ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ ДЛЯ МАРТИНГАЛ–РАЗНОСТНЫХ ГИББСОВСКИХ РЕШЕТЧАТЫХ МОДЕЛЕЙ

Д. Г. Мартиросян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, Том 29, №3, 1994

Важность изучения мартингал-разностных гиббсовских случайных полей $\{\xi_t,\ t \in \mathbb{Z}^\nu\}$, которые определяются условием

$$E(\xi_t|\xi_s,\ s \neq t) = 0, \tag{1}$$

обусловлена тем, что для эргодических полей этого класса, для значений ξ_t, $t \in \mathbb{Z}^\nu$ имеет место центральная предельная теорема (см. [1]). В другой работе Б. С. Нахапетяна и А. Н. Петросяна [2] введены в рассмотрение классы моделей, удовлетворяющих (1). Естествен вопрос : есть ли фазовые переходы в таких системах ? В настоящей заметке мы строим простые примеры решетчатых моделей статистической физики, удовлетворяющих условию (1), и в которых происходит фазовый переход. Эти модели являются, по существу, несложной модификацией модели классического изинговского ферромагнетика. Из вышесказанного следует, что центральная предельная теорема имеет место для любого гиббсовского состояния, являющегося крайней точкой совокупности гиббсовских состояний (эргодические состояния).

Пусть $\mathbb{Z}^\nu$ – ν-мерная целочисленная решетка, $\nu \geq 2$. *Расстояние* между точками решетки $x, y \in \mathbb{Z}^\nu$, $x = (x_1, ..., x_\nu)$, $y = (y_1, ..., y_\nu)$ будем полагать равным .

$$d(x, y) = \sum_{j=1}^{\nu} |x_j - y_j|.$$

Через $\langle x, y\rangle$ будем обозначать пару точек $x, y \in \mathbb{Z}^\nu$ такую, что $d(x,y) = 1$. Для $V \subset \mathbb{Z}^\nu$ через V^c будем обозначать дополнение V в $\mathbb{Z}^\nu$. Для $V \subset \mathbb{Z}^\nu$, $|V| < \infty$, положим

$$\partial V = \{x \in V^c : \text{ существует } y \in V \text{ такое, что } d(x,y) = 1\}.$$

Пусть Q – конечное множество (спин). Для $V \subset \mathbb{Z}^\nu$ отображение $\varphi(V) : V \longmapsto Q$ будем называть ***конфигурацией на*** V. Множество всех конфигураций на V обозначим через $\mathcal{M}(V)$. Наконец, будем предполагать, что $\mathcal{M}(V)$ снабжено обычной σ-алгеброй, порожденной цилиндрическими множествами.

Перейдем к описанию моделей.

1. Пусть $Q = \{-q, -1+1, ..., 0, 1, ...; q\}$, q – натуральное число. $\varphi(x) \in Q$, $\varphi(y) \in$ $\in Q$. Потенциал взаимодействия ближайших соседей $U(\varphi(x), \varphi(y))$, $d(x,y) = 1$ определяется следующим образом :

$$U(\varphi(x), \varphi(y)) = \begin{cases} -1, & \text{если } \varphi(x) = \varphi(y) = 0,\ d(x,y) = 1; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Одночастичный потенциал $\mu(\varphi(x))$ определяется следующим образом :

$$\mu(\varphi(x)) = \begin{cases} \mu, & \text{если } \varphi(x) = 0; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

2. Пусть $Q = \{-A, A, -B, B\}$, где $A, B > 0$, $A \neq B$. Положим

$$U(\varphi(x), \varphi(y)) = U(|\varphi(x)|, |\varphi(y)|) = \begin{cases} -1, & \text{если } |\varphi(x)| = |\varphi(y)|; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

В дальнейшем мы рассматриваем, не оговаривая этого особо, только первую из введенных моделей.

Пусть $V \subset \mathbb{Z}^\nu$, $|V| < \infty$, и пусть $\varphi(\mathbb{Z}^\nu)$ - конфигурация на $\mathbb{Z}^\nu$, ограничения которой на множествах V и V^c обозначим через $\varphi(V)$ и $\varphi(V^c)$ соответственно. Относительный потенциал $H_0(\varphi(V)|\varphi(V^c))$ определяется как обычно (см. [3]) :

$$H_0(\varphi(V)|\varphi(V^c)) = \sum_{\langle x,y\rangle \cap V \neq \emptyset} U(\varphi(x), \varphi(y)) + \sum_{x \in V} \mu(\varphi(x)). \tag{2}$$

Пусть $V \subset \mathbb{Z}^\nu$, $|V| < \infty$, и пусть $\psi(V^c)$ - конфигурация на V^c. *Распределение Гиббса* на $\mathcal{M}(V)$ с граничными условиями $\psi(V^c)$ задается формулой

$$P_V(\varphi(V)|\psi(V^c)) = \frac{\exp[-\beta H_0(\varphi(V)|\psi(V^c))]}{\Xi(V, \beta, \psi(V^c))}. \tag{3}$$

Здесь $\beta > 0$ – обратная температура, а Ξ – нормирующий множитель. Обозначим через h внешнее поле $h = \beta\nu$.

Пусть $V \subset \mathbb{Z}^\nu$, $|V| < \infty$, и пусть конфигурации $\psi^{(1)}(V^c)$ и $\psi^{(2)}(V^c)$ таковы, что

$$\psi^{(1)}(V^c) = \{\psi(V^c) : \ \psi(x) = 0 \ \text{ для всех } x \in V^c\}, \tag{4}$$

$$\psi^{(2)}(V^c) = \{\psi(V^c) : \ \psi(x) \neq 0 \ \text{ для всех } x \in V^c\}. \tag{5}$$

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением распределений Гиббса в объеме V с граничными условиями $\psi^{(1)}(V^c)$ или $\psi^{(2)}(V^c)$. Эти распределения вероятностей будут обозначаться через $P_V^{(1)}(\cdot)$ и $P_V^{(2)}(\cdot)$ соответственно. Легко видеть, что распределения Гиббса (3) на $\mathcal{M}(V)$ при различных граничных условиях $\psi_1^{(2)}(V^c)$ и $\psi_2^{(2)}(V^c)$ вида (5) совпадают. Если при $V \to \infty$ распределения вероятностей $P_V^{(1)}(\cdot)$ и $P_V^{(2)}(\cdot)$ слабо сходятся на $\mathcal{M}(\mathbb{Z}^\nu)$, то предельные распределения вероятностей будем обозначать через $P^{(1)}$ и $P^{(2)}$ соответственно. Заметим, что если $l \in V$, то для распределения вероятностей P_V вида (3) условие (1) очевидно выполнено.

Теорема. *Найдется $q_0 > 0$ такое, что если $q > q_0$ и $\beta\nu - h = \ln(2q)$, то* $P^{(1)} \neq P^{(2)}$.

Доказательство.: Покажем, что распределения вероятностей (3) для рассматриваемой модели сводятся к распределению вероятностей модели классического изинговского ферромагнетика.

Граница и ***контуры*** конфигурации по аналогии с моделью классического изинговского ферромагнетика определяются как объединение $(\nu - 1)$-мерных граней, разделяющих пары точек $\langle x, y\rangle$ таких, что либо $\varphi(x) = 0, \varphi(y) \neq 0$, либо $\varphi(x) \neq 0, \varphi(y) = 0$. Пусть $x \in \mathbb{Z}^\nu$, и пусть $\varphi(\mathbb{Z}^\nu)$ - конфигурация. Положим

$$\alpha(x,\varphi) = \begin{cases} 0, & \text{если } \varphi(x) \neq 0; \\ \#\{y : \ d(x,y) = 1, \ \varphi(y) \neq 0\}, & \text{если } \varphi(x) = 0. \end{cases}$$

$$\gamma(x,\varphi) = \begin{cases} 0, & \text{если } \varphi(x) \neq 0; \\ \#\{y : \ d(x,y) = 1, \ \varphi(y) \neq 0\}, & \text{если } \varphi(x) = 0. \end{cases}$$

Пусть теперь $V \subset \mathbb{Z}^\nu$, $|V| < \infty$, и пусть $\varphi(V)$ – конфигурация на V. Рассмотрим гамильтониан

$$H_1(\varphi(V)|\psi^{(j)}(V^c)) = -\frac{1}{2}\sum_{x\in V\cup\partial V}\alpha(x,\varphi(\mathbb{Z}^\nu)) + \sum_{x\in V}\mu(\varphi(x)), \quad j=1,2, \tag{6}$$

где конфигурация $\varphi(\mathbb{Z}^\nu)$ такова, что ее ограничения на V и V^c совпадают с конфигурациями $\varphi(V)$ и $\psi^{(j)}(V^c)$ соответственно. Нетрудно проверить, что в случае граничных условий $\psi^{(2)}(V^c)$

$$H_1(\varphi(V)|\psi^{(2)}(V^c)) = H_0(\varphi(V)|\psi^{(2)}(V^c)). \tag{7}$$

В случае же граничных условий $\psi^{(1)}(V^c)$

$$H_1(\varphi(V)|\psi^{(1)}(V^c)) = H_0(\varphi(V)|\psi^{(1)}(V^c)) + \frac{1}{2}\sum_{(x,y):x\in\partial V, y\neq V\cup\partial V} 1 +$$

$$+\sum_{(x,y):x\in\partial V, y\in\partial V} 1 = H_0(\varphi(V)|\psi^{(1)}(V^c)) + f(V^c). \tag{8}$$

Величина $f(V^c)$ не зависит от $\varphi(V)$. Поэтому распределения Гиббса, отвечающие гамильтонианам H_0 H_1, совпадают, т. е. имеет место равенство

$$P_V^{(j)}(\varphi(V)) = \frac{\exp\left[\frac{\beta}{2}\sum_{x\in V\cup\partial V}\alpha(x,\varphi) - \beta\sum_{x\in V}\mu(\varphi(x))\right]}{\Xi(V,\beta,\psi^{(j)}(V^c))}. \tag{9}$$

Для $V \subset \mathbb{Z}^\nu$, $|V| < \infty$ и конфигурации φ, через $O(\varphi)$ обозначим множество всех точек $x \in V\cup\partial V$, удовлетворяющих условию $\varphi(x) = 0$. (Заметим, что $\partial V \subset O(\varphi)$ для граничных условий $\psi^{(1)}(V^c)$, и $\partial V \cap O(\varphi) = \emptyset$ для граничных условий $\psi^{(2)}(V^c)$). Легко видеть, что

$$\frac{1}{2}\sum_{x\in V\cup\partial V}\alpha(x,\varphi) = \frac{1}{2}\sum_{x\in O(\varphi)}\alpha(x,\varphi) = \frac{1}{2}\sum_{x\in O(\varphi)}(2\nu - \gamma(x,\varphi)) =$$

$$= \nu|O(\varphi)| - \frac{1}{2}\sum_{x\in O(\varphi)}\gamma(x,\varphi). \tag{10}$$

Множество $O^{(j)}(\varphi)$ однозначно определяется заданием набора контуров $\{\Gamma_1,...,\Gamma_n\}$ и граничных условий $\psi^{(j)}(V^c)$, $j=1,2$. Пользуясь этим, обозначим $O^{(j)}(\Gamma_1,...,\Gamma_n) = O^{(j)}(\varphi)$, где $\Gamma_1,...,\Gamma_n$ – совокупность всех контуров конфигурации φ. Далее, обозначим через

$\mathcal{A}^{(j)}(\Gamma_1,...,\Gamma_n) = \{\varphi(V) : \{\Gamma_1,...,\Gamma_n\}$ – множество всех контуров конфигурации $\varphi\}$.

Положим

$$\Xi(\Gamma_1,\dots,\Gamma_n|V,\psi^{(j)}(V^c)) =$$
$$= \sum_{\varphi(V)\in\mathcal{A}(\Gamma_1,\dots,\Gamma_n)} \exp\left[\frac{\beta}{2}\sum_{x\in V\cup\partial V}\alpha(x,\varphi) - \beta\sum_{x\in V}\mu(\varphi(x))\right]. \quad (11)$$

Из (10) и (11) следует, что

$$\Xi(\Gamma_1,\dots,\Gamma_n|V,\psi^{(j)}(V^c)) =$$
$$= \sum_{\varphi(V)\in\mathcal{A}(\Gamma_1,\dots,\Gamma_n)} \exp\left[(\beta\nu-\beta\mu)\,|O(\varphi)| - \frac{\beta}{2}\sum_{x\in O(\varphi)}\gamma(x,\varphi)\right] =$$
$$= \exp\left[(\beta\nu-h)\,|O^{(j)}(\Gamma_1,\dots,\Gamma_n)| - \frac{\beta}{2}\sum_{x\in O^{(j)}(\Gamma_1,\dots,\Gamma_n)}\gamma(x,\varphi)\right]\sum_{\varphi(V)\in\mathcal{A}^{(j)}(\Gamma_1,\dots,\Gamma_n)} 1 =$$
$$= \exp\left[(\beta\nu-h)\,|O^{(j)}(\Gamma_1,\dots,\Gamma_n)| - \frac{\beta}{2}\sum_{x\in O^{(j)}(\Gamma_1,\dots,\Gamma_n)}\gamma(x,\varphi)\right](2q)^{|V\setminus O^{(j)}(\Gamma_1,\dots,\Gamma_n)|}.$$

Рассмотрим числа

$$A_j(V) = \exp[(\beta\nu-h)\,|O^{(j)}(\Gamma_1,\dots,\Gamma_n)|](2q)^{|V\setminus O^{(j)}(\Gamma_1,\dots,\Gamma_n)|},\quad j=1,2.$$

При $\beta\nu-h=\ln(2q)$ имеем $A_1(V)=\exp[(\beta\nu-h)\,|V\cup\partial V|]$ и $A_2(V) =$ $= \exp[(\beta\nu-h)\,|V|]$, т. е. эти числа не зависят от конфигурации φ (соответственно, от набора контуров $\{\Gamma_1,\dots,\Gamma_n\}$. Далее

$$\sum_{x\in O^{(j)}(\Gamma_1,\dots,\Gamma_n)}\gamma(x,\varphi),\qquad j=1,2$$

равно числу граней, разделяющих точки в парах $\langle x,y\rangle$ с $\varphi(x)=0$, $\varphi(y)\neq 0$. Значит

$$\sum_{x\in O(\Gamma_1,\dots,\Gamma_n)}\gamma(x,\varphi) = \sum_{s=1}^{n}|\Gamma_s|, \quad (12)$$

$$\Xi(\Gamma_1,\dots,\Gamma_n|V,\beta,\psi^{(j)}(V^c)) = A_j(V)\exp\left[-\frac{\beta}{2}\sum_{s=1}^{n}|\Gamma_s|\right] \quad (13)$$

Следовательно, вероятность события $\mathcal{A}(\Gamma_1,\dots,\Gamma_n)$ равна

$$q_V^{(j)}(\mathcal{A}(\Gamma_1,\dots,\Gamma_n)) = \frac{\exp\left[-\frac{\beta}{2}\sum_{s=1}^{n}|\Gamma_s|\right]}{\Xi(V,\beta,\psi^{(j)}(V^c))}, \quad (14)$$

где нормирующий множитель удовлетворяет следующему уравнению :

$$\Xi(V,\beta,\psi^{(j)}(V^c)) = \sum_{\{\Gamma_1,\dots,\Gamma_n\}} \exp\left[-\frac{\beta}{2}\sum_{s=1}^{n}|\Gamma_s|\right]. \qquad (15)$$

Суммирование в (15) производится по всевозможным наборам контуров $\{\Gamma_1,\dots,\Gamma_n\}$, внутренности которых содержатся в V.

Из формулы (14) следует утверждение теоремы, и, следовательно, наличие фазового перехода при достаточно большом β ($\beta > \beta_0$). Равенство $h = \beta\nu - \ln(2q)$ устанавливается обычным способом (см. [3]).

В заключение я благодарю Международный Научный Фонд и Российскую Академию наук за финансовую поддержку. Я благодарю также Б. С. Нахапетяна за плодотворные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. B. S. Nahapetian, A. N. Petrosian, "Limit theorems for multidimensional martingale–differences and applications to the Gibbs random fields", (в печати).
2. B. S. Nahapetian, A. N. Petrosian, "Martingale-difference Gibbs random fields and central limit theorem", Annales Acad. Scientiarum Fennic., Ser. A. I. Math., vol. 17, pp. 105 - 110, 1992.
3. Я. Г. Синай, Теория фазовых переходов, М., Наука, 1980.

15 Ноября 1993

Институт математики
Национальной Академии Наук Армении