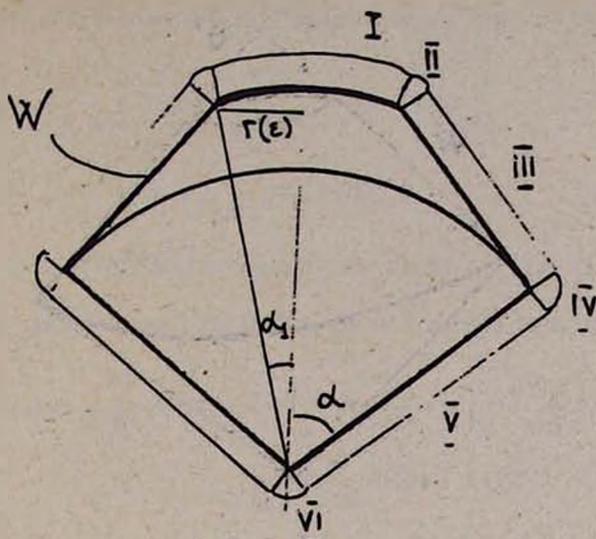


Рис. 2

где λ – угловая координата на осевой окружности, а ϕ – угловая координата на меридиане. В любой точке s , лежащей на торе, одно из главных направлений совпадает с направлением меридиана с $k_1 = \delta^{-1}$, другое главное направление перпендикулярно, и соответствующая кривизна k_2 ограничена снизу. Следовательно

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{II} [k_1 \rho(f_2) + k_2 \rho(f_1)] ds = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{II} r(\epsilon) \rho(f_2) d\phi d\lambda = r(\epsilon) \int_{\langle C_\epsilon \rangle} \rho(\lambda, \phi), d\phi d\lambda. \quad (2.6)$$

Отметим, что при этом $f = (P, g, e) \in \langle C_\epsilon \rangle$ в том и только том случае, когда $P \in C_\epsilon$, g – прямая, касательная к C_ϵ , а e является плоскостью-носителем B_ϵ в P , где C_ϵ – граница $S(O, 1 + \epsilon) \cap B_\epsilon$. Флаг $f \in \langle C_\epsilon \rangle$ однозначно определяется угловой координатой λ в $P \in C_\epsilon$ и углом ϕ поворота вокруг g . В последнем интеграле $\rho(\lambda, \phi) de$ обозначает сужение ρ на $\langle C_\epsilon \rangle$. На рис. 2 показано, что область изменения ϕ есть $[\alpha_1, \alpha]$.

в) Область III является частью конической поверхности, сходящейся (при $\delta \rightarrow 0$) к конической поверхности W . Точки s конической поверхности будем находить по параметрам $s = (\lambda, h)$, где угол λ определяет образующую, а h –

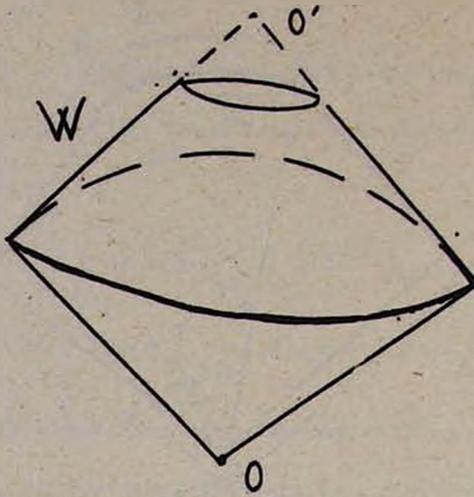


Рис. 3

расстояние от точки s до вершины O' конуса (см рис. 2). Элементом площади на конической поверхности является

$$ds = h \cos \alpha d\lambda dh. \quad (2.7)$$

В точках $s \in III$ и $s \in W$ одно из главных направлений совпадает с направлением образующей, где $k_1 = 0$. Для другого главного направления $k_2 = \operatorname{tg} \alpha h^{-1}$. Ясно, что

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{III} [k_1 \rho(f_2) + k_2 \rho(f_1)] ds &= \sin \alpha \int_{\langle W \rangle} \rho(\lambda, h) d\lambda dh = \\ &= \sin \alpha \int_0^{2\pi} \int_{h_1}^{h_2} \rho(\lambda, h) d\lambda dh. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Отметим, что $f = (P, g, e) \in \langle W \rangle$, где $P \in W$, g — образующая, а e — носитель конической поверхности W в (λ, h) . Через $\rho(\lambda, h)$ обозначаем сужение ρ на множество $\langle W \rangle$ (см. рис. 3).

Вычисление интегралов по областям IV, V, VI можно пропустить, поскольку те же интегралы появлялись при вычислении $\mu([B_0])$, а в (1.3) этих интегралов нет. С $\mu([B_0 + S(0, \delta)])$ будем действовать аналогичным образом. Однако, ввиду отмеченного сокращения слагаемых, достаточно заметить, что

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{I'} [k_1 \rho(f_2) + k_2 \rho(f_1)] ds = \int_{\Lambda} M(s) ds, \quad (2.9)$$

где $I' \subset B_\varepsilon + S(O, \delta)$ показано на рис. 2. Таким образом, мы получили

$$\begin{aligned} \mu([B_\varepsilon]) - \mu([B_0]) &= \frac{1}{1+\varepsilon} \int_{I'} M(s) ds - \int_A M(s) ds + r(\varepsilon) \int_{\langle C_\varepsilon \rangle} \rho(\lambda, \phi), d\phi d\lambda + \\ &+ \sin \alpha \int_{\langle W \rangle} \rho(\lambda, h) dh d\lambda. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Вычислим теперь предел (1.4). Для этого сначала отметим, что из представления

$A = A^\varepsilon \cup (A \setminus A^\varepsilon)$, где A^ε - центральная проекция I на $S(0, 1)$, следует

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+\varepsilon} \int_{I'} M(s) ds - \int_A M(s) ds &= \varepsilon \int_{A^\varepsilon} M(\xi) d\xi + \varepsilon \int_{A^\varepsilon} \frac{\partial M(\xi)}{\partial n} d\xi - \\ &- \int_{A \setminus A^\varepsilon} M(\xi) d\xi + o(\varepsilon), \end{aligned} \quad (2.11)$$

Из рис. 2 ясно, что

$$\begin{aligned} |h_1, h_2| &= \sqrt{2\varepsilon + \varepsilon^2}, \quad \cos \alpha_1 = \cos(\alpha - (\alpha - \alpha_1)) = \cos \alpha \frac{1}{1+\varepsilon} + \sin \alpha \frac{\sqrt{2\varepsilon + \varepsilon^2}}{1+\varepsilon}, \\ r(\varepsilon) &= (1+\varepsilon) \sin \alpha_1 = \sin \alpha - \cos \alpha \sqrt{2\varepsilon + \varepsilon^2} = \sin \alpha - \sqrt{2\varepsilon} \cos \alpha + o(\varepsilon), \\ (\alpha - \alpha_1) &\sim \sin(\alpha - \alpha_1) = \frac{\sqrt{2\varepsilon + \varepsilon^2}}{1+\varepsilon} = \sqrt{2\varepsilon} + o(\varepsilon). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Записав $M(\xi) = M(\lambda, \nu)$ для $\xi = (\lambda, \nu)$ и пользуясь разложением Тейлора для M ,

находим

$$\begin{aligned} - \int_{A \setminus A^\varepsilon} M(\xi) d\xi &= - \int_0^{2\pi} \int_{\alpha_1}^\alpha M(\lambda, \nu) \sin \nu d\nu d\lambda = \\ &= - \int_0^{2\pi} \int_{\alpha_1}^\alpha \left[M(\lambda, \alpha) + \frac{\partial M(\lambda, \alpha)}{\partial \nu} (\nu - \alpha) + o(\nu - \alpha) \right] \times [\sin \alpha + (\nu - \alpha) \cos \alpha] d\nu d\lambda = \\ &= -(\alpha - \alpha_1) \sin \alpha \int_0^{2\pi} M(\lambda, \alpha) d\lambda + \frac{(\alpha - \alpha_1)^2}{2} \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial M(\lambda, \alpha)}{\partial \nu} \sin \alpha + M(\lambda, \alpha) \cos \alpha \right] d\lambda + \\ &+ o(\varepsilon) = -\sqrt{2\varepsilon} \sin \alpha \int_0^{2\pi} M(\lambda, \alpha) d\lambda + \varepsilon \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial M(\lambda, \alpha)}{\partial \nu} \sin \alpha + M(\lambda, \alpha) \cos \alpha \right] d\lambda + o(\varepsilon). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Слагаемые, компенсирующие первый член последнего выражения, появятся при анализе остальных слагаемых (1.10).

Нам необходимо рассмотреть множества направленных флагов $\langle C_\varepsilon \rangle^+$ и $\langle W \rangle^+$. По определению, положительное направление флага $f \in \langle C_\varepsilon \rangle^+$ на

\bar{g} соответствует сдвигу вдоль C_ε , при котором внутренность $B_\varepsilon \cap S(1 + \varepsilon, O)$ (локально) остается слева. Положительное направление флага $f \in \langle W \rangle^+$ на \bar{g} соответствует сдвигу от вершины к $\partial A \cap g$. На $\langle C_\varepsilon \rangle^+$ имеет место разложение Тейлора

$$\rho(\lambda, \phi) = \rho(\lambda, \alpha) + \rho'_\phi(\lambda, \alpha)(\phi - \alpha) + o(\phi - \alpha). \quad (2.14)$$

Аналогично, на $\langle W \rangle^+$

$$\rho(\lambda, h) = \rho(\lambda, h_2) + \rho'_z(\lambda, h_2)(h - h_2) + o(h - h_2). \quad (2.15)$$

Для соответствующих слагаемых в (2.10) имеем (см. рис. 2)

$$\begin{aligned} & r(\varepsilon) \int_{\langle C_\varepsilon \rangle} \rho(\lambda, \phi), d\phi d\lambda + \sin \alpha \int_{\langle W \rangle^+} \rho(\lambda, h) dh d\lambda = \\ & + r(\varepsilon) \int_0^{2\pi} \int_{\alpha_1}^\alpha \rho_\varepsilon(\lambda, \phi) d\phi d\lambda + \sin \alpha \int_0^{2\pi} \int_{h_1}^{h_2} \rho(\lambda, h) dh d\lambda = \\ & = r(\varepsilon)(\alpha - \alpha_1) \int_0^{2\pi} \rho_\varepsilon(\lambda, \alpha) d\lambda - r(\varepsilon) \frac{(\alpha - \alpha_1)^2}{2} \int_0^{2\pi} [\rho_\varepsilon(\lambda, \alpha)]'_\phi d\lambda + \\ & + \sin \alpha \sqrt{2\varepsilon + \varepsilon^2} \int_0^{2\pi} \rho(\lambda, h_2) d\lambda - \sin \alpha \frac{(2\varepsilon + \varepsilon^2)}{2} \int_0^{2\pi} \rho'_z(\lambda, h_2) d\lambda + o(\varepsilon). \quad (2.16) \end{aligned}$$

Во второй строке через ρ_ε обозначены значения ρ на множестве $\langle C_\varepsilon \rangle$, а через $\rho(\lambda, \alpha)$ - на $\langle C_0 \rangle$. Из разложения Тейлора следует, что

$$\rho_\varepsilon(\lambda, \alpha) = \rho(\lambda, \alpha) - \rho'_y(\lambda, \alpha)(h_2 - h_1) + o(\varepsilon), \quad (2.17)$$

где $h_2 - h_1 = \sqrt{2\varepsilon + \varepsilon^2}$. Подставим (2.17) в (2.16) и, с учетом (2.12), получим

$$\begin{aligned} & r(\varepsilon) \int_{\langle C_\varepsilon \rangle} \rho(\lambda, \phi), d\phi d\lambda + \sin \alpha \int_{\langle W \rangle^+} \rho(\lambda, h) dh d\lambda = \sqrt{2\varepsilon} [\sin \alpha \int_0^{2\pi} \rho(\lambda, \alpha) d\lambda + \\ & + \sin \alpha \int_0^{2\pi} \rho(\lambda, h_2) d\lambda] - \varepsilon [2 \cos \alpha \int_0^{2\pi} \rho(\lambda, \alpha) d\lambda + 2 \sin \alpha \int_0^{2\pi} \rho'_y(\lambda, \alpha) d\lambda + \\ & + \sin \alpha \int_0^{2\pi} \rho'_\phi(\lambda, \alpha) d\lambda + \sin \alpha \int_0^{2\pi} \rho'_z(\lambda, h_2) d\lambda] + o(\varepsilon). \quad (2.18) \end{aligned}$$

Из (2.3) находим

$$\rho(\lambda, h_2) + \rho(\lambda, \alpha) = M(\lambda, \alpha). \quad (2.19)$$

(Отсюда следует сокращение слагаемых, имеющих порядок $\sqrt{\varepsilon}$. После дифференцирования (2.19) запишется в виде равенства

$$\rho'_x(\lambda, h_2) + \rho'_y(\lambda, \alpha) = \frac{\partial M(\lambda, \alpha)}{\partial \nu}. \quad (2.20)$$

Воспользовавшись (2.20) преобразуем слагаемые в (2.18), имеющие порядок ε , к виду

$$-\varepsilon [2 \cos \alpha \int_0^{2\pi} \rho(\lambda, \alpha) d\lambda + \sin \alpha \int_0^{2\pi} \rho'_y(\lambda, \alpha) d\lambda + \sin \alpha \int_0^{2\pi} \rho'_\phi(\lambda, \alpha) d\lambda + \sin \alpha \int_0^{2\pi} \frac{\partial M(\lambda, \alpha)}{\partial \nu} d\lambda].$$

Наконец, учитывая (2.13), приходим к (2.1) для $R = 1$, и теорема 3 доказана.

§3. ИНТЕГРАЛЫ ПО СФЕРИЧЕСКИМ МНОГОУГОЛЬНИКАМ

Выпуклый, сферический многоугольник $A \subset S(Q, R)$ является пересечением конечного числа полусфер. Через $\{V_i\}$ обозначим вершины, а через $\{a_i\}$ – геодезические стороны A . В приводимом ниже уравнении (3.1) (в случае инвариантности относительно сдвигов см. [8]), области интегрирования $\langle a_i \rangle^+$ и $\langle V_i \rangle^+$ являются множествами с *направленными* флагами-носителями. Параметризуем точки из $\partial A = \cup_i a_i$ параметром длины l , и через dl обозначим соответствующую меру на ∂A или $\cup_i \langle a_i \rangle^+$. Множество $\langle V_i \rangle^+$ параметризуем *угловым параметром* φ , и через $d\varphi$ обозначим меру на $\langle V_i \rangle$, инвариантную относительно поворота.

Теорема 3.1. Пусть μ – мера на \mathbb{E} , обладающая плотностью $h(\varepsilon)$, а $\rho(f)$ – флаговая плотность (1.2). Тогда для любого сферического многоугольника $A \subset S(Q, R)$ имеет место формула

$$\frac{2\pi}{R^2} \int_A h^*(s) ds = \frac{1}{R^2} \int_A M(s) ds + \frac{1}{R} \int_A \frac{\partial M(s)}{\partial n} ds + \sum_{i=1}^n M(V_i) \alpha_i^\varepsilon - R^{-1} \sum_{i=1}^n \int_{\langle a_i \rangle^+} \rho'_\phi(l) dl - \sum_{i=1}^n \int_{\langle a_i \rangle^+} \rho'_y(l) dl - 2 \sum_{i=1}^n \int_{\langle V_i \rangle^+} \rho(V_i, \varphi) d\varphi, \quad (3.1)$$

где α_i^ε – внешний угол при вершине V_i .

Доказательство. Для простоты предположим, что $A \subset S(O, 1)$ – лунка, ограниченная двумя большими подокружностями с вершинами V_1 и V_2 . В случае произвольного многоугольника A доказательство аналогично. Пусть $A(\tau)$ – сглаживание A , построенное при помощи двух окружностей малого радиуса τ (см. рис. 4). Рассмотрим выпуклые тела B_ϵ и B_o , соответствующие $A(\tau)$ (определение см. в §1). С целью применения (1.3), вместо B_ϵ и B_o рассмотрим их гладкие аналоги $B_\epsilon + S(O, \delta)$ и $B_o + S(O, \delta)$ при некотором $\delta > 0$ (сумма в смысле Минковского). Тогда мы снова имеем уравнение (2.2). Для получения $\mu([B_\epsilon + S(O, \delta)])$ разделим поверхность $B_\epsilon + S(O, \delta)$ на области I – VI, как это показано на рис. 4. Далее запишем интеграл в (1.3) в виде суммы интегралов по этим областям.

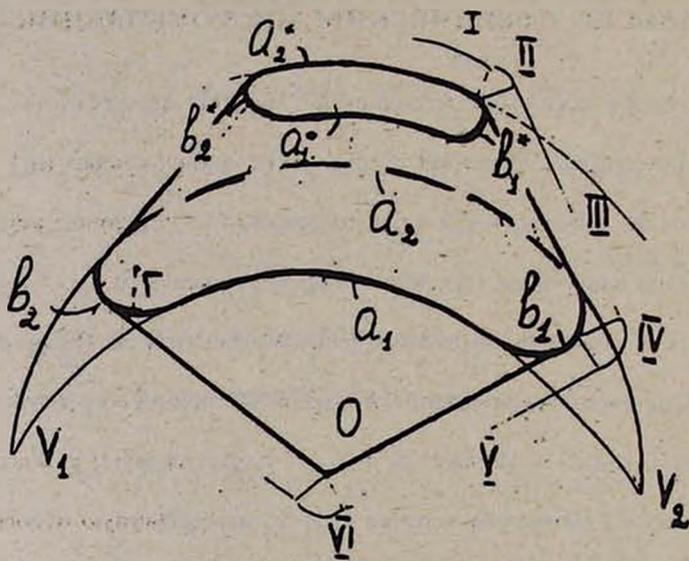


Рис. 4

а) Интеграл по I. Этот случай аналогичен случаю а) из предыдущего параграфа. Вновь имеет место уравнение (2.4).

б) Область II является объединением двух тороидальных поверхностей – Π_1 и Π_2 . Осевая окружность для Π_1 , соответствующая a_1^* и a_2^* имеет радиус 1. Осевая окружность для Π_2 , соответствующая b_1^* и b_2^* (см. рис. 4) имеет радиус $\tau(\epsilon)$. На Π_2 ситуация аналогична б) из предыдущего параграфа, и аналогом (2.6)

является соотношение

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{II_2} [k_1 \rho(f_2) + k_2 \rho(f_1)] ds = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{II_2} r(\varepsilon) \rho(f_2) d\phi d\varphi \doteq r(\varepsilon) \int_{\langle C_{\varepsilon,2} \rangle} \rho(\varphi, \phi), d\phi d\varphi. \quad (3.2)$$

Отметим, что $f = (P, g, \varepsilon) \in \langle C_{\varepsilon,2} \rangle$ тогда и только тогда, когда $P \in C_{\varepsilon,2} = b_1^* \cup b_2^*$ (см. рис. 4), g - прямая, касательная к $C_{\varepsilon,2}$, а плоскость ε - носитель B_ε в P . Флаг $f \in \langle C_{\varepsilon,2} \rangle$ однозначно определяется угловой координатой φ , вершиной $P \in C_{\varepsilon,2}$ и углом ϕ поворота вокруг g . В последнем интеграле через $\rho(\varphi, \phi)$ обозначено сужение ρ на $\langle C_{\varepsilon,2} \rangle$. Для Π_1 радиус осевой окружности равняется 1, а предел, соответствующий (3.2) равняется

$$\int_{\langle C_{\varepsilon,1} \rangle} \rho(l, \phi), d\phi dl. \quad (3.3)$$

Отметим, что $f = (P, g, \varepsilon) \in \langle C_{\varepsilon,1} \rangle$ тогда и только тогда, когда $P \in C_{\varepsilon,1} = a_1^* \cup a_2^*$ (см. рис. 4), g - прямая, касательная к $C_{\varepsilon,1}$, а плоскость ε - носитель для B_ε в P . Флаг $f \in \langle C_{\varepsilon,1} \rangle$ однозначно определяется координатой длины l , вершиной $P \in C_{\varepsilon,1}$ и углом ϕ поворота вокруг g . В последнем интеграле через $\rho(l, \phi)$ обозначено сужение ρ на $\langle C_{\varepsilon,1} \rangle$.

в) Область III является объединением двух частей - конической части III₂, соответствующей $b_1 \cup b_2$, сходящейся (при $\delta \rightarrow 0$) к конической поверхности W_2 , и цилиндрической части III₁, соответствующей $a_1 \cup a_2$, сходящейся (при $\delta \rightarrow 0$) к цилиндрической поверхности W_1 . Оба эти случая аналогичны случаю в) из предыдущего параграфа. Имеет место аналог (2.8) :

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{III_2} [k_1 \rho(f_2) + k_2 \rho(f_1)] ds = r \int_{\langle W_2 \rangle} \rho(\varphi, h) d\varphi dh. \quad (3.4)$$

Отметим, что $f = (P, g, \varepsilon) \in \langle W_2 \rangle$, если $P \in W_2$ ($s = (\varphi, h)$, где углом φ определяется образующая, а h - расстояние до s от вершины конуса), g - образующая, а ε - носитель конической поверхности W в (φ, h) . Через $\rho(\varphi, h)$ обозначаем сужение ρ на множество $\langle W_2 \rangle$ (см. рис. 4). Для III₁ имеем

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{III_1} [k_1 \rho(f_2) + k_2 \rho(f_1)] ds = \int_{\langle W_1 \rangle} \rho(l, h) dl dh. \quad (3.5)$$

Отметим, что $f = (P, g, e) \in \langle W_1 \rangle$, если $P \in W_1$ (точки на W_1 представляем в виде (l, h) , где через l определяется образующая, h - координата длины на образующей g), а e - носитель поверхности W_1 в (l, h) . Через $\rho(l, h)$ обозначаем сужение ρ на множество $\langle W_1 \rangle$ (см. рис. 4).

Вычисление интегралов по областям IV - VI можно пропустить, поскольку те же интегралы появлялись при вычислении $\mu([B_0])$ и в (1.3) они отсутствуют. С $\mu([B_0 + S(0, \delta)])$ будем действовать аналогично. При этом, ввиду отмеченного сокращения слагаемых достаточно заметить, что

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{I'} [k_1 \rho(f_2) + k_2 \rho(f_1)] ds = \int_A M(s) ds, \quad (3.6)$$

где $I' \subset B_0 + S(0, \delta)$ показано на рис. 4. Итак, мы нашли

$$\begin{aligned} \mu([B_\varepsilon]) - \mu([B_0]) &= \frac{1}{1 + \varepsilon} \int_I M(s) ds - \int_A M(s) ds + r(\varepsilon) \int_{\langle C_{\varepsilon, 2} \rangle} \rho(\varphi, \phi) d\phi d\varphi + \\ &+ \int_{\langle C_{\varepsilon, 1} \rangle} \rho(l, \phi) dl d\phi + \int_{\langle W_1 \rangle} \rho(l, h) dh dl + r \int_{\langle W_2 \rangle} \rho(\varphi, h) d\varphi dh. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Методами анализа, подобными примененным в предыдущем параграфе, находим

$$\begin{aligned} 2\pi \int_{A(r)} h^*(s) ds &= \int_{A(r)} M(s) ds + \int_{A(r)} \frac{\partial M(s)}{\partial n} ds + \sqrt{1 - r^2} \sum_{i=1}^2 \int_{\{b_i\}} M(\varphi, \alpha) d\varphi - \\ &- r \sum_{i=1}^2 \int_{\langle b_i \rangle^+} \rho'_\phi(\varphi, \alpha) d\varphi - \sum_{i=1}^2 \int_{\langle a_i \rangle^+} \rho'_l(l) dl - 2\sqrt{1 - r^2} \sum_{i=1}^2 \int_{\langle b_i \rangle^+} \rho(\varphi, \alpha) d\varphi - \\ &- r \sum_{i=1}^2 \int_{\langle b_i \rangle^+} \rho'_\psi(\varphi, \alpha) d\varphi - \sum_{i=1}^2 \int_{\langle a_i \rangle^+} \rho'_\psi(l) dl. \end{aligned} \quad (3.8)$$

В этих формулах (φ, α) - обычные сферические координаты с началом в центре малой окружности радиуса r , $\{b_i\} = \{\varphi : (\varphi, \alpha) \in b_i\}$, а α - угловой радиус малой окружности (см. рис. 4). Наконец, устремляя в (3.8) r к нулю, получаем (3.1) для лунки, и теорема доказана.

§4. ПЛОТНОСТЬ $h(e)$ В ТЕРМИНАХ $\rho(f)$

В этом параграфе мы выразим $h(e)$ на пучках направленных флагов в терминах значений ρ и некоторых производных ρ . При заданных плоскости e_0 и точке $P_0 \in e_0$ соответствующий пучок обозначим через

$$\langle e_0, P_0 \rangle = \{f = (P, \bar{g}, \bar{e}) : P = P_0, e = e_0\}.$$

В этом параграфе через $\rho(\varphi)$ будем обозначать значения ρ на пучке $\langle e, P \rangle$, имея ввиду, что направлением $\varphi \in (0, 2\pi)$ однозначно определяется флаг из $\langle e, P \rangle$.

Иными словами, мы идентифицируем $\langle e, P \rangle$ с $(0, 2\pi]$. Рассмотрим выражение

$$H(e, P) = \frac{1}{\pi} \int_{\langle e, P \rangle} \rho(\varphi) d\varphi + \frac{1}{2\pi} \int_{\langle e, P \rangle} (\rho''_{xx}(\varphi) + \rho''_{yy}(\varphi)) d\varphi - \frac{2}{\pi} \int_{\langle e, P \rangle} (\rho''_{\phi\phi}(\varphi) + 2\rho''_{\phi\nu}(\varphi) + \rho''_{\nu\nu}(\varphi)) d\varphi. \quad (4.1)$$

Отметим, что $H(e, P)$ не зависит от выбора координат на e .

Теорема 4.1. Пусть ρ соответствует некоторой непрерывной плотности $h(e)$ согласно (1.2). Тогда для любой плоскости e значение $H(e, P)$ не зависит от $P \in e$ и равно $h(e)$.

Доказательство. Рассмотрим сферу S_1 с единичным радиусом, касающуюся плоскости e в $P \in e$ и предположим, что $A_n \subset S_1$ — сферический диск с центром в P и угловым радиусом α_n . Далее, предположим, что $\alpha_n \downarrow 0$. По теореме о среднем значении $h(e)$ может быть получено из соотношения

$$h(e) = \lim_{\alpha_n \rightarrow 0} \frac{1}{|A_n|} \int_{A_n} h^*(\xi) d\xi, \quad (4.2)$$

где $|A|$ — площадь A . Рассмотрим на S_1 обычные сферические координаты (φ, ν) с полюсом в P , и пусть $M(\varphi, \nu)$ — сужение функции $M(P)$ на S_1 . Через $\rho(\varphi, \alpha)$ обозначим сужение флаговой функции ρ на множество $\langle A \rangle^+$, где $A \subset S_1$ — диск $\nu = \alpha$. Представим интеграл в (4.2) согласно (2.1) и найдем предел после разложения полученных членов по степеням α_n . Тогда будем иметь

$$M(\varphi, \alpha_n) = M(\varphi, 0) + M'_\nu(\varphi, 0)\alpha_n + M''_{\nu\nu}(\varphi, 0)\frac{\alpha_n^2}{2} + o(\alpha_n^2). \quad (4.3)$$

Для разложения других членов необходима

Лемма 4.1. Для любой дифференцируемой флаговой функции ρ

$$\left. \frac{\partial \rho(\varphi, \alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = \rho'_\phi(\varphi) + \rho'_\nu(\varphi). \quad (4.4)$$

Производная ρ'_y определена при предположении, что положительная нормаль к ϵ параллельна внешней нормали к S_1 в точке P . Имеем

$$\rho(\varphi, \alpha_n) = \rho(\varphi) + (\rho'_\phi(\varphi) + \rho'_y(\varphi))\alpha_n + (\rho''_{\phi\phi}(\varphi) + 2\rho''_{\phi y}(\varphi) + \rho''_{yy}(\varphi))\frac{\alpha_n^2}{2} + o(\alpha_n^2), \quad (4.5)$$

$$\rho'_\phi(\varphi, \alpha_n) = \rho'_\phi(\varphi) + (\rho''_{\phi\phi}(\varphi) + \rho''_{\phi y}(\varphi))\alpha_n + o(\alpha_n), \quad (4.6)$$

$$\rho'_y(\varphi, \alpha_n) = \rho'_y(\varphi) + (\rho''_{\phi y}(\varphi) + \rho''_{yy}(\varphi))\alpha_n + o(\alpha_n). \quad (4.7)$$

Надлежащей подстановкой, учитывая, что $|A_n| = 2\pi(1 - \cos \alpha_n) \sim \pi\alpha_n^2$, находим

$$h(\epsilon) = M(P) + \frac{\partial M(P)}{\partial n} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M''_{yy}(\varphi, 0) d\varphi - \frac{2}{\pi} \int_{\langle \epsilon, P \rangle} (\rho''_{\phi\phi}(\varphi) + 2\rho''_{\phi y}(\varphi) + \rho''_{yy}(\varphi)) d\varphi. \quad (4.8)$$

Здесь $\frac{\partial M(P)}{\partial n}$ — производная в точке $P \in \epsilon$, в направлении нормали к ϵ , внешней к S_1 . Нетрудно показать, что

$$M''_{yy}(\varphi, 0) = \frac{\partial^2 M(P)}{(\partial_\varphi P)^2} - \frac{\partial M(P)}{\partial n}, \quad (4.9)$$

где $\frac{\partial^2 M(P)}{(\partial_\varphi P)^2}$ — вторая производная в пространственном направлении, соответствующем направлению φ на ϵ (здесь предпочтительно пользоваться этим обозначением вместо $M''_{\varphi\varphi}$, поскольку последнее соответствовало бы повторному дифференцированию на сферической поверхности).

Рассмотрим теперь сферу S_2 с единичным радиусом, касающуюся плоскости ϵ в той же точке $P \in \epsilon$ и отличную от S_1 (S_1 и S_2 разделены по ϵ и являются естественными отражениями друг друга по отношению к ϵ). Аналогичными операциями можно найти симметричное выражение для $h(\epsilon)$. Суммированием обоих представлений получаем

$$h(\epsilon) = M(P) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 M(P)}{(\partial_\varphi P)^2} d\varphi - \frac{2}{\pi} \int_{\langle \epsilon, P \rangle} (\rho''_{\phi\phi}(\varphi) + 2\rho''_{\phi y}(\varphi) + \rho''_{yy}(\varphi)) d\varphi. \quad (4.10)$$

После подстановки (1.5) в (4.10) и некоторых преобразований приходим к (4.1).

Теорема доказана.

§5. СФЕРИЧЕСКИЕ ЭЙЛЕРОВЫ ФУНКЦИОНАЛЫ

Пусть S – единичная сфера в \mathbb{R}^3 . Сферическим флагом называется пара $\sigma = (s, \varphi)$, где $\varphi \in (0, 2\pi)$ – направление на плоскости, касательной к S в точке $s \in S$. Пусть имеем две функции флагов $f_1(\sigma)$ и $f_2(\sigma)$, удовлетворяющие условиям :

$$1) f_1(\sigma, \varphi) = f_1(\sigma, \varphi + \pi), \quad 2) f_2(\sigma, \varphi + \pi) = -f_2(\sigma, \varphi).$$

Пусть $D \subset S$ – геодезически выпуклый многоугольник, содержащийся внутри полусферы. Через V_i обозначим вершины D , через α_i – внешний угол D при V_i , а через b_i – стороны D . Будем говорить, что движемся вдоль ∂D в положительном направлении, если внутренность D остается слева. Так определяется положительное направление на каждом b_i . Рассмотрим множества сферических флагов

$$[b_i] = \{ \sigma = (s, \varphi) : s \in b_i, \varphi \text{ является положительным направлением } b_i \},$$

$$[V_i] = \{ \sigma = (s, \varphi) : s = V_i, \varphi \in \alpha_i \}.$$

Выражение

$$E(D) = \sum_i \int_{[b_i]} f_1(\sigma) d\varphi + \sum_i \int_{[b_i]} f_2(\sigma) dl - \sum_i M(v_i) \cdot \alpha_i, \quad (5.1)$$

где $\pi^{-1} \int f_1(s, \varphi) d\varphi = M(s)$, называется эйлеровым функционалом, если функции f_1 и f_2 удовлетворяют условиям 1) – 2). Ясно, что эйлеров функционал конечно-аддитивен. Имеет место основополагающий вопрос : *каковы дополнительные условия на функционалы f_1, f_2 , при которых $E(D)$ порождает конечную, знакопеременную меру на S ?* Ограничимся классом знакопеременных мер с непрерывной плотностью $u(s)$, т. е.

$$E(D) = \int_D u(s) ds.$$

Предположим, что последовательность многоугольников $D_n \subset S$ сжимается до точки $s_0 \in S$. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E(D_n)}{\|D_n\|} = u(s_0), \quad (5.2)$$

где $\|D\|$ — площадь D . В общем случае отношение $\frac{E(D_n)}{\|D_n\|}$, где вместо $E(D_n)$ подставляем (5.1), не имеет предела. Для доказательства этого нам понадобится следующее определение.

Пусть $t(s)$ — плоскость, касательная к S в точке $s \in S$. Выпуклым многоугольником $T \subset t(s)$, содержащим точку s внутри себя, определяется форма, если диаметр T равняется единице.

Предположим, что $D_n \in S$ — последовательность геодезически выпуклых многоугольников, сжимающаяся до точки s . Через D_n^* будем обозначать многоугольник на $t(s)$, полученный проектированием D_n на $t(s)$ с последующей гомотетией проекции внутри $t(s)$, с центром в s , определенной условием, что диаметр $D_n^* = 1$. Будем говорить, что многоугольники D_n имеют *асимптотическую форму*, если D_n^* сходятся к T (в смысле множеств в $t(s)$). Теперь для последовательности многоугольников D_n , асимптотически (при $n \rightarrow \infty$) обладающей многоугольной формой T можем предусмотреть априорно только существование предела отношения $\frac{E(D_n)}{d_n}$, где d_n — диаметр D_n . Это вытекает из следующих рассуждений. Во-первых

$$\int_{[b_i]} f_2(\sigma) dl = f_2(\sigma_i) |b_i| + o(|b_i|),$$

где σ_i — флаг (s_0, φ_i) , φ_i соответствует направлению стороны b_i , а $|b_i|$ — длина b_i . Ясно, что $|b_i| = O(d_i)$. Также ясно, что

$$\sum_i \int_{[v_i]} f_1(\sigma) d\varphi - \sum_i M(V_i) \cdot \alpha_i = O(d_n).$$

Фактически $\lim_{n \rightarrow \infty} E(D_n)(d_n)^{-1}$ существует, если только функции f_1 и f_2 непрерывно дифференцируемы. Поэтому из (5.2) следует, что условие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E(D_n)}{d_n} = 0 \quad (5.3)$$

необходимо для того, чтобы E порождало знакопеременную меру.

Условие (5.3) также достаточно в классе функционалов E , порожденных, по

(5.1), достаточно гладкими функциями f_1 и f_2 . Это следует из того, что при достаточно сильных предположениях о гладкости, из (5.3) следует существование предела (5.2). Более того, сходимость в (5.2) в определенном смысле равномерна, что доказывает необходимость утверждения. При этом, условие (5.3) остается достаточным, если $\{D_n\}$ ограничить последовательностями треугольников, или даже последовательностями, асимптотически являющимися правильными треугольниками. Возможно также применение некоторых ограничений на ориентацию треугольников. В первом приближении эйлеровы функционалы на S и \mathbb{R}^2 ведут себя одинаково. В [6], где впервые были рассмотрены эйлеровы функционалы на плоскости, условие, соответствующее (5.3), было заменено элегантным дифференциальным уравнением. Все эти вопросы достойны изучения в общей концепции эйлеровых функционалов на многообразиях. В настоящее время окончательные ответы требуют надлежащей проработки даже в случае с S . Поэтому, пока основным условием порождения по E знакопеременной меры мы будем считать (5.3).

Перейдем к следствиям результатов предыдущих параграфов.

Замечание. Уравнение (3.1) содержит эйлеров функционал E , определенный для $D \subset S(Q, R)$:

$$\begin{aligned}
 E(D) = & \sum_{i=1}^n M(V_i) \alpha_i^{\xi} - R^{-1} \sum_{i=1}^n \int_{\langle a_i \rangle^+} \rho'_{\phi}(l) dl - \\
 & + \sum_{i=1}^n \int_{\langle a_i \rangle^+} \rho'_y(l) dl - 2 \sum_{i=1}^n \int_{\langle V_i \rangle^+} \rho(V_i, \varphi) d\varphi.
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

Доказательство. $E(D)$ в (5.4) имеет структуру (5.1) с

$$f_1 = 2\rho(V_i, \varphi), \quad f_2 = R^{-1} \rho'_{\phi}(l) + \rho'_y(l), \tag{5.5}$$

причем функции (5.5) очевидно удовлетворяют условиям 1) и 2).

Следствие 1. Если пространственная флаговая плотность $\rho(f)$ порождена $h(e)$ по (1.2), то соответствующий эйлеров функционал (5.4) является локально-конечной знакопеременной мерой на любом $S(Q, R)$.

Доказательство следует из (3.1), поскольку

$$E(D) = \frac{2\pi}{R^2} \int_A h^*(s) ds - \frac{1}{R^2} \int_A M(s) ds - \frac{1}{R} \int_A \frac{\partial M(s)}{\partial n} ds.$$

Следствие 2. Пусть $\rho(f)$ – трижды непрерывно дифференцируемая флаговая функция. Для каждого $S(Q, R)$ по (5.5) построим эйлеров функционал E . Необходимым и достаточным условием, при котором посредством E определяется локально-конечная знакопеременная мера на любом $S(Q, R)$, является соотношение (5.3), которое должно выполняться в каждой точке $s_0 \in S(Q, R)$. Эта мера в точке $P \in S(O, R)$ обладает плотностью $H_{O,R}(P) = H(e, P)$ (см. (4.1)), где e – плоскость, пересекающаяся с $S(O, R)$ в P .

§6. ФУНКЦИОНАЛ \mathbb{F}

Ниже плоскости $e \in \mathbb{E}$ будем описывать посредством обычной параметризации $e = (p, \xi)$ по отношению к O . Точнее, будем рассматривать отображение

$$(p, \xi) \longmapsto \text{плоскость, касательная к сфере } S(O, p) \text{ в } P. \quad (6.1)$$

Далее, будем предполагать, что P видно из O под направлением ξ . Пусть B_O – полукольцо подмножеств \mathbb{E} , соответствующее при этом отображении произведениям $I \times A$, где I – интервал из $[0, \infty)$, а $A \subset S(O, 1)$ – сферический многоугольник. Минимальное σ -кольцо, содержащее все B_O (этот класс зависит от выбора O) совпадает с борелевыми множествами из \mathbb{E} . Положим

$$B = \bigcup_{O \in \mathbb{R}^3} B_O.$$

Пусть $\rho(f)$ – функция, заданная на пространстве флагов. Посредством ρ определяем функционал на B :

$$\mathbb{F}(I \times A) = \int_I E_1(A_p) dp, \quad (6.2)$$

где A_p – сферический многоугольник на $S(O, p)$, соответствующий телесному углу A , а $E_1(A_p)$ задано как правая часть (3.1), записанная для A_p . Через \mathbb{F}_0 обозначим сужение \mathbb{F} на B_0 . Отметим, что \mathbb{F}_0 конечно-аддитивно на каждом B_0 (это следует из конечной аддитивности E_1). При каких условиях на флаговую функцию $\rho(f)$ функционалы \mathbb{F}_0 или \mathbb{F} допускают расширение до знакопеременной меры на \mathbb{E} ?

Теорема 6.3. Пусть флаговая функция ρ трижды непрерывно дифференцируема. При заданном $O \in \mathbb{R}^3$ соответствующим функционалом \mathbb{F}_0 порождается мера на \mathbb{E} в том и только том случае, когда соотношение (5.3) справедливо для любой точки $z \in S(O, R)$, на любом $S(O, R)$, $R > 0$.

Доказательство. Необходимость очевидна из результатов §3 и §5. Для доказательства достаточности заметим, что при выполнении (5.3) $E_1(A_p)$ становится мерой на любом $S(O, R)$ с плотностью $H_{O,R}(P)$ (см. следствие 3). Рассмотрим меру в \mathbb{R}^3 , имеющую представление $H_{O,R}(P) dR d\Omega$ в полярных координатах (R, Ω) с центром в O . \mathbb{F}_0 совпадает с образом последней меры при отображении (6.1). Теорема доказана.

Мера μ_0 теоремы 6.3, заданная на \mathbb{E} , может зависеть от выбора начала координат O . Для избежания этого нам понадобится некоторое условие устойчивости. Достаточно полагать, что при любой плоскости e функция $H(e, P)$ не зависит от $P \in e$, т. е. имеет место

Теорема 6.4. Пусть ρ – гладкая флаговая функция. Тогда условия

- а) (5.3) имеет место для любой сферы $S(Q, R)$ и любой точки $z \in S(Q, R)$,
- б) для любой плоскости e функция (4.1), не зависит от $P \in e$

в совокупности необходимы и достаточны для существования локально-конечной знакопеременной меры μ в пространстве плоскостей, значения которой на классе B совпадают со значениями \mathbb{E} .

Доказательство. В силу а) меры $H_{O,R}(P) dRd\Omega$ на \mathbb{R}^3 определены для всех $Q \in \mathbb{R}^3$. Достаточно показать, что меры, являющиеся их образами на \mathbb{E} , т. е. меры \mathbb{F}_Q (см. теорему 6.3), совпадают при любых Q . А это в точности то, что обеспечивается условием б).

§7. ДОПОЛНЕНИЕ Р. В. АМБАРЦУМЯНА

Данное дополнение содержит два "синтетических" следствия, основанные на результатах предыдущих параграфов и одного из результатов статьи [4] этого номера. Пусть $\rho \in C^{(3)}$ – флаговая плотность (1.2) локально-конечной, знакопеременной меры, заданной в пространстве \mathbb{E} . Тогда непосредственным вычислением и в соответствии с общей теоремой из [4], в любой плоскости e

$$\rho(O, \varphi, e) = A(O, e) \sin 2\varphi + B(O, e) \cos 2\varphi + C(O, e), \quad (7.1)$$

где $O \in e$ – произвольная точка, φ – направление плоскости e , а функции A, B и C не зависят от φ .

Теорема (Р. В. Амбарцумян, В. К. Оганян). *Функции $A(O, e), B(O, e)$ и $C(O, e)$ удовлетворяют дифференциальному уравнению*

$$2 \frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y} - \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 B}{\partial y^2} \right) = 0, \quad (7.2)$$

где x, y – декартовы координаты в e .

Следствие 3. *При выполнении условий вышеприведенной теоремы, если ρ зависит только от расположения переменной P и не зависит от угловых переменных, т. е. если*

$$\rho(f) = \rho(P), \quad (7.3)$$

то ρ – постоянная.

Доказательство. При выполнении (7.3) уравнение (7.2) приводится к виду

$$\frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = 0. \quad (7.4)$$

С другой стороны, можно вычислить плотность $h(\epsilon)$ рассматриваемой меры, применяя формулу (4.10), которая в данном случае принимает вид

$$h(\epsilon) = M(P) - \frac{2}{\pi} \int_{\langle \epsilon, P \rangle} \rho''_{\phi\phi}(\varphi) d\varphi. \quad (7.5)$$

Поскольку интеграл пропорционален двумерному лапласиану в плоскости ϵ , из (7.5) следует, что $h(\epsilon) = M(P)$. При выполнении (7.3) уравнение (1.5) приводится к виду $M(P) = \rho(P)2$. Отсюда и из (7.5) следует, что ρ постоянна в каждой плоскости ϵ , и, тем самым, тождественно постоянна в \mathbb{R}^3 . Теорема доказана.

Приведем теперь точную формулировку и доказательство теоремы из Предисловия редактора настоящего сборника. Функцию $\theta(P_1, P_2)$, $P_1, P_2 \in \mathbb{R}^3$, будем называть линейно-аддитивной, если

$$\theta(P_1, P_3) = \theta(P_1, P_2) + \theta(P_2, P_3)$$

при P_1, P_2, P_3 , лежащих на одной прямой, причем P_2 расположена между P_1 и P_3 . Будем говорить, что θ локально-изотропна в каждой точке $P \in \mathbb{R}^3$, если производная $\Theta(P, \Omega) = \left. \frac{\partial \theta(P_1, P_2)}{\partial_{\Omega} P_2} \right|_{P_2=P_1}$ (дифференцирование по P_2 в пространственном направлении Ω) не зависит от Ω , т. е. $\Theta(P, \Omega) = \Theta(P)$.

Теорема. Пусть $\theta(P_1, P_2)$, $P_1, P_2 \in \mathbb{R}^3$ — трижды непрерывно дифференцируемая, линейно-аддитивная метрика. Если метрика θ — локально-изотропна в каждом $P \in \mathbb{R}^3$, то она — евклидова.

Доказательство. Единственным решением зонального уравнения $\Theta(P) = \int |\cos(\Omega, \xi)| h_P(\xi) d\xi$, где $P \in \mathbb{R}^3$ — фиксированный параметр, является $h_P(\xi) = u(P)$, т. е. функция, не зависящая от пространственного направления. Подстановкой $u(P)$ в (1.2) вместо $h(\xi)$ получаем $\rho(f) = \rho(P)$. Воспользуемся теперь результатом Погорелова [7] о том, что любая гладкая, линейно-аддитивная метрика в \mathbb{R}^3 порождается знакопеременной плотностью $h(\epsilon)$ в пространстве плоскостей \mathbb{E} . Тогда находим, что наше $h_P(\xi)$ совпадает с сужением некоторой $h(\epsilon)$

на пучки $[P]$ (ср. с (1.2)). Здесь применимо следствие 3, по которому ρ – постоянная. Ввиду общей формулы $\Theta(P, \Omega) = \int \rho(P, \Omega, \Phi) d\Phi$ (см. [5]) заключаем, что θ не зависит от P .

ABSTRACT. The paper considers the problem of measure generation in the space \mathbb{E} of planes in \mathbb{R}^3 by means of finitely additive functionals defined on sets which have product form in the usual spherical coordinates in \mathbb{E} . A necessary and sufficient condition of measure generation is found in terms of so-called flag densities. The solution reduces the problem to the problem of measure generation on the sphere by an Euler-type functional written down in an explicit form.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. V. Ambartzumian, "Combinatorial integral geometry, metric and zonoids", Acta Appl. Math., vol.9, pp. 3 – 27, 1987.
2. Г. Ю. Панина, "Выпуклые тела и меры, инвариантные относительно сдвигов", Записки научн. сем. ЛОМИ, т. 157, 1986.
3. Р. Г. Арамян, "О стохастической аппроксимации выпуклых тел", Известия АН Армении, Математика, т. 22, № 5, стр. 427 – 438, 1986.
4. Р. В. Амбарцумян, В. К. Оганян, "Конечно-аддитивные функционалы в пространстве плоскостей, I", Известия НАН Армении, Математика, т. 29, № 4, стр. 7 – 63, 1994.
5. R. V. Ambartzumian, Factorization Calculus and Geometric Probability, Cambridge University Press, 1990.
6. R. V. Ambartzumian, "Planar measure generation by Euler functionals", Submitted to Journal of Applied Probability, Stochastic Geometry Section.
7. А. В. Погорелов, Четвертая проблема Гильберта, Москва, Наука, 1974.
8. Р. Г. Арамян, "Восстановление розы направлений посредством флаговых плотностей в \mathbb{R}^3 ", Известия НАН Армении, Математика, т. 27, № 5, стр. 22 – 35, 1992.
9. Р. Г. Арамян, "О стохастической аппроксимации выпуклых тел", Тезисы докладов Пятой Вильнюсской межд. конф. по теории вероятностей и матем. статистике, т. 3, стр. 24, 1989.

15 декабря 1994

Институт математики
Национальной Академии Наук Армении