О ЛОКАЛИЗАЦИИ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Г. Г. Казарян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 29, №3, 1994

В статье исследованы локализации негипоэллиптических операторов, а именно, поведение отношения $P(\xi+\eta)/\tilde{P}(\eta)$ при $|\eta|\to\infty$, где $P(\xi)$ – символ линейного дифференциального оператора $P(D)$, а $\tilde{P}(\xi)$ – его функция Хёрмандера. Для определенного класса операторов найден наибольший порядок локализаций и описано множество локализаций.

§0. ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известно (см., напр., [1], глава 10); что многие свойства фундаментального решения линейного дифференциального оператора $P(D)$, такие как расположение волнового фронта и сингулярного носителя и др., зависят от поведения функции Хёрмандера $\tilde{P}(\xi)$, отвечающей оператору $P(D)$, а точнее, от поведения отношения $P(\xi+\eta)/\tilde{P}(\eta)$ при $|\eta|\to\infty$. Легко показать, что для гипоэллиптических операторов этот предел является многочленом нулевой степени, в отличие от негипоэллиптических операторов, для которых он может быть многочленом положительной степени. Такие многочлены называются локализациями оператора $P(D)$ (или многочлена $P(\xi)$) в бесконечности. В связи с этим естественно возникают задачи :

1) определения наибольшего порядка предельных многочленов (локализаций) для данного класса дифференциальных операторов,

2) описания множества локализаций для индивидуального оператора из данного класса.

Настоящая статья посвящена этим и другим смежным вопросам, представляющим, на наш взгляд, самостоятельный интерес также вне теории общих дифференциальных уравнений.

Перейдем к точной постановке задачи. Для этого приведем сначала ряд необходимых обозначений и определений.

Через $\mathbb{R}^n$ обозначим n-мерное вещественное евклидово пространство, через N_0^n - множество n-мерных мультииндексов $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ с целыми, неотрицательными компонентами. Для $\xi \in \mathbb{R}^n$ и $\alpha \in N_0^n$ положим

$$\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \cdots \xi_n^{\alpha_n}, \quad D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n}, \quad D_j = \frac{\partial}{\partial x_j} \quad (j = 1, \ldots, n).$$

Функция

$$\tilde{P}(\xi) = \left[\sum_{\nu \geq 0} |D^\nu P(\xi)|^2 \right]^{1/2}$$

называется функцией Хёрмандера оператора $P(D) = \sum_\alpha \gamma_\alpha \cdot D^\alpha$ (многочлена $P(\xi) = \sum_\alpha \gamma_\alpha \cdot \xi^\alpha$), где сумма берется по конечному набору мультииндексов $(P) = \{\alpha;\, \alpha \in N_0^n,\, \gamma_\alpha \neq 0\}$.

Определение 0.1 (см. [1], определение 10.2.6). Многочлен $Q(\xi) \neq$const называется локализацией на бесконечности оператора $P(D)$ (многочлена $P(\xi)$), если существует последовательность $\{\xi^s\}$, $\xi^s \in \mathbb{R}^n$, $|\xi^s| \to \infty$, такая, что для произвольной точки $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$\lim_{s \to \infty} \frac{P(\xi + \xi^s)}{\tilde{P}(\xi^s)} = Q(\xi).$$

Множество локализаций многочлена P будем обозначать через $L(P)$. Если $\theta \in \mathbb{R}^n \setminus O$, то множество таких предельных многочленов $\xi^s/|\xi|^s \to \theta/|\theta|^{-1}$ будем обозначать через $L_\theta(P)$.

В данной статье определяется наибольший порядок локализаций для определенного класса дифференциальных многочленов.

§1 посвящен обобщенно-однородным, а §2 – однородным гиперболич... многочленам. В §3 исследуется влияние носителя гипоэллиптичности на степень локализаций. В §4 изучены локализации общих многочленов.

§1. ЛОКАЛИЗАЦИИ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ ОБОБЩЕННО-ОДНОРОДНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

Определение 1.1. Многочлен $R(\xi) = R(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ называется обобщенно-однородным (λ-однородным) λ-порядка $d > 0$, если для всех $t > 0$ и $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$R(t^\lambda \cdot \xi) \equiv R(t^{\lambda_1} \cdot \xi_1, \cdots, t^{\lambda_n} \cdot \xi_n) = t^d \cdot R(\xi).$$

Очевидно, что любой λ-однородный многочлен R λ-порядка d может быть представлен в виде

$$R(\xi) = \sum_{(\lambda,\alpha)=d} r_\alpha \cdot \xi^\alpha, \quad (\lambda, \alpha) = \lambda_1\alpha_1 + \cdots \lambda_n\alpha_n.$$

С другой стороны, если $P(\xi) = \sum_\alpha \gamma_\alpha \cdot \xi^\alpha$ – произвольный многочлен и $\lambda \in \in \mathbb{R}^n$ – произвольный вектор, то $P(\xi)$ представим в виде суммы λ-однородных многочленов

$$P(\xi) = \sum_{j=0}^{M} P_j(\xi) = \sum_{j=0}^{M} \sum_{(\lambda,\alpha)=d_j} \gamma_\alpha \cdot \xi^\alpha,$$

где $d_o > d_1 > \cdots > d_M \geq 0$. Число $d_o = d_o(P) = d_o(P, \lambda)$ будем называть λ-порядком многочлена P и будем писать $\deg_\lambda P = d_o$. Ясно, что если P есть λ-однородный многочлен λ-порядка d_o, то $P(\xi) \equiv P_o(\xi)$, $P_j(\xi) \equiv 0$ $(j = 1, \ldots, M)$.

Если $\lambda \in \mathbb{R}^n$ - вектор с положительными компонентами, то через $|\xi|_\lambda$ будем обозначать λ-норму вектора $\xi \in \mathbb{R}^n$, определенную формулой

$$|\xi|_\lambda = \left[\sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^{2\lambda_j}\right]^{1/2}.$$

Определение 1.2. Пусть $\eta \in \mathbb{R}^n$, $|\eta| = 1$. Будем говорить, что многочлен $Q(\xi) \neq$const принадлежит множеству $L^\lambda_\eta(R)$, если существует последовательность $\{\xi^s\}$ такая, что при $s \to \infty$, $|\xi^s|_\lambda \to \infty$, $\xi^s/|\xi^s|_\lambda^{1/\lambda} \to \eta$ имеем

$$\lim_{s\to\infty} \frac{R(\xi + \xi^s)}{\tilde{R}(\xi^s)} = Q(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

В этом параграфе мы опишем множество $L_\eta^\lambda(R)$ для λ-однородного многочлена R и для фиксированной точки $\eta \in \mathbb{R}^n$. При $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 1$, как следствие полученного результата, найдем описание локализаций на бесконечности для однородного многочлена R, т. е. описание множеств $L_\eta(R)$ и $L(R)$.

Определение 1.3 (см. [2]). Многогранником Ньютона (или характеристическим многогранником) набора мультииндексов $\mathcal{G} = \{\alpha^1, \ldots, \alpha^N\}$ называется наименьший выпуклый многогранник $\mathcal{N} = \mathcal{N}(\mathcal{G})$, содержащий все точки $\mathcal{G}$.

Пусть $P(\xi) = \sum_\alpha \gamma_\alpha \cdot \xi^\alpha$ – многочлен с постоянными коэффициентами и $(P) = \{\alpha; \alpha \in N_0^n, \gamma_\alpha \neq 0\}$, тогда многогранник Ньютона набора $(P) \cup \{0\}$ называется характеристическим многогранником (х.м.) (или многогранником Ньютона) многочлена P.

Определение 1.4 (см. [2],[3]). Многогранник $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^n$ с вершинами из N_0^n называется *полным*, если начало координат является вершиной $\mathcal{N}$, и $\mathcal{N}$ имеет отличные от нее вершины на всех осях координат. $(n-1)$-мерная грань полного многогранника $\mathcal{N}$ называется *главной*, если она не содержится в какой-либо координатной гиперплоскости. Точка $\alpha \in \mathcal{N}$ называется *главной*, если она принадлежит хотя бы одной замкнутой $(n-1)$-мерной главной грани $\mathcal{N}$. Полный многогранник называется *правильным* (вполне правильным), если неотрицательны (положительны) все компоненты единичной внешней нормали к любой $(n-1)$-мерной главной грани.

Пусть $\mathcal{N}_i^k$ $(i = 1, \ldots, M_k^l, \quad k = 0, \ldots, n-1)$ — k-мерные грани $\mathcal{N}$. Грань $\mathcal{N}_i^k$ размерности $k \le n-1$ многогранника $\mathcal{N}$ называется *главной*, если все ее точки главные, или, что то же самое, если $\mathcal{N}_i^k$ подгрань некоторой $(n-1)$-мерной главной грани $\mathcal{N}$. Правильные и вполне правильные грани определяются аналогично.

Многочлен

$$P^{i,k}(\xi) = \sum_{\alpha\in\mathcal{N}_i^k} \gamma_\alpha \cdot \xi^\alpha$$

называется *подмногочленом* $P(\xi)$, отвечающем грани $\mathcal{N}_i^k$ многогранника $\mathcal{N} = \mathcal{N}(P)$. Положим $\mathring{\mathbb{R}}^n = \{\xi;\ \xi \in \mathbb{R}^n,\ \xi_1 \cdots \xi_n \neq 0\}$.

Определение 1.5 (см. [2]). Грань $\mathcal{N}_i^k$ полного х.м. $\mathcal{N}$ называется *регулярной*, если $P^{i,k}(\xi) \neq 0$ при $\xi \in \mathring{\mathbb{R}}^n$. Многочлен $P(\xi)$ называется *регулярным*, если регулярны все главные грани его х.м. $\mathcal{N}(P)$.

В [4] было доказано, что если λ-однородный многочлен $R(\xi) \neq 0$ при $\xi \neq 0$, то $R(\xi)$ регулярен. Для регулярных многочленов поставленные вопросы решаются просто : регулярный многочлен с вполне правильным х.м. $\mathcal{N}$ является гипоэллиптическим (см., напр., [5]). Поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать лишь λ-однородные многочлены $R(\xi)$, удовлетворяющие условию $\sum(R) = \{\eta;\ |\eta| = 1,\ R(\eta) = 0\} \neq \emptyset$.

Пусть R является λ-однородным многочленом и $\eta \in \sum(R) \neq \emptyset$. Обозначим

$$\mathcal{G}(\eta) = \mathcal{G}(\eta, R) = \{\nu;\ \nu \in N_0^n,\ D^\nu R(\eta) \neq 0\}$$

и положим

$$\Delta(\eta) = \Delta(\eta, R) = \min_{\nu\in\mathcal{G}(\eta)} (\lambda, \nu). \tag{1.1}$$

Основным результатом этого параграфа является

Теорема 1.1. *Пусть $\lambda \in \mathbb{R}^n$, $\lambda_j > 0$, $j = 1, \ldots, n$, $R(\xi)$ является λ-однородным многочленом λ-порядка d_0, $\eta \in \mathbb{R}^n$, $|\eta| = 1$, число $\Delta(\eta) = \Delta(\eta, R)$ определено формулой (1.1) и $Q \in L_\eta^\lambda(R)$. Тогда $\deg_\lambda Q \leq \Delta(\eta)$.*

Доказательство. Пусть $Q \in L_\eta^\lambda(R)$. По формуле Тейлора, при любом $s = 1, 2, \ldots$

$$R(\xi + \xi^s) = \sum_{\alpha\geq 0} \frac{\xi^\alpha}{\alpha!} D^\alpha R(\xi^s). \tag{1.2}$$

Поскольку многочлены $D^\alpha R$ λ-однородны и λ-порядка $d-(\lambda,\alpha)$, то при любом $s=1,2,\dots$

$$R(\xi+\xi^s)=\sum_{(\lambda,\alpha)<\Delta(\eta)}|\xi^s|_\lambda^{d-(\lambda,\alpha)}\cdot\frac{\xi^\alpha}{\alpha!}\cdot D^\alpha R(\eta^s)+|\xi^s|_\lambda^{d-\Delta(\eta)}\sum_{(\lambda,\alpha)=\Delta(\eta)}\frac{\xi^\alpha}{\alpha!}\cdot D^\alpha R(\eta^s)+$$

$$+\sum_{(\lambda,\alpha)>\Delta(\eta)}|\xi^s|_\lambda^{d-(\lambda,\alpha)}\cdot\frac{\xi^\alpha}{\alpha!}\cdot D^\alpha R(\eta^s). \tag{1.3}$$

Аналогично, для многочлена $\widetilde{R}^2(\xi)$ имеем

$$\widetilde{R}^2(\xi^s)=\sum_{(\lambda,\alpha)<\Delta(\eta)}|\xi^s|_\lambda^{2[d-(\lambda,\alpha)]}\cdot|D^\alpha R(\eta^s)|^2+|\xi^s|_\lambda^{2[d-\Delta(\eta)]}\sum_{(\lambda,\alpha)=\Delta(\eta)}|D^\alpha R(\eta^s)|^2+$$

$$+\sum_{(\lambda,\alpha)>\Delta(\eta)}|\xi^s|_\lambda^{2[d-(\lambda,\alpha)]}\cdot|D^\alpha R(\eta^s)|^2. \tag{1.4}$$

Так как $|\eta^s|_\lambda=1$ при всех $s=1,2,\dots$, то существует постоянная $C>0$ такая, что при любом $\alpha\in N_0^n$, $\alpha\geq 0$

$$|D^\alpha\cdot R(\eta^s)|\leq C,\quad s=1,2,\dots. \tag{1.5}$$

Тем самым, для любой точки $\xi\in\mathbb{R}^n$

$$\frac{\sum_{(\lambda,\alpha)>\Delta(\eta)}|\xi^s|_\lambda^{2[d-(\lambda,\alpha)]}\cdot|D^\alpha R(\eta^s)|^2}{|\xi^s|_\lambda^{2[d-\Delta(\eta)]}}\to 0 \tag{1.6}$$

при $s\to\infty$, и при $s\to\infty$ также

$$\frac{\sum_{(\lambda,\alpha)>\Delta(\eta)}|\xi^s|_\lambda^{d-(\lambda,\alpha)}\cdot\frac{\xi^\alpha}{\alpha!}\cdot D^\alpha R(\eta^s)}{|\xi^s|_\lambda^{d-\Delta(\eta)}}\to 0. \tag{1.7}$$

С другой стороны, при вычислении предела $\lim_{s\to\infty}\frac{R(\xi+\xi^s)}{\widetilde{R}(\xi^s)}$ функцию $\widetilde{R}(\xi)$ можно заменить функцией $\sum_\alpha|D^\alpha R(\xi)|$. Поэтому из представлений (1.3), (1.4) и соотношений (1.6), (1.7) получим

$$\frac{R(\xi+\xi^s)}{\widetilde{R}(\xi^s)}=$$

$$=\frac{\sum_{(\lambda,\alpha)<\Delta(\eta)}|\xi^s|_\lambda^{\Delta(\eta)-(\lambda,\alpha)}\cdot\frac{\xi^\alpha}{\alpha!}\cdot D^\alpha R(\eta^s)+\sum_{(\lambda,\alpha)=\Delta(\eta)}\frac{\xi^\alpha}{\alpha!}\cdot D^\alpha R(\eta^s)+o(1)}{A_s+\sum_{(\lambda,\alpha)=\Delta(\eta)}|D^\alpha R(\eta^s)|+o(1)}, \tag{1.8}$$

где

$$A_s = \sum_{(\lambda,\alpha)<\Delta(\eta)} |\xi^s|_\lambda^{\Delta(\eta)-(\lambda,\alpha)} \cdot |D^\alpha R(\eta^s)|. \tag{1.9}$$

Так как $\lim\limits_{s\to\infty} \frac{R(\xi+\xi^s)}{R(\xi^s)}$ существует для каждой точки $\xi \in \mathbb{R}^n$, то за счет выбора подпоследовательности возможны следующие два случая :

а) существует число $C > 0$ такое, что $A_s \le C$ при всех $s = 1, 2, \ldots$,

б) $A_s \to \infty$ при $s \to \infty$.

В случае а) без потери общности можем предположить, что $A_s \to A$. Тогда, ввиду того, что $Q \in L_\eta^\lambda(R)$, $A \ge 0$ и $\sum_{(\lambda,\alpha)=\Delta(\eta)} |D^\alpha R(\eta)| > 0$, для произвольной точки $\xi \in \mathbb{R}^n$ получаем

$$\lim_{s\to\infty} \frac{R(\xi+\xi^s)}{\tilde{R}(\xi^s)} = \frac{\sum_{(\lambda,\alpha)=\Delta(\eta)} \frac{\xi^\alpha}{\alpha!} \cdot D^\alpha R(\eta)}{A + \sum_{(\lambda,\alpha)=\Delta(\eta)} |D^\alpha R(\eta)|} + q(\xi) \equiv Q(\xi), \tag{1.10}$$

где

$$q(\xi) = \lim_{s\to\infty} \frac{\sum_{(\lambda,\alpha)=\Delta(\eta)} |\xi^s|_\lambda^{\Delta(\eta)-(\lambda,\alpha)} \frac{\xi^\alpha}{\alpha!} \cdot D^\alpha R(\eta^s)}{A_s + \sum_{(\lambda,\alpha)=\Delta(\eta)} |D^\alpha R(\eta^s)|}, \quad \deg_\lambda q \le \Delta(\eta), \tag{1.11}$$

т. е. $\deg_\lambda Q \le \Delta(\eta)$.

Рассмотрим случай б). Так как предел $\lim\limits_{s\to\infty} \frac{R(\xi+\xi^s)}{R(\xi^s)}$ существует, то рассуждая как в случае а) получим

$$\lim_{s\to\infty} \frac{R(\xi+\xi^s)}{\tilde{R}(\xi^s)} = q(\xi) \quad (\equiv Q(\xi)),$$

и $\deg_\lambda Q < \Delta(\eta)$. Теорема 1.1 доказана.

Приведем два следствия, первое из которых показывает, что в неравенстве $\deg_\lambda Q \le \Delta(\eta)$ равенство всегда достигается.

Следствие 1.1. Если многочлен $R(\xi)$ удовлетворяет условиям теоремы 1.1 и

$$Q(\xi) = \frac{1}{\sigma} \sum_{(\lambda,\alpha)=\Delta(\eta)} \frac{\Delta^\alpha R(\eta)}{\alpha!} \xi^\alpha,$$

$$\sigma = \sigma(\eta, R, \lambda) = \left[\sum_{(\lambda,\alpha)=\Delta(\eta)} |\Delta^\alpha R(\eta)|^2 \right]^{1/2}, \tag{1.12}$$

то $Q \in L_\eta(R)$.

Доказательство получается повторением рассуждений доказательства теоремы 1.1, если заменить последовательность $\{\xi^s\}$ на последовательность $\xi^s = s^\lambda \eta = (s^{\lambda_1}\eta_1, \ldots, s^{\lambda_n}\eta_n)$, $s = 1, 2, \ldots$, и заметить, что в этом случае $A_s = 0$ ($s = 1, 2, \ldots$), $q(\xi) \equiv 0$ (см. (1.11)).

Замечание 1.2. Пусть $R(\xi)$ - однородный многочлен и $\eta \in \mathbb{R}^n$, $|\eta| = 1$. Тогда множество $L_\eta(R)$ локализаций R состоит из многочленов вида

$$Q(\xi) = \frac{\theta}{\sigma} \sum_{|\alpha|=\Delta(\eta)} \frac{\Delta^\alpha R(\eta)}{\alpha!}\xi^\alpha + q(\xi),$$

где $\theta = 1$, либо $\theta = 0$, $\deg q < \Delta(\eta)$, а число σ определено формулой (1.12) при $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 1$.

§2. ОДНОРОДНЫЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ МНОГОЧЛЕНЫ

В этом параграфе мы изучим локализации двумерных, однородных, гиперболических в смысле Л. Гординга многочленов с характеристиками постоянной кратности.

Пусть $R(\xi) = R(\xi_1, \xi_2)$ - однородный многочлен порядка $d > 0$, гиперболический по Л. Гордингу (см. [6], или [1], определение 12.3.3). По теореме 12.4.3 работы [1], любой однородный, гиперболический многочлен имеет лишь вещественные корни и, следовательно, представим в виде

$$R(\xi) = \prod_{j=1}^{M} (\xi_1 - \tau_j \xi_2)^{l_j}, \quad l_1 + \cdots + l_M = d, \tag{2.1}$$

где τ_j - вещественные числа, $\tau_i \neq \tau_j$ при $i \neq j$ ($i, j = 1, \ldots, M$).

Теорема 2.1. *Пусть R – многочлен, представимый в виде (2.1) и $\theta^k \in \mathbb{R}^2$, $|\theta^k| = 1$, $\theta_1^k - \tau_k\theta_2^k = 0$ ($k = 1, \ldots, M$). Тогда, если*

$$Q_k(\xi) = \sum_{|\alpha|=l_k} q_\alpha^k \cdot \xi^\alpha, \tag{2.2}$$

где

$$q_\alpha^k = \frac{D^\alpha R(\theta^k)}{\alpha!\sqrt{\sum_{|\alpha|=l_k}|D^\alpha R(\theta^k)|^2}}, \quad k = 1,2,\ldots,M, \tag{2.3}$$

то $Q_k \in L(R)$ $(k = 1,\ldots,M)$.

Доказательство. Пусть $\xi^{s,k} = s\cdot\theta^k$ $(k = 1,\ldots,M;\ s = 1,2,\ldots)$. Тогда при $s\to\infty$ имеем $|\xi^{s,k}| = s\to\infty$, и по формуле Тейлора

$$R(\xi+\xi^{s,k}) = \sum_\alpha \frac{\xi^\alpha}{\alpha!}D^\alpha R(\xi^{s,k}) = \sum_\alpha \frac{\xi^\alpha}{\alpha!}s^{d-|\alpha|}\cdot D^\alpha R(\theta^k) =$$

$$= s^{d-l_k}\sum_{|\alpha|=l_k}\frac{\xi^\alpha}{\alpha!}\cdot D^\alpha R(\theta^k) + \sum_{|\alpha|>l_k}\frac{\xi^\alpha}{\alpha!}s^{d-|\alpha|}\cdot D^\alpha R(\theta^k). \tag{2.4}$$

При доказательстве последнего соотношения мы использовали то, что $D^\alpha R(\theta^k) = 0$ при $|\alpha| < l_k$, $k = 1,\ldots,M$. Аналогично, для многочлена $\tilde{R}^2(\xi)$ имеем

$$\tilde{R}^2(\xi^{s,k}) = s^{2(d-l_k)}\sum_{|\alpha|=l_k}|D^\alpha R(\theta^k)|^2 + \sum_{|\alpha|>l_k}s^{2(d-|\alpha|)}\cdot|D^\alpha R(\theta^k)|^2. \tag{2.5}$$

Так как $D^\alpha R(\theta^k)\neq 0$ при $|\alpha| = l_k$ и при $s\to\infty$

$$\frac{\sum_{|\alpha|>l_k}s^{2(d-|\alpha|)}\cdot|D^\alpha R(\theta^k)|^2}{s^{2(d-l_k)}}\to 0,$$

то из соотношений (2.4), (2.5) следует, что

$$\lim_{s\to\infty}\frac{R(\xi+\xi^{s,k})}{\tilde{R}(\xi^{s,k})} = Q_k(\xi), \quad k = 1,\ldots,M,$$

чем завершается доказательство теоремы 2.1.

Следующий простой пример показывает, что локализации однородных многочленов вообще говоря не являются однородными многочленами, они содержат ненулевые младшие члены.

Пример. Пусть $n = 2$ и d – натуральное число. Очевидно, что $R(\xi) = (\xi_1-\xi_2)^d$ есть гиперболический многочлен относительно любого вектора $N\in\mathbb{R}^2$, $N_1\neq N_2$, для которого $M = 1$, $\tau = 1$, $\theta = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ и $\Delta(\theta, R) = d$. Для любого $s = 1,2,\ldots$ положим $\xi^s = (\xi_1^s,\xi_2^s) = (s+a, s+b)$, где a,b $(a\neq b)$ – вещественные числа. Заметим, что функции $R(\xi+\xi^s)$, $\tilde{\tilde{R}}^2(\xi^s)$ не зависят от s и, поскольку $a \neq b$, то $R(\xi+\xi^s) = [(\xi_1-\xi_2)+(a-b)]^d$, $\tilde{\tilde{R}}(\xi^s) \neq 0$. Тем самым, предельный многочлен

$$Q(\xi) = \lim_{s\to\infty} \frac{R(\xi+\xi^s)}{\tilde{R}(\xi^s)}$$

содержит младшие члены порядка m при любом $0 \leq m \leq l$.

Остается заметить, что для этого многочлена существует локализация Q с максимальным порядком $\deg Q = d$. При этом, если брать $a = b$, то получим локализацию $Q(\xi) = \dfrac{R(\xi)}{d-d!}$.

§3. НОСИТЕЛЬ ГИПОЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ И ПОРЯДОК ЛОКАЛИЗАЦИЙ

В этом параграфе мы покажем, что, грубо говоря, чем шире носитель гипоэллиптичности данного дифференциального оператора, тем уже его множество локализаций. Следуя терминологии работы [7], приведем необходимые определения и обозначения. Пусть, как и выше, N_o^n – множество n-мерных мультииндексов. Для произвольного (в том числе и пустого) множества $e \subset \{1,\dots,n\}$ положим $N_{o,e}^n = \{\alpha;\ \alpha \in N_o^n,\ \alpha_j = 0,\ j \in e\}$.

Определение 3.1 (см. [7]). Носителем гипоэллиптичности $H = H(P)$ линейного, дифференциального оператора $P(D)$ с постоянными коэффициентами называется наибольшее из подмножеств $e \subset \{1,\dots,n\}$, удовлетворяющих условию

$$\frac{|D^\nu P(\xi)|}{|P(\xi)|} \to 0, \quad \text{при} \quad |\xi| \to \infty$$

для любых мультииндексов $0 \neq \nu \in N_{o,e}^n$.

Число $h = h(P)$ элементов множества H называется числом гипоэллиптичности оператора $P(D)$. При этом, если $H = \emptyset$, то полагаем $h(P) = 0$.

Из определения носителя гипоэллиптичности следует, что для гипоэллиптических операторов $H(P) = \{1,..,n\}$ ($h(P) = n$), в отличие от гиперболических в смысле Л. Гординга операторов, для которых $H(P) = \emptyset$ ($h(P) = 0$) (см. [8], теорему 2.1). Таким образом, в смысле носителя гипоэллиптичности, гиперболические по Л. Гордингу (и, тем самым, также по И. Г. Петровскому) операторы с постоянными коэффициентами и гипоэллиптические операторы занимают крайние позиции.

Следующий результат обобщает теорему 1.1 и уточняет максимальный порядок локализационного многочлена по отдельным переменным.

Теорема 3.1. *Пусть многочлен R и точка $\eta \in \mathbb{R}^n$ удовлетворяют условиям теоремы 1.1, $Q \in L_\eta(R)$, $Q(\xi) = \sum_\alpha q_\alpha \xi^\alpha$ и $(Q) = \{\alpha;\ \alpha \in N_0^n,\ q_\alpha \neq 0\}$. Далее, пусть $H = H(R)$ – носитель гипоэллиптичности многочлена R. Тогда $q_\alpha = 0$ при $\alpha \in (Q) \cap N_{0,H}^n$, или, что то же самое, $Q(\theta \cdot \xi) \equiv const$, где $\theta_j = 1$, при $j \in H$ и $\theta_j = 0$, при $j \in H$.*

Следствие 3.1. Пусть

$$\deg_j Q = \max_{\alpha \in (Q)} \alpha_j.$$

Предположим для простоты, что однородный многочлен R и многочлен Q удовлетворяют условиям теоремы 3.1. Тогда $\deg_j Q \leq \Delta(\eta) - 1$ для всех $j \in H(R)$.

Доказательство теоремы 3.1. В дальнейшем будем считать, что

$$\tilde{R}(\xi) = \sum_\alpha |D^\alpha R(\xi)|. \tag{3.1}$$

Пусть $\frac{R(\xi+\xi^s)}{R(\xi^s)} \to Q(\xi)$ при $\xi^s \to \infty$. Пользуясь соотношением (3.1) функции $R(\xi+\eta)$ и $\tilde{R}(\eta)$ можно представить в виде

$$R(\xi+\xi^s) = \sum_{\alpha \in N_{0,H}^n} \frac{\xi^\alpha}{\alpha!} D^\alpha R(\xi^s) + \sum_{\alpha \notin N_{0,H}^n} \frac{\xi^\alpha}{\alpha!} D^\alpha R(\xi^s), \tag{3.2}$$

$$\tilde{R}(\xi^s) = \sum_{\alpha \in N_{0,H}^n} |D^\alpha R(\xi^s)| + \sum_{\alpha \notin N_{0,H}^n} |D^\alpha R(\xi^s)|. \tag{3.3}$$

По определению множества $H(R)$, для любой точки $\xi \in \mathbb{R}^n$ при $s \to \infty$ имеем

$$\frac{\sum_{\alpha \in N_{0,H}^n} \frac{\xi^\alpha}{\alpha!} D^\alpha R(\xi^s)}{\tilde{R}(\xi^s)} \to 0 \quad \text{и} \quad \frac{\sum_{\alpha \in N_{0,H}^n} |D^\alpha R(\xi^s)|}{\tilde{R}(\xi^s)} \to 0,$$

что вместе с представлениями (3.2), (3.3) доказывает теорему.

Доказательство замечания 3.1 следует из теорем 1.1 и 3.1.

§4. ЛОКАЛИЗАЦИИ ОБЩИХ МНОГОЧЛЕНОВ

В этом параграфе изучены локализации в бесконечности общих многочленов с постоянными коэффициентами.

Введем сначала ряд обозначений. Полагая, что $\alpha \in N_o^n$, обозначим $V\alpha = \{\beta;\ \beta \in N_o^n,\ 0 \le \beta_i \le \alpha_i,\ i = 1, \dots, n\}$. Для набора мультииндексов $\mathcal{G} = \{\alpha^1, \dots, \alpha^N\}$ положим $V\mathcal{G} = \cup_{j=1}^N V\alpha^j$, а через $\widetilde{\mathcal{N}}(\mathcal{G}) = \mathcal{N}(V\mathcal{G})$ обозначим многогранник Ньютона набора $V\mathcal{G}$.

Очевидно, что : а) $\mathcal{N}(\mathcal{G}) \subset \widetilde{\mathcal{N}}(\mathcal{G})$; б) если $\mathcal{N}$ – правильный многогранник, то $\widetilde{\mathcal{N}} = N$; в) вполне правильные грани многогранников $\mathcal{N}$ и $\widetilde{\mathcal{N}}$ совпадают.

Для выпуклого многогранника $\mathcal{N}$ через $\mathcal{N}'$ обозначим многогранник Ньютона, натянутый на вполне правильные точки многогранника $\mathcal{N}$. В [3] доказано, что $\widetilde{\mathcal{N}'} \equiv \widetilde{\mathcal{N}}$.

Пусть теперь $P(\xi) = \sum_\alpha \gamma_\alpha \xi^\alpha$ – многочлен с постоянными коэффициентами, отвечающий линейному дифференциальному оператору $P(D) = \sum_\alpha \gamma_\alpha D^\alpha$, где сумма берется по конечному набору мультииндексов $(P) = \{\alpha;\ \alpha \in N_o^n,\ \gamma_\alpha \ne 0\}$. Положим

$$\mathcal{G} = \bigcup_{\nu \ge 0} (D^\nu P), \quad \widetilde{\mathcal{N}} = \widetilde{\mathcal{N}}(P) = \widetilde{\mathcal{N}}(\mathcal{G}), \tag{4.1}$$

$$D^\nu P(\xi) = \sum_\alpha \gamma_\alpha^\nu \xi^\alpha, \quad (D^\nu P) = \{\alpha,;\ \alpha \in N_o^n,\ \gamma_\alpha^\nu \ne 0\}. \tag{4.2}$$

Пусть $\widetilde{\mathcal{N}}_i^j$ – j-мерные правильные грани $\widetilde{\mathcal{N}}(P)$ и Λ_i^j – множество единичных внешних относительно $\widetilde{\mathcal{N}}$ нормалей ($\widetilde{\mathcal{N}}$-нормалей) граней $\mathcal{N}_i^j$ ($i = 0, 1, \dots, M_j$, $j = 0, 1, \dots, n-1$). Положим

$$\Lambda = \Lambda(P) = \bigcup_{j=0}^{n-1} \bigcup_{i=1}^{M_j} \Lambda_i^j.$$

Пусть $\mu \in \Lambda$, тогда $\mu \in \Lambda_i^j$ для некоторой (очевидно единственной) пары (i, j), $1 \le i \le M_j$, $0 \le j \le n-1$. Ясно, что существуют числа

$$d_o(\mu) > d_1(\mu) > \dots > d_M(\mu) \ge 0, \quad M = M(\mu)$$

такие, что многочлен $P(\xi)$ представим в виде суммы μ-однородных многочленов :

$$P(\xi)=\sum_{j=0}^{M}P_j(\xi)=\sum_{j=0}^{M}\sum_{(\mu,\alpha)=d_j}\gamma_\alpha\xi^\alpha. \qquad (4.3)$$

Для μ-однородного многочлена $P_o(\xi)$ и точки $\eta\in\mathbb{R}^n$, $|\eta|_\mu=1$, число $\Delta_o=$ $=\Delta_o(\eta,P_o,\mu)$ определим как в §1 :

$$\mathcal{G}(\eta)=\mathcal{G}(\eta,P_o)=\{\nu;\ \nu\in N_o^n,\ D^\nu P_o(\eta)\neq 0\},$$

$$\Delta_o=\Delta_o(\eta,P_o,\mu)=\min_{\nu\in\mathcal{G}(\eta)}(\mu,\nu).$$

Основным результатом параграфа является

Теорема 4.1. *Пусть $P(\xi)$ - многочлен n переменных с постоянными коэффициентами, $\eta\in\mathbb{R}^n$, $\mu\in\Lambda(P)$, $|\eta|_\mu=1$ и $Q\in L_\eta^\mu(P)$. Тогда $\deg_\mu Q\leq\Delta_o(\mu,\eta)$.*

Замечание 4.1. Пусть $Q\in L_\eta(P)$, т. е. Q - локализация на бесконечности многочлена P в точке $\eta\in\mathbb{R}^n$. Тогда $\deg Q\leq\Delta_o$, где число Δ_o соответствует единичному вектору $\mu=(\mu_1,\dots,\mu_n)$ с $\mu_1=\mu_2=\dots=\mu_n=n^{-1/2}$.

Доказательство теоремы 4.1. Пусть $\mu\in\Lambda(P)$, $\eta\in\mathbb{R}^n$, $|\eta|_\mu=1$, $\xi^s\to\infty$, $\eta^s=\dfrac{\xi^s}{|\xi^s|_\mu^{1/\mu}}\to\eta$ при $s\to\infty$, и при любом $\xi\in\mathbb{R}^n$

$$\lim_{s\to\infty}\frac{P(\xi+\xi^s)}{\tilde P(\xi^s)}=Q(\xi). \qquad (4.4)$$

Рассмотрим в отдельности поведение функций $\tilde P(\xi^s)$ и $P(\xi+\xi^s)$ при $s\to\infty$ и $\xi\in\mathbb{R}^n$. Из (4.3) следует, что

$$P(\xi+\xi^s)=\sum_{j=0}^{M}\sum_{(\mu,\alpha)<\Delta_o}|\xi^s|_\mu^{d_j-(\mu,\alpha)}\cdot\frac{\xi^\alpha}{\alpha!}\cdot D^\alpha P_j(\eta^s)+$$
$$+\sum_{j=0}^{M}|\xi^s|_\mu^{d_j-\Delta_o}\sum_{(\mu,\alpha)=\Delta_o}\frac{\xi^\alpha}{\alpha!}\cdot D^\alpha P_j(\eta^s)+$$
$$+\sum_{j=0}^{M}\sum_{(\mu,\alpha)>\Delta_o}|\xi^s|_\mu^{d_j-(\mu,\alpha)}\cdot\frac{\xi^\alpha}{\alpha!}\cdot D^\alpha P_j(\eta^s). \qquad (4.5)$$

Аналогично, для функции $\widetilde{P}$ имеем

$$\widetilde{P}(\xi^s)=\sum_{\alpha}\left|\sum_{j=0}^{M}D^\alpha P_j(\xi^s)\right|=\sum_{(\mu,\alpha)<\Delta_o}\left|\sum_{j=0}^{M}|\xi^s|_\mu^{d_j-(\mu,\alpha)}\cdot D^\alpha P_j(\eta^s)\right|+$$

$$+\sum_{(\mu,\alpha)=\Delta_o}\left|\sum_{j=0}^{M}|\xi^s|_\mu^{d_j-\Delta_o}D^\alpha P_j(\eta^s)\right|+\sum_{(\mu,\alpha)>\Delta_o}\left|\sum_{j=0}^{M}|\xi^s|_\mu^{d_j-(\mu,\alpha)}\cdot D^\alpha P_j(\eta^s)\right|. \quad (4.6)$$

Теперь в отдельности рассмотрим поведение слагаемых в (4.5) и (4.6) при $s\to\infty$.

$$A_1^s\equiv\frac{\sum_{(\mu,\alpha)<\Delta_o}\left|\sum_{j=0}^{M}D^\alpha P_j(\xi^s)\right|}{|\xi^s|_\mu^{d_o-\Delta_o}}=\sum_{(\mu,\alpha)<\Delta_o}\left|\sum_{j=0}^{M}|\xi^s|_\mu^{(d_j-d_o)+(\Delta_j-(\mu,\alpha))}D^\alpha P_j(\eta^s)\right|, \quad (4.7)$$

$$A_2^s\equiv\frac{\sum_{(\mu,\alpha)=\Delta_o}\left|\sum_{j=0}^{M}D^\alpha P_j(\xi^s)\right|}{|\xi^s|_\mu^{d_o-\Delta_o}}=\sum_{(\mu,\alpha)=\Delta_o}\left|\sum_{j=0}^{M}|\xi^s|_\mu^{d_j-d_o}D^\alpha P_j(\eta^s)\right|, \quad (4.8)$$

$$A_3^s\equiv\frac{\sum_{(\mu,\alpha)>\Delta_o}\left|\sum_{j=0}^{M}D^\alpha P_j(\xi^s)\right|}{|\xi^s|_\mu^{d_o-\Delta_o}}=\sum_{(\mu,\alpha)>\Delta_o}\left|\sum_{j=0}^{M}|\xi^s|_\mu^{(d_j-d_o)-[(\mu,\alpha)-\Delta_o]}D^\alpha P_j(\eta^s)\right|. \quad (4.9)$$

Очевидно, что при $s\to\infty$

$$A_3^s\to 0. \quad (4.10)$$

Так как $D^\alpha P_o(\eta)\neq 0$ для некоторого $\alpha\in N_o^n$, $(\mu,\alpha)=\Delta_o$ и $d_j<d_o$ при всех $j=1,\ldots,M$, то

$$A_2^s\to A_2>0. \quad (4.11)$$

Возможны следующие два случая :

а) существует число $\varepsilon\geq 0$ такое, что $A_1^s\leq\varepsilon$ $(s=1,2,\ldots)$;

б) $A_1^s\to\infty$ при $s\to\infty$.

В случае а) из последовательности $\{A_1^s\}$ выберем сходящуюся подпоследовательность (которую снова обозначим через $\{A_1^s\}$) такую, что $A_1^s\to A_1$. Тогда из (4.6) - (4.11) следует, что

$$\lim_{s\to\infty}\frac{\widetilde{P}(\xi^s)}{|\xi^s|_\mu^{d_o-\Delta_o}}=A_1+A_2=A>0. \quad (4.12)$$

Аналогично, для функции $P(\xi+\xi^s)$ и произвольной точки $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$B_1^s(\xi) \equiv \frac{\sum_{j=0}^M \sum_{(\mu,\alpha)<\Delta_o} \frac{\xi^\alpha}{\alpha!} D^\alpha P_j(\xi^s)}{|\xi^s|_\mu^{d_o-\Delta_o}} =$$

$$= \sum_{j=0}^{M} \sum_{(\mu,\alpha)<\Delta_o} |\xi^s|_\mu^{(d_j-d_o)+(\Delta_o-(\mu,\alpha))} \frac{\xi^\alpha}{\alpha!} D^\alpha P_j(\eta^s), \tag{4.13}$$

$$\lim_{s\to\infty} B_2^s(\xi) \equiv \lim_{s\to\infty} \frac{\sum_{j=0}^M \sum_{(\mu,\alpha)=\Delta_o} \frac{\xi^\alpha}{\alpha!} D^\alpha P_j(\xi^s)}{|\xi^s|_\mu^{d_o-\Delta_o}} = \sum_{(\mu,\alpha)=\Delta_o} \frac{\xi^\alpha}{\alpha!} D^\alpha P_o(\eta), \tag{4.14}$$

$$\lim_{s\to\infty} B_3^s(\xi) \equiv \lim_{s\to\infty} \frac{\sum_{j=0}^M \sum_{(\mu,\alpha)>\Delta_o} \frac{\xi^\alpha}{\alpha!} D^\alpha P_j(\xi^s)}{|\xi^s|^{d_o-\Delta_o}} = 0. \tag{4.15}$$

Из соотношений (4.12) – (4.15) следует, что

$$\lim_{s\to\infty} \frac{B_2^s(\xi)+B_3^s(\xi)}{\tilde{P}(\xi^s)|\xi^s|^{d_o-\Delta_o}} = \frac{1}{A} \sum_{(\mu,\alpha)=\Delta_o} \frac{\xi^\alpha}{\alpha!} D^\alpha P_o(\eta). \tag{4.16}$$

Поскольку по условию теоремы при $s \to \infty$ существует предел $\frac{P(\xi+\xi^s)}{\tilde{P}(\xi^s)}$, то существует также

$$\lim_{s\to\infty} \frac{B_1^s(\xi)}{\tilde{P}(\xi^s)|\xi^s|_\mu^{d_o-\Delta_o}} = q(\xi),$$

причем, очевидно, $\deg_\mu q < \Delta_o$. Сопоставляя последнее с (4.16), получим

$$\lim_{s\to\infty} \frac{P(\xi+\xi^s)}{\tilde{P}(\xi^s)} = q(\xi) + \frac{1}{A} \sum_{(\mu,\alpha)=\Delta_o} \frac{\xi^\alpha}{\alpha!} D^\alpha P_o(\eta) \equiv Q(\xi)$$

и $\deg_\mu Q \le \Delta_o(\eta)$.

Перейдя к рассмотрению случая б), заметим, что

$$\lim_{s\to\infty} \frac{B_2^s(\xi)+B_3^s(\xi)}{A_1^s} = 0, \qquad \lim_{s\to\infty} \frac{A_2^s+A_3^s}{A_1^s} = 0$$

и существует

$$\lim_{s\to\infty} \frac{A_1^s(\xi)}{A_1^s} = \lim_{s\to\infty} \frac{P(\xi+\xi^s)}{\tilde{P}(\xi^s)} = q(\xi) \equiv Q(\xi),$$

причем, очевидно, $\deg_\mu Q < \Delta_o$. Теорема 4.1 доказана.

ABSTRACT. The paper studies the localizations of nonhypoelliptic operators, mainly the behavior of the ratio $P(\xi+\eta)/\tilde{P}(\eta)$ as $|\eta| \to \infty$, where

$P(\xi)$ is the symbol of linear differential operator $P(D)$, $\widetilde{P}(\xi)$ is the corresponding Hörmander function. For a class of operators we determine the localization degree as well as the set of localizations.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Хёрмандер, Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными ; Дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами, т. 2, Москва, Мир, 1986.
2. В. П. Михайлов, "О поведении в бесконечности одного класса многочленов", Труды МИАН СССР, т. 91, стр. 59 – 81, 1967.
3. Г. Г. Казарян, "О сравнении дифференциальных операторов и дифференциальных операторов постоянной силы", Труды МИАН СССР, т. 131, стр. 94 – 118, 1974.
4. Г. Г. Казарян, "О нулях многочленов многих переменных", Диф. уравнения, т. 10, №4, стр. 712 – 720, 1974.
5. Г. Г. Казарян, "Оценки дифференциальных операторов и гипоэллиптические операторы", Труды МИАН СССР, т. 140, стр. 130 – 161, 1976.
6. L. Gårding, "Linear hyperbolic partial differential equations with constant coefficients", Acta Math., vol. 85, no. 1 - 2, pp. 1 – 62, 1951.
7. Г. Г. Казарян, "Об одной числовой характеристике линейных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами", ДАН СССР, т. 285, №5, стр. 1068 – 1072, 1985.
8. Г. Г. Казарян, В. Н. Маркарян, "Носитель гипоэллиптичности линейных дифференциальных операторов", Известия АН Армянской ССР, Математика, т. 21, №5, стр. 453 – 470, 1986.

2 февраля 1994 Ереванский государственный университет