О ЗАДАЧЕ ГИЛЬБЕРТА В СМЫСЛЕ L^p-СХОДИМОСТИ

Г. М. Айрапетян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
том 29, №3, 1994

В статье исследована задача типа Гилберта для аналитических функций в случае, когда граничные значения принадлежат классу L^p и граничное условие понимается в смысле L^p-сходимости. Получено необходимое и достаточное условие для нормальной разрешимости и нётеровости рассмотренной задачи.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $D^+ = \{z : |z| < 1\}$ – единичный круг в комплексной плоскости, $D^- = \{z : |z| > 1\}$, а $T = \{z : |z| = 1\}$ – единичная окружность. Обозначим через $A(T)$ класс аналитических в $D^+ \cup D^-$ функций, имеющих конечный порядок в бесконечности, а через $A_0(T)$ – подмножество функций из $A(T)$, обращающихся в нуль в бесконечности.

Рассмотрим задачу Гильберта в следующей постановке : найти функцию $\Phi(z) \in A(t)$, удовлетворяющую условию

$$\lim_{r \to 1-0} ||\Phi^+(rt) - a(t)\Phi^-(r^{-1}t) - f(t)||_p = 0, \quad p \geq 1, \tag{1}$$

где $f(t) \in L^p(T)$, $\Phi^\pm$ – сужения функции $\Phi(z)$ в $D^\pm$ соответственно, а $a(t)$ – функция, кусочно-непрерывная в смысле Гёльдера па T.

В точках разрыва $t_1, t_2, ..., t_n$ функции $a(t)$ положим

$$\alpha_k + i\beta_k = \frac{1}{2\pi i}[\ln a(t_k - 0) - \ln a(t_k + 0)],$$

где $\ln a(t)$ – любая фиксированная ветвь логарифма, непрерывно меняющаяся на каждой дуге $t_k t_{k+1}$ окружности T (при этом, полагаем, что $t_{n+1} = t_1$). Далее, через $T(p)$ обозначим множество $T(p) = \{t_k : (1 - \{\alpha_k\})p = 1\}$, где $\{\alpha\}$ – дробная часть α.

Будем говорить, что задача (1) нормально разрешима, если для любой функции $f(t) \in L^p(T)$ она разрешима в $A(T)$. Задачу (1) будем называть нётеровой, если соответствующая однородная задача ($f(t) \equiv 0$) имеет конечное число линейно-независимых решений в $A_0(T)$, а для разрешимости в $A_0(T)$ неоднородной задачи необходимо и достаточно выполнение конечного числа условий ортогональности $l_k(f) = 0$, $k = 1, ..., N$, где $l_k(\cdot)$ – линейно-независимые функционалы в $L^p(T)$.

В работе [1] было доказано, что при $p = 1$ задача (1) нормально разрешима и нётеорва при любой кусочно-непрерывной в смысле Гёльдера функции $a(t)$. В настоящей работе установлено, что при $p > 1$ нётровость и нормальная разрешимость задачи (1) зависят от свойств функции $a(t)$. А именно, доказано, что для нётровости и нормальной разрешимости задачи (1) необходимо и достаточно выполнение условия

$$T(p) = \emptyset. \tag{2}$$

Основные результаты данной работы анонсированы в [2].

§2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЛЕММЫ

Ниже нам понадобятся следующие вспомогательные результаты.

Лемма 1. *Пусть $t_o \in T$. Тогда существует функция $f(t) \in L^p(T)$ такая, что*

$$\overline{\lim_{r\to 1-0}} \left| \int_T \frac{(\tau - t_o)^{1/p}}{\tau - rt_o} f(\tau)\, d\tau \right| = \infty. \tag{3}$$

Доказательство. Обозначим через B следующий линейный оператор :

$$(Bf)(r) = \int_T \frac{(\tau - t_o)^{1/p}}{\tau - rt_o} f(\tau)\, d\tau, \quad 0 \le r < 1, \quad f(t) \in L^p(T).$$

Если для любой функции $f(t) \in L^p(T)$ соотношение (3) не выполнено, то по теореме о замкнутом графике B - ограниченный оператор из $L^p(T)$ в $L^\infty([0,1])$. Тем самым, существует число $C > 0$ такое, что

$$\left|\int_T \frac{(\tau - t_o)^{1/p}}{\tau - rt_o} f(\tau)\, d\tau\right| < C$$

при любом $0 \le r < 1$ и $||f||_p \le 1$. Из этого неравенства следует, что

$$\left\|\frac{(\tau - t_o)^{1/p}}{\tau - rt_o}\right\|_q = \sup_{||f||_p \le 1} \left|\int_T \frac{(\tau - t_o)^{1/p}}{\tau - rt_o} f(\tau)\, d\tau\right| < C$$

при любом r, $0 \le r < 1$. Отсюда приходим к противоречию, поскольку

$$\lim_{r \to 1-0} \left\|\frac{(\tau - t_o)^{1/p}}{\tau - rt_o}\right\|_q = \infty.$$

Лемма 2. *Пусть $\tau_o \in T$, $f(t) \in L^p(T)$, и*

$$(A_r f)(t) = \frac{1}{(\tau_o - rt)^\alpha} \int_T f(\tau)(\tau_o - \tau)^\alpha P_r(t,\tau)\, d\tau, \quad 0 < \alpha < 1,$$

где $P_r(t,\tau) = (1 - r^2)|\tau - rt|^{-2}$. Тогда существует не зависящая от r постоянная C такая, что

$$||A_r f||_p \le C||f||_p.$$

Доказательство. Пусть $p = 1$. Воспользовавшись неравенством $\big||\tau_o - \tau|^\alpha - |\tau - rt|^\alpha\big| < \text{const}\ |\tau - rt|^\alpha$, получим

$$(A_r f)(t) \le \frac{1}{|\tau_o - rt|^\alpha} \int_T |f(\tau)| \frac{1 - r^2}{|\tau - rt|^{2-\alpha}}\, |d\tau| + \int_T |f(\tau)|\, P_r(t,\tau)\, |d\tau|.$$

Так как

$$\frac{1 - r^2}{|\tau_o - rt|^\alpha |\tau - rt|^{2-\alpha}} \le \frac{1 - r^2}{|\tau_o - rt|^2} + \frac{1 - r^2}{|\tau - rt|^2}$$

и

$$\frac{1}{2\pi} \int_T \frac{1 - r^2}{|\tau - rt|^2}\, |dt| = 1,$$

получаем $||A_r f||_1 \le ||f||_1$. Аналогичным рассуждением получаем, что $||A_r f||_\infty \le \le ||f||_\infty$, $f \in L^\infty(T)$. Таким образом, утверждение леммы доказано в случаях $p = 1$ и $p = \infty$. Применением интерполяционной теоремы Рисса-Торина завершаем доказатеьство.

Лемма 3. *Пусть $t_o \in T$. Тогда существует функция $f(t) \in L^p(T)$ такая, что при любом $\varepsilon > 0$*

$$\overline{\lim_{r\to 1-0}} \int_{\Delta(t_o,\varepsilon,r)} \left| \frac{1}{|rt - t_o|^{1/p}} \int_T \frac{(\tau - t_o)^{1/p}}{\tau - rt} f(\tau)\, d\tau \right|^p |dt| = \infty,$$

где $\Delta(t_o, \varepsilon, r) = \{t : \ t \in T, \ |t - t_o| \leq \varepsilon(1 - r)\}$.

Доказательство. В силу леммы 1 существует функция $f(t) \in L^p(T)$ такая, что для некоторой последовательности $\{r_k\}$, $r_k \to 1 - 0$

$$\lim_{r_k \to 1-0} \left| \int_T \frac{(\tau - t_o)^{1/p}}{\tau - r_k t_o} f(\tau)\, d\tau \right| = \infty. \tag{4}$$

Положим $U(\varepsilon) = \{z : \ |z - t_o| < \varepsilon(1 - |z|)\}$. Тогда, если $r_k t \in U(\varepsilon)$, $t \in T$, то $|t - t_o| \leq 2|r_k t - t_o|$, и поэтому

$$\left| \frac{1}{\tau - r_k t_o} - \frac{1}{\tau - r_k t} \right| < C P_{r_k}(t_o, \tau),$$

где C – постоянная, не зависящая от r, а $P_{r_k}(t_o, \tau) = (1 - |r_k|^2)|\tau - r_k t_o|^{-2}$ – ядро Пуассона. Применяя эту оценку для $r_k t \in U(\varepsilon)$, $t \in T$, получим

$$\left| \int_T \frac{(\tau - t_o)^{1/p}}{\tau - r_k t_o} f(\tau)\, d\tau - \int_T \frac{(\tau - t_o)^{1/p}}{\tau - r_k t} f(\tau)\, d\tau \right| \leq$$
$$\leq \text{const} \left| \int_T (\tau - t_o)^{1/p} f(\tau) P_{r_k}(t_o, \tau)\, |d\tau| \right|.$$

Теперь оценим последнее выражение с помощью максимальной функции Харди–Литтлвуда (см. [3])

$$M(f; t) = \sup_I \frac{1}{|I|} \int_I |f(\tau)|\, |d\tau|,$$

где максимум взят по всем интервалам $I \in T$ с центром в точке t. Имеем

$$\left| \int_T (\tau - t_o)^{1/p} f(\tau) P_{r_k}(t_o, \tau)\, |d\tau| \right| < \text{ const } M((\tau - t_o)^{1/p} f(\tau); t_o).$$

Легко проверить, что $M((\tau - t_o)^{1/p} f(\tau); t_o) < \infty$. Следовательно, при $r_k t \in U(\varepsilon)$

$$\left| \int_T \frac{(\tau - t_o)^{1/p}}{\tau - r_k t_o} f(\tau)\, d\tau - \int_T \frac{(\tau - t_o)^{1/p}}{\tau - r_k t} f(\tau)\, d\tau \right| < C, \tag{5}$$

где C – постоянная, не зависящая от k. Далее

$$\int_{\Delta(t_o,\varepsilon,r)} \left| \frac{1}{|rt-t_o|^{1/p}} \int_T \frac{(\tau-t_o)^{1/p}}{\tau - r_k t} f(\tau)\, d\tau \right|^p |dt| =$$

$$= \int_{\Delta(t_o,\varepsilon,r)} \frac{1}{|rt-t_o|} \left| \int_T \frac{(\tau-t_o)^{1/p}}{\tau - r_k t_o} f(\tau)\, d\tau - \right.$$

$$\left. - \int_T \left[\frac{(\tau-t_o)^{1/p}}{\tau - r_k t_o} - \frac{(\tau-t_o)^{1/p}}{\tau - r_k t} \right] f(\tau)\, d\tau \right|^p |dt|. \qquad (6)$$

Поскольку

$$\int_{\Delta(t_o,\varepsilon,r)} \frac{dt}{|rt-t_o|} > c_1 > 0,$$

где c_1 – постоянная, зависящая лишь от ε, то в силу (5) будем иметь

$$\int_{\Delta(t_o,\varepsilon,r)} \frac{1}{|r_k t-t_o|} \left| \int_T \left[\frac{(\tau-t_o)^{1/p}}{\tau - r_k t_o} - \frac{(\tau-t_o)^{1/p}}{\tau - r_k t} \right] f(\tau)\, d\tau \right|^p |dt| < \text{const}.$$

Учитывая теперь (4) и переходя в (6) к пределу $r_k \to 1-0$, завершаем доказательство.

§3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Положим

$$S(z) = \exp\left[\frac{1}{2\pi i}\int_T \frac{\ln a(t)}{t-z}\, dt\right], \quad z \in D^+ \cup D^-,$$

$$S_p(z) = S(z)\prod_{k=1}^{n} (z-t_k)^{\lambda_k}, \quad z \in D^+ \cup D^-,$$

где целые числа λ_k определены следующим образом : $-1 < \lambda_k + \alpha_k \leq 0$, если $(1-\{\alpha_k\})p \leq 1$ и $0 < \lambda_k + \alpha_k < 1$, если $(1-\{\alpha_k\})p > 1$.

Теорема 1. *Пусть $p > 1$ – произвольное число. Для того, чтобы задача (1) была нормально разрешима необходимо и достаточно выполнение условия (2).*

Доказательство. Если функция $\Phi(z) \in A(T)$ удовлетворяет условию (1), то она представима в виде (см. [4])

$$\Phi(z) = \frac{S_p(z)}{2\pi i}\int_T \frac{f(\tau)}{S_p^+(\tau)}\frac{d\tau}{\tau - z} + S_p(z)P(z), \quad z \in D^+ \cup D^-, \qquad (7)$$

где $P(z)$ – некоторый полином, $S_p^+(z)$ – сужение функции $S_p(z)$ на D^+, а $S_p^+(t)$ – ее граничные значения на T. Если $T(p) = \emptyset$, то при любом $f(t) \in L^p(T)$ функция $\Phi(z)$, определенная формулой (7), удовлетворяет условию (1). Тем самым, при $T(p) = \emptyset$ задача (1) нормальна разрешима.

Для завершения доказательства остается показать, что если $T(p) \neq \emptyset$, то задача (1) не является нормально разрешимой. С этой целью предположим, что $t_{k_o} \in T(p)$ - некоторая точка и заметим, что в силу леммы 3 функцию $f_0(t) \in L^p(T)$ можно выбрать так, чтобы имело место соотношение

$$\overline{\lim_{r \to 1-0}} \int_{\Delta(t_{k_o}, \varepsilon, r)} \left| \frac{1}{|rt - t_{k_o}|^{1/p}} \int_T \frac{(\tau - t_o)^{1/p}}{\tau - rt} f_0(\tau)\, d\tau \right|^p |dt| = \infty, \quad \varepsilon > 0. \quad (8)$$

Предположим задача (1) имеет решение в $A(T)$. Тогда, в силу (7) это решение предствимо в виде

$$\Phi_0(z) = \frac{S_p(z)}{2\pi i} \int_T \frac{f_0(\tau)}{S_p^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - z} + S_p(z) P(z).$$

Далее, имеем $\Phi_0^+(rt) - a(t)\Phi_0^-(r^{-1}t) = J_1(r,t) + J_2(r,t)$, где

$$J_1(r,t) = \frac{S_p^+(rt) - a(t) S_p^-(r^{-1}t)}{2\pi i} \int_T \frac{f_0(\tau)}{S_p^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - r^{-1}t},$$

$$J_2(r,t) = \frac{S_p^+(rt)}{2\pi i} \int_T P_r(t,\tau) \frac{f_0(\tau)}{S_p^+(\tau)}\, d\tau,$$

а $S_p^-(z)$ – сужение функции $S_p(z)$ на D^-. Выберем числа δ_0, c_0 таким образом, чтобы из включений $t_{k_o} \in T(p)$ и $t \in \Delta(t_{k_o}, \delta_0, r)$ следовала оценка (см. [4]) $|S_p^+(rt) - a(t) S_p^-(r^{-1}t)| > c_0 |S_p^+(rt)|, \quad t \neq t_{k_o}$. Так как $S_p^+(rt) \approx |t_{k_o} - rt|^{-1/p}$ в достаточно малой окрестности точки t_{k_o}, то

$$\int_T |J_1(r,t)|^p\, |dt| \geq \int_{\Delta(t_{k_o}, \varepsilon, r)} \left| \frac{1}{|rt - t_{k_o}|^{1/p}} \int_T \frac{(\tau - t_{k_o})^{1/p}}{\tau - rt} f_0(\tau)\, d\tau \right|^p |dt|,$$

и, в силу (8), будем иметь $\overline{\lim}_{r \to 1-0} ||J_1(r,t)||^p = \infty$. Учитывая, что согласно лемме 2, $||J_2(r,t)||_p \leq \text{const}\, ||f||_p$, завершаем доказательство теоремы.

Замечание. Если функция $f(t)$ принадлежит классу Гёльдера, то задача (1) разрешима в классе $A(T)$.

Доказательство. В (7) полином $P(z)$ монжо выбрать так, чтобы

$$P(t_k) = \frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{f(\tau)}{S_p^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - t_k}, \quad t_k \in T(p).$$

Тогда для некоторого $p' > p$ будем иметь $||\Phi^+(rt) - a(t)\Phi^-(r^{-1}t)||_{p'} <$ const. Учитывая равенство $\lim_{r\to 1-0}[\Phi^+(rt) - a(t)\Phi^-(r^{-1}t)] = f(t)$, получим

$$\lim_{r\to 1-0} ||\Phi^+(rt) - a(t)\Phi^-(r^{-1}t) - f(t)||_p = 0$$

Теорема 2. *Условие (2) необходимо и достаточно для нётеровости задачи (1).*

Доказательство. Пусть $T(p) = \emptyset$. Тогда общее решение задачи (1) представимо в виде (7), где $P(z)$ - произвольный полином. Отсюда следует нётеровость задачи (1).

Рассмотрим теперь случай $T(p) \neq \emptyset$. Предположим, что задача (1) нётерова. В силу теоремы Рисса

$$l_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_T \overline{\varphi_k(t)}\, f(t)\, dt = 0, \quad k = 1, ..., N,$$

где $\varphi_k(t)$, $k = 1, ..., N$ - линейно-независимые функции из $L^q(T)$, $q = p(p-1)^{-1}$. Применяя теорему Хана-Банаха заключаем, что существуют функции $f_k(t) \in$ $\in L^p(T)$, $k = 1, ..., N$ такие, что

$$\frac{1}{2\pi} \int_T \overline{\varphi_j(t)}\, f_k(t)\, dt = \begin{cases} 1, & j = k, \\ 0, & j \neq k. \end{cases}$$

Пусть $M_k = \sup |l_k(f)|$, $||f||_p = 1$, $M = \sup M_k$, $k = 1, ..., N$. Выберем функции $\tilde{f}_k(t)$ класса Гёльдера так, чтобы имели место неравенства

$$\frac{1}{2\pi} \int_T \left| f_k(t) - \tilde{f}_k(t) \right|^p |dt| < \frac{\varepsilon}{M}, \quad k = 1, ..., N.$$

Тогда с применением функционалов l_k получаем, что

$$\left|l_k(\tilde{f}_k)\right| > |l_k(f_k)| - \left|l_k(\tilde{f}_k - f_k)\right| > 1 - \varepsilon,$$

$$\left|l_k(\tilde{f}_j)\right| < \left|l_k(\tilde{f}_j - f_j)\right| < \varepsilon.$$

Пусть теперь $f_0(t) \in L^p(T)$ - функция, для которой, согласно теореме 1, задача (1) не имеет решения в $A(T)$. Если $\varepsilon > 0$ - достаточно мало, то комплексные числа A_k, $k = 1, ..., N$ можно выбрать так, чтобы были справедливы равенства

$$\sum_{j=1}^{N} A_k l_k(\tilde{f}_j) = l_k(f_0), \quad k = 1, ..., N.$$

Положим

$$\tilde{f}_0(t) = f_0(t) - \sum_{k=1}^{N} A_k \tilde{f}_k(t).$$

Тогда $l_k(\tilde{f}_0) = 0$, $k = 1, ..., N$. Поэтому для функции $\tilde{f}_0(t)$ задача (1) разрешима в классе $A_0(T)$. Так как, в силу замечания к теореме 1, задача (1) разрешима в $A(T)$ для функции

$$f(t) = \sum_{k=1}^{N} A_k \tilde{f}_k(t),$$

то она разрешима в $A(T)$ и для функции $f_0(t)$. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

ABSTRACT. The paper investigates a version of Hilbert problem in a class of analytic functions. The continuity on the boundary is in the sence of L^p-convergence. A necessary and sufficient condition for normal solvability and Noetherness of this problem is obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. М. Айрапетян, "Разрывная задача Римана–Привалова со смещением в классе L^1", Изв. АН Армении, Математика, т. 25, №1, стр. 3 – 20, 1990.
2. Г. М. Айрапетян, "О задаче Гильберта в смысле L^p ($p > 1$)-сходимости", ДАН РАН, т. 328, №5, стр. 421 - 423, 1993.
3. И. Стейн, Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций, Мир, Москва, 1993.
4. Г. М. Айрапетян, "Об одной задаче сопряжения со сдвигом в классах L^p", Изв. АН Армении. Математика, т. 25, №4, стр. 394 – 400, 1990.

14 июня 1994

Государственный инженерный университет Армении