О ЗАДАЧЕ БИЦАДЗЕ–САМАРСКОГО ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Г. В. Вирабян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 29, №3, 1994

Статья посвящена задаче Бицадзе–Самарского для уравнения колебания струны и эквивалентных гиперболических систем в случае, когда рассматриваемая область – круг или прямоугольник. Установлены теоремы о разрешимости и единственности решения в классе обобщенных функций.

ВВЕДЕНИЕ

В работе А. В. Бицадзе и А. А. Самарского [1], относящейся к равномерным эллиптическим уравнениям, была предложена новая постановка краевой задачи. Предполагается, что неизвестная функция u удовлетворяет обычному условию Дирихле лишь на части границы, а на оставшейся части границы и на дуге, лежащей внутри области, u удовлетворяет некоторому соотношению. Для уравнения Лапласа была указана методика установления корректности такой постановки задачи. Различные варианты эллиптических задач с краевыми условиями типа Бицадзе–Самарского рассматривались в работах [4 – 7]. Важность развития общей теории этих задач отмечена в [3, 8, 9].

В настоящей статье исследована краевая задача Бицадзе–Самарского для гиперболических уравнений второго порядка. Рассмотрены две постановки этой задачи – для уравнения колебания струны и для системы дифференциальных уравнений, эквивалентной уравнению струны, когда рассматриваемая область есть круг или прямоугольник.

§1. СЛУЧАЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

Пусть область $\overline{\Omega}$ – квадрат $\{-1 \le x \le 1,\ -1 \le y \le 1\}$. Краевую задачу

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial u_1}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial x} = 0; \tag{1}$$

$$\begin{gathered} a_1(x)u_1 + b_1(x)u_2|_{y=-1} = f_1(x), \\ a_2(x)u_1 + b_2(x)u_2|_{y=1} = f_2(x), \\ a_3(y)u_1 + b_3(y)u_2|_{x=-1} = f_3(y), \\ a_4(y)u_1 + b_4(y)u_2|_{x=1} = a_4(y)u_1 + b_4(y)u_2|_{x=r} = f_4(y), \end{gathered} \tag{2}$$

где $0 \le r \le 1$, а a_i, b_i, f_i $(i = 1, \dots, 4)$ – непрерывные функции на интервале $[-1, 1]$, будем называть задачей Бицадзе–Самарского для системы дифференциальных уравнений, эквивалентной уравнению колебания струны. Ниже мы будем искать решение краевой задачи (1), (2) в классе непрерывных на $\overline{\Omega}$ функций.

При $r = 1$ задача (1), (2) была впервые рассмотрена С. Л. Соболевым [2], см. также [10, 11], а для $r = 0$ – см. в [12]. В данной статье эта задача изучается для произвольных $r \in [0, 1]$. Случаи рационального и иррационального r рассмотрены отдельно.

1. Пусть r – рациональное число : $r = \dfrac{m}{n} \in [0, 1]$ (полагаем, что дробь m/n несократима). Границу $\partial\Omega$ квадрата $\overline{\Omega}$, начиная с нижнего левого угла O_1, разделим на равные интервалы $l_k = \left(\dfrac{k-1}{n} < s < \dfrac{k}{n}\right)$, $k = 1, 2, \dots, 8n$, длины $\dfrac{1}{n}$. Здесь s – длина $\partial\Omega$, отсчитываемая от вершины O_1 в направлении, обратном часовой стрелке (см. рис. 1). В этих интервалах отметим точки с координатами

$$\begin{gathered} M_{2k}\left(\frac{2k}{n} - \frac{\xi}{n}\right) \in l_{2k}, \quad k = 1, 2, \dots, 4n, \\ M_{2k+1}\left(\frac{2k}{n} + \frac{\xi}{n}\right) \in l_{2k+1}, \quad k = 0, 1, \dots, 4n-1. \end{gathered} \tag{3}$$

Эти точки представляют собой узлы упругих отражений от $\partial\Omega$ светового луча, исходящего из точки $M_1(\xi/n) \in l_1$ по одному из характеристических направлений ($x \pm y =$const) системы (1). Пусть $M \in \partial\Omega$ – произвольная точка. Обозначим через

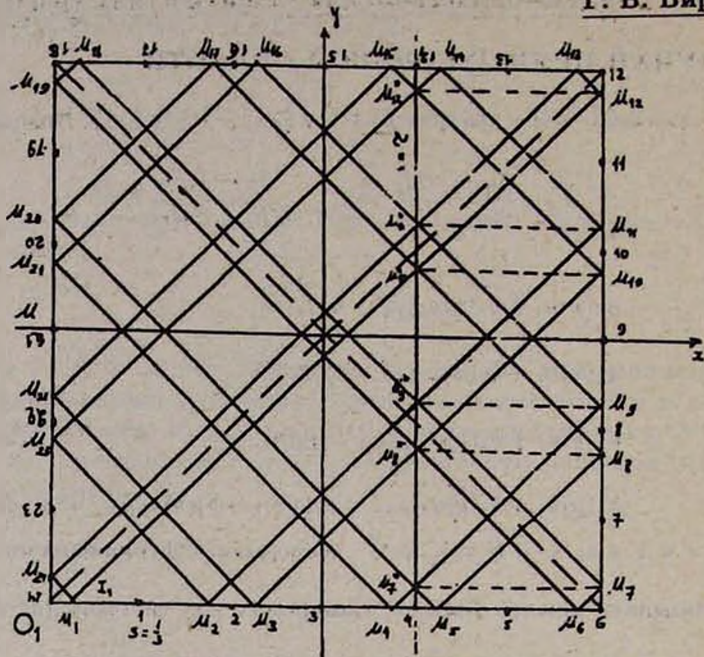

Рис. 1

$S^{\pm}(M)$ точки пересечения $\partial\Omega$ с соответствующим семейством характеристик $x \pm y =$const системы (1). Далее, обозначим через M^* проекцию точки $M \in \in [M_{2n}, M_{4n}]$ на линию $x = r$, параллельную оси x. Легко установить следующие соотношения для автоморфизмов $S^{\pm}$ границы $\partial\Omega$ в себя.

Лемма 1. *Автоморфизмы $S^{\pm}$ обладают следующими свойствами :*

$$S^-(M_k) = M_{4n-k+1}, \quad S^+(M_k) = M_{8n-k+1}, \quad k = 2n+1, \dots, 4n.$$

$$S^-(M_k) = M_{12n-k+1}, \quad S^+(M_k) = M_{8n-k+1}, \quad k = 6n+1, \dots, 8n.$$

$$S^-(M_k^*) = M_{3n+m-k+1}, \quad k = 2n+1, \dots, 3n+m.$$

$$S^-(M_k^*) = M_{n-m+k}, \quad k = 3n+m+1, \dots, 4n.$$

$$S^+(M_k^*) = M_{m-n+k}, \quad k = 2n+1, \dots, 3n-m.$$

$$S^+(M_k^*) = M_{9n-m+1}, \quad k = 3n-m+1, \dots, 4n.$$

Общее решение системы (1) можно написать в виде

$$\begin{aligned} u_1(P) &= \varphi_1(P) + \varphi_2(P), \\ u_2(P) &= \varphi_1(P) - \varphi_2(P), \end{aligned} \tag{4}$$

где $P \in \overline{\Omega}$, а функции $\varphi_1(P)$ и $\varphi_2(P)$ постоянны на характеристиках $x + y =$const и $x - y =$const соответственно :

$$\varphi_1(S^+P) = \varphi_1(P), \qquad \varphi_2(S^-P) = \varphi_2(P). \tag{5}$$

Здесь $S^{\pm}P$ - точки, где характеристики, проходящие через точку $P \in \overline{\Omega}$, пересекают границу $\partial\Omega$.

В рассматриваемом случае задача Бицадзе–Самарского состоит в определении искомых $\varphi_1(P)$ и $\varphi_2(P)$ из класса $C(\overline{\Omega})$ непрерывных в $\overline{\Omega}$ функций. Таким образом, ставится задача отыскания обобщенного решения краевой задачи (1), (2).

Определение. *Обобщенным решением* краевой задачи (1), (2) Бицадзе–Самарского называем пару функций u_1, u_2, удовлетворяющих почти всюду в $\Omega = \overline{\Omega} \setminus \partial\Omega$ системе (1) дифференциальных уравнений, а также граничным условиям (2).

Подставляя общее решение (4) системы (1) в граничное условие (2) в точках M_k $(k = 1, ..., 8n)$, получаем систему из $8n$ уравнений :

$$[a_1(M_k) + b_1(M_k)]\varphi_1(M_k) + [a_1(M_k) - b_1(M_k)]\varphi_2(M_k) = f_1(M_k), \quad k = 1, ..., 2n,$$

$$[a_2(M_k) + b_2(M_k)]\varphi_1(M_k) + [a_2(M_k) - b_2(M_k)]\varphi_2(M_k) = f_2(M_k), \quad k = 4n + 1, ..., 6n,$$

$$[a_3(M_k) + b_3(M_k)]\varphi_1(M_k) + [a_3(M_k) - b_3(M_k)]\varphi_2(M_k) = f_3(M_k), \quad k = 6n + 1, ..., 8n,$$

$$[a_4(M_k) + b_4(M_k)]\varphi_1(M_k) + [a_4(M_k) - b_4(M_k)]\varphi_2(M_k) =$$

$$= [a_4(M_k) + b_4(M_k)]\varphi_1(M_k^*) + [a_4(M_k) - b_4(M_k)]\varphi_2(M_k^*), \quad k = 2n + 1, ..., 4n. \tag{6}$$

Поскольку функции φ_1 и φ_2 инвариантны относительно автоморфизмов S^+ и S^- соответственно, то, согласно лемме 1

$$\varphi_2(M_k) = \varphi_2(M_{4n-k+1}), \qquad k = 1, ..., 2n, \tag{7}$$

$$\varphi_2(M_k) = \varphi_2(M_{12n-k+1}), \qquad k = 4n + 1, ..., 6n, \tag{8}$$

$$\varphi_1(M_k) = \varphi_1(M_{8n-k}), \qquad k = 1, ..., 2n, \tag{9}$$

$$\varphi_1(M_k) = \varphi_1(M_{8n-k}), \qquad k = 4n+1, \dots, 6n. \tag{10}$$

Полагая $0 \le \xi \le 1$, введем обозначения

$$\lambda_k \left(\frac{\xi}{n}\right) = \varphi_1(M_k), \qquad k = 1, \dots, 2n, \tag{11}$$

$$\lambda_{2n+k} \left(\frac{\xi}{n}\right) = \varphi_1(M_{4n+k}), \qquad k = 1, \dots, 2n, \tag{12}$$

$$\lambda_{4n+k} \left(\frac{\xi}{n}\right) = \varphi_2(M_k), \qquad k = 1, \dots, 2n, \tag{13}$$

$$\lambda_{6n+k} \left(\frac{\xi}{n}\right) = \varphi_2(M_{4n+k}), \qquad k = 1, \dots, 2n. \tag{14}$$

Заметим, что нахождение искомых функций φ_1 и φ_2 в промежутке $[-2, 2]$, т. е. решение задачи Бицадзе–Самарского, эквивалентно нахождению новых неизвестных функций $\lambda_j \left(\frac{\xi}{n}\right)$, $j = 1, \dots, 8n$, $\xi \in [0, 1]$. Воспользовавшись соотношениями (7) – (10) и леммой 1, систему (6) можно переписать в виде алгебраической системы из $8n$ уравнений относительно $8n$ неизвестных функций λ_j :

$$[a_1(M_k) + b_1(M_k)]\lambda_k \left(\tfrac{\xi}{n}\right) + [a_1(M_k) - b_1(M_k)]\lambda_{4n+k} \left(\tfrac{\xi}{n}\right) = f_1(M_k), \; k = 1, \dots, 2n,$$

$$[a_2(M_k) + b_2(M_k)]\lambda_{k-2n} \left(\tfrac{\xi}{n}\right) + [a_2(M_k) - b_2(M_k)]\lambda_{2n+k} \left(\tfrac{\xi}{n}\right) = f_2(M_k).$$

$$k = 4n+1, \dots, 6n,$$

$$[a_3(M_k) + b_3(M_k)]\lambda_{8n-k+1} \left(\tfrac{\xi}{n}\right) + [a_3(M_k) - b_3(M_k)]\lambda_{14n-k+1} \left(\tfrac{\xi}{n}\right) = f_3(M_k),$$

$$k = 6n+1, \dots, 8n.$$

$$[a_4(M_k) + b_4(M_k)]\lambda_{6n-k+1} \left(\tfrac{\xi}{n}\right) + [a_4(M_k) - b_4(M_k)]\lambda_{8n-k+1} \left(\tfrac{\xi}{n}\right) =$$

$$= [a_4(M_k) + b_4(M_k)]\lambda_{m-n+k} \left(\tfrac{\xi}{n}\right) + [a_4(M_k) - b_4(M_k)]\lambda_{7n+m-k+1} \left(\tfrac{\xi}{n}\right),$$

$$k = 2n+1, \dots, 3n-m, \tag{15}$$

$$[a_4(M_k) + b_4(M_k)]\lambda_{8n-k+1} \left(\tfrac{\xi}{n}\right) + [a_4(M_k) - b_4(M_k)]\lambda_{8n-k+1} \left(\tfrac{\xi}{n}\right) =$$

$$= [a_4(M_k) + b_4(M_k)]\lambda_{7n-m-k+1} \left(\tfrac{\xi}{n}\right) + [a_4(M_k) - b_4(M_k)]\lambda_{7n+m-k+1} \left(\tfrac{\xi}{n}\right).$$

$$k = 3n-m+1, \dots, 3n+m,$$

$$[a_4(M_k) + b_4(M_k)]\lambda_{6n-k+1} \left(\tfrac{\xi}{n}\right) + [a_4(M_k) - b_4(M_k)]\lambda_{8n-k+1} \left(\tfrac{\xi}{n}\right) =$$

$$= [a_4(M_k) + b_4(M_k)]\lambda_{11n-m-k+1} \left(\tfrac{\xi}{n}\right) + [a_4(M_k) - b_4(M_k)]\lambda_{3n-m+k} \left(\tfrac{\xi}{n}\right).$$

$$k = 3n+m+1, \dots, 4n.$$

Обозначим через $\Delta(\xi)$ определитель этой системы. В случае задачи Дирихле $\Delta(\xi)$ совпадает с определителем из [10], в случае же, когда $r = 0$, явный вид $\Delta(\xi)$ дан в работе [12].

Теорема 1. *Если определитель $\Delta(\xi)$ системы (15) отличен от нуля для всех $\xi \in [0, 1]$, то краевая задача Бицадзе–Самарского имеет единственное обобщенное решение в классе непрерывных функций.*

2. Предположим теперь, что $r \in [0, 1]$ - иррациональное число. Пусть $\overline{\Omega}$ – единичный квадрат с центром в начале координат. Представим $\overline{\Omega}$ в виде суммы двух прямоугольников :

$$\overline{\Omega} = \Omega_r^{(1)} \cup \Omega_r^{(2)}, \tag{16}$$

где

$$\Omega_r^{(1)} = \begin{cases} -1 \le x \le r \\ -1 \le y \le 1 \end{cases}, \qquad \Omega_r^{(2)} = \begin{cases} r \le x \le 1 \\ -1 \le y \le 1 \end{cases}. \tag{17}$$

Введем также обозначения

$$\gamma_1 = \begin{cases} -1 \le x \le r \\ y = -1 \end{cases}, \quad \gamma_2 = \begin{cases} x = r \\ -1 \le y \le 1 \end{cases},$$
$$\gamma_3 = \begin{cases} -1 \le x \le r \\ y = 1 \end{cases}, \quad \gamma_4 = \begin{cases} x = -1 \\ -1 \le y \le 1 \end{cases}, \tag{18}$$

$$\sigma_1 = \begin{cases} r \le x \le 1 \\ y = -1 \end{cases}, \quad \sigma_2 = \begin{cases} x = 1 \\ -1 \le y \le 1 \end{cases},$$
$$\sigma_3 = \begin{cases} r \le x \le 1 \\ y = 1 \end{cases}, \quad \sigma_4 = \begin{cases} x = r \\ -1 \le y \le 1 \end{cases}, \tag{19}$$

$$\Gamma_1 = \begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ y = -1 \end{cases}, \quad \Gamma_2 = \begin{cases} x = -1 \\ -1 \le y \le 1 \end{cases},$$
$$\Gamma_3 = \begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ y = 1 \end{cases}, \quad \Gamma_4 = \begin{cases} x = 1 \\ -1 \le y \le 1 \end{cases} \tag{20}$$

Полные границы этих областей будут

$$\partial\Omega_r^{(1)} = \bigcup_{i=1}^{4} \gamma_i, \quad \partial\Omega_r^{(2)} = \bigcup_{i=1}^{4} \sigma_i, \quad \partial\Omega = \bigcup_{i=1}^{4} \Gamma_i. \tag{21}$$

Лемма 2. *Для произвольной точки $M \in \partial\Omega$, не являющейся вершиной угла, и для произвольного решения u_1, u_2 системы (2) справедливо тождество*

$$u_j(M) + u_j(S^+S^-M) = u_j(S^-M) + u_j(S^+M), \quad j = 1, 2. \tag{22}$$

Доказательство. Из общего решения (7) имеем

$$\begin{aligned} u_{1,2}(M) &= \varphi_1(M) \pm \varphi_2(M), \\ u_{1,2}(S^+S^-M) &= \varphi_1(S^+S^-M) \pm \varphi_2(S^+S^-M), \\ u_{1,2}(S^-M) &= \varphi_1(S^-M) \pm \varphi_2(S^-M), \\ u_{1,2}(S^+M) &= \varphi_1(S^+M) \pm \varphi_2(S^+M). \end{aligned} \tag{23}$$

Сложив эти равенства и учитывая инвариантность функций $\varphi_{1,2}$ относительно автоморфизмов $S^\pm$, приходим к тождеству (22). Лемма доказана.

Краевую задачу (1), (2) при $f_i \equiv 0$, $i = 1, 2, 3$ будем называть *однородной задачей* Бицадзе–Самарского. Предположим, что выполнено условие

$$a_i^2 - b_i^2 \neq 0 \quad \text{на } \Gamma_i \text{ при } i = 1, 2, 3, 4.$$

Теорема 2. *Пусть r – иррациональное число, $0 \leq r < 1$ и $u_1(x, y)$, $u_2(x, y)$ – решение однородной краевой задачи Бицадзе–Самарского. Если $u_2(x, y)$ обращается в ноль на одной из сторон Γ_i квадрата $\overline{\Omega}$, то функции u_1 и u_2 тождественно равны нулю в $\overline{\Omega}$.*

Доказательство. Пусть для определенности $u_2|_{\Gamma_2} = 0$. Тогда из граничных условий (2) следует, что

$$u_{1,2}\Big|_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3} = 0. \tag{24}$$

Применяя лемму 2, получим

$$u_{1,2}\Big|_{\gamma_2 = \sigma_4} = 0. \tag{25}$$

Таким образом, решение u_1, u_2 однородной задачи Бицадзе–Самарского одновременно является решением однородной задачи Дирихле для прямоугольников $\Omega_r^{(1)}$

и $\Omega_r^{(2)}$ с иррациональными отношениями длин сторон $\rho_1 = \dfrac{1+r}{2}$ и $\rho_2 = \dfrac{1-r}{2}$. Поэтому, согласно [11], $u_1(x,y) \equiv 0$, $u_2(x,y) \equiv 0$ в $\Omega_r^{(1)}$ и $\Omega_r^{(2)}$, а следовательно и в $\overline{\Omega}$. Теорема доказана.

Переходя к вопросу о существовании решения неоднородной задачи Бицадзе–Самарского, предположим, что иррациональные числа $\rho_1 = \dfrac{1+r}{2}$ и $\rho_2 = \dfrac{1-r}{2}$ удовлетворяют соотношениям

$$\left|\rho_i - \frac{m}{n}\right| > \frac{A}{n^{K+1}}, \quad i = 1,2, \tag{26}$$

где A и K – фиксированные положительные постоянные, а m и n – любые целые числа.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия (26) и $u_2|_{\Gamma_1} = g$. Далее, пусть $a_i, b_i \in$ $\in C^{2K+6}(\Gamma_i)$, $i = 1,...,4$ и $f_i \in C^{K+4}(\Gamma_i)$, $i = 1,2,3$, причем эти функции и их производные вплоть до порядка $2K+6$ непрерывны в вершинах прямоугольников $\Omega_r^{(1)}$ и $\Omega_r^{(2)}$. Тогда неоднородная задача Бицадзе–Самарского имеет дважды непрерывно-дифференцируемое решение.*

Доказательство. Из леммы 2 и условий (2) следует, что

$$a_4(x)u_1 + b_4(x)u_2|_{\gamma_2} = a_4(x)u_1 + b_4(x)u_2|_{\Gamma_4} = f_4(x), \tag{27}$$

где $f_4 \in C^{K+4}$ однозначно определяется через заданные граничные функции f_i, $i = 1,2,3$. Таким образом, искомое решение неоднородной задачи Бицадзе–Самарского одновременно является решением неоднородной задачи Дирихле для системы (1) в случае прямоугольников $\Omega_r^{(1)}$ и $\Omega_r^{(2)}$ соответственно. Тем самым, существование дважды непрерывно-дифференцируемого решения задачи Бицадзе–Самарского следует из теоремы 3 работы [11].

§2. СЛУЧАЙ КРУГА

В этом параграфе рассматривается задача Бицадзе–Самарского для уравнения струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0 \tag{28}$$

в случае, когда область Ω – единичный круг с центром в начале координат. Обобщенная задача Бицадзе-Самарского заключается в отыскании непрерывной в замкнутом круге $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ функции $u(x, y)$ вида

$$u(x,y) = F(x) + G(y), \tag{29}$$

удовлетворяющей граничному условию

$$u\Big|_{\partial\Omega} = u\Big|_{\partial\Omega_\varepsilon}, \tag{30}$$

где $\partial\Omega_\varepsilon$ – граница концентрического круга Ω_ε радиуса ε, $0 \leq \varepsilon \leq 1$. Решения задачи (28), (30) будем называть *обобщенными решениями* задачи Бицадзе–Самарского. Очевидно, что эта задача имеет бесконечное множество решений, ибо в это множество в частности входят произвольные постоянные.

Подставив граничное условие (30) в (29), получаем

$$F(x) + G(\pm\sqrt{1-x^2}) = F(\varepsilon x) + G(\pm\sqrt{\varepsilon^2 - \varepsilon^2 x^2}), \quad -1 \leq x \leq 1, \tag{31}$$

откуда с применением (31) находим

$$\begin{aligned} F(x) &= F(\varepsilon x) + G(\varepsilon\sqrt{1-x^2}) - G(\sqrt{1-x^2}), \\ F(\varepsilon x) &= F(\varepsilon^2 x) + G(\varepsilon\sqrt{1-\varepsilon^2 x^2}) - G(\sqrt{1-\varepsilon^2 x^2}), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F(\varepsilon^n x) &= F(\varepsilon^{n+1} x) + G(\varepsilon\sqrt{1-\varepsilon^{2n} x^2}) - G(\sqrt{1-\varepsilon^{2n} x^2}). \end{aligned} \tag{32}$$

Просуммировав эти равенства, получим

$$F(x) = F(0) + \sum_{k=0}^{n} \left[G(\varepsilon\sqrt{1-\varepsilon^{2k}x^2}) - G(\sqrt{1-\varepsilon^{2k}x^2}) \right]. \tag{33}$$

Перейдя в (33) к пределу при $n \to \infty$, полагая, что правая часть (31) равномерно сходится в $[-1, 1]$ и учитывая непрерывность функции $F(x)$, приходим к равенству

$$F(x) = F(0) + \sum_{k=0}^{\infty} \left[G(\varepsilon\sqrt{1-\varepsilon^{2k}x^2}) - G(\sqrt{1-\varepsilon^{2k}x^2}) \right]. \tag{34}$$

Таким образом, существование решения задачи Бицадзе–Самарского зависит от равномерной сходимости ряда (34). Нижеследующая теорема показывает, что ряд (34) равномерно сходится в $[-1, 1]$ для некоторого класса полиномов.

Теорема 4. *Краевая задача Бицадзе–Самарского (28), (30) имеет бесконечное множество полиномиальных решений.*

Доказательство. Пусть $G(t)$ - произвольный полином вида

$$G(t) = \sum_{\nu=0}^{N} b_\nu t^{2\nu} \tag{35}$$

такой, что

$$\sum_{\nu=0}^{N} b_\nu(\varepsilon^{2\nu} - 1) = 0. \tag{36}$$

Тогда формула (31) принимает вид

$$\begin{aligned}
F(x) =& F(0) + \sum_{k=0}^{\infty} \left[\sum_{\nu=0}^{N} b_\nu(\varepsilon^2 - \varepsilon^{2k+2}x^2)^\nu - \sum_{\nu=0}^{N} b_\nu(1 - \varepsilon^{2k}x^2)^\nu \right] = \\
&= F(0) + \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{N}(-1)^\nu b_\nu \left[\sum_{i=0}^{\nu}(-1)^{\nu-i}C_\nu^i \varepsilon^{2i}\varepsilon^{(2k+2)(\nu-i)}x^{2\nu-2i} - \right. \\
&\left. - \sum_{i=0}^{\nu}(-1)^{\nu-i}C_\nu^i \varepsilon^{2k(\nu-i)}x^{2\nu-2i} \right] = \\
&= F(0) + \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{N} b_\nu(\varepsilon^{2\nu} - 1)\sum_{i=0}^{\nu}(-1)^i C_\nu^i \varepsilon^{2ki}x^{2i} = \\
&= F(0) + \sum_{\nu=0}^{N}\sum_{i=0}^{\nu} b_\nu(\varepsilon^{2\nu} - 1)(-1)^i C_\nu^i x^{2i} \sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^{2ki} = \\
&= F(0) + \sum_{\nu=0}^{N}\sum_{i=1}^{\nu} \frac{b_\nu(\varepsilon^{2\nu} - 1)(-1)^i C_\nu^i x^{2i}}{1 - \varepsilon^{2i}}.
\end{aligned}$$

Тем самым, функции

$$u(x,y) = F(0) + \sum_{\nu=0}^{N} b_\nu y^\nu + \sum_{\nu=0}^{N}\sum_{i=1}^{\nu}(-1)^i C_\nu^i b_\nu \frac{(\varepsilon^{2\nu}-1)x^{2i}}{1-\varepsilon^{2i}}$$

являются полиномиальными решениями задачи Бицадзе-Самарского для уравнения струны в случае круга.

ABSTRACT. The paper is devoted to Bitsadze Samarsky problem for the string oscillation equation and for equivalent hyperbolic systems in the circle or in the square. The solvability and uniqueness theorems are stated in a class of generalized solutions.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Бицадзе, А. А. Самарский, "О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач", ДАН СССР, т. 185, №1, 1969.
2. С. Л. Соболев, "Пример корректной краевой задачи для уравнения колебания струны с данными на всей границе", ДАН СССР, т. 109, №1, 1956.
3. R. A. Alexandrian, Ju. M. Berezanski, G. S. Il'in, A. G. Kostjuchenko, "Some questions in spectral theory for partial differential equations", Amer. Math. Soc. Transl.(2), vol. 105, 1976.
4. Д. Г. Гордезиани, Семинар ИПМ ТГУ, Тбилиси, т. 2, стр. 39 – 41, 1970.
5. Л. И. Камынин, "Единственность краевых задач для дегенерирующего эллиптического уравнения второго порядка", Дифференциальные уравн., т. 14, №1, стр. 39 – 49, 1978.
6. А. Л. Скубачевский, "Нелокальные эллиптические задачи с параметром", Мат. сб., т. 121, №2, стр. 201 – 210, 1983.
7. Я. А. Ройтберг, З. Л. Шефтель, "Нелокальные задачи для эллиптических уравнений и систем", Сиб. мат. журнал, т. 13, №1, стр. 165 – 181, 1972.
8. А. В. Бицадзе, Некоторые классы дифференциальных уравнений в частных производных, Наука, Москва, 1981.
9. А. А. Самарский, "О некоторых задачах теории дифференциальных уравнений", Диф. уравнения, т. 16, №11, стр. 1925 – 1935, 1980.
10. Н. И. Вахания, "О краевой задаче для гиперболической системы, эквивалентной уравнению струны", ДАН СССР, т. 116, №6, стр. 906 – 909, 1957.
11. Н. Н. Вахания, "О задаче Дирихле для уравнения струны". Сообщ. АН Груз. ССР, т. 21, №2, стр. 131 – 136, 1958.
12. Г. В. Вирабян, "О некоторых краевых задачах для гиперболических уравнений", Научно-метод. конференция, Ереван, 1990.
13. G. H. Hardy, E. M. Wright, An Introduction to the Theory Numbers, Oxford, 1954.

9 апреля 1993

Ереванский государственный университет