ЗАКОНЫ ПОВТОРНОГО ЛОГАРИФМА ДЛЯ ОПЦИОНАЛЬНЫХ МАРТИНГАЛОВ

К. В. Гаспарян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 29, № 3, 1994

В статье дана характеристика множества сходимости для опциональных локальных мартингалов в (строго) предсказуемых терминах, что является распространением на опциональный случай результатов, полученных ранее Ю. М. Кабановым, Р. Ш. Липцером и А. Н. Ширяевым в [8] для càdlàg мартингалов. Получены законы повторного логарифма для локальных и локально квадратично-интегрируемых опциональных мартингалов. Доказательства проведены по известной схеме Д. Лепингля [9], с использованием вспомогательных экспоненциальных супермартингалов и соответствующей модификации леммы Бореля–Кантелли.

§0. ВВЕДЕНИЕ

Данная статья продолжает начатое в работах [1, 2] исследование асимптотических свойств так называемых опциональных мартингалов. Исследуются в основном множества сходимости и законы повторного логарифма. При этом, не предполагаются выполненными "обычные" условия о непрерывности справа и P-полноте фильтрации $F = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ стохастического базиса $(\Omega, \mathcal{F}, F = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$. Предполагается, что траектории опциональных мартингалов при любом $t > 0$ имеют оба односторонних предела (см. [3]) (процессы из пространства làglàd), в отличие от рассматриваемых обычно càdlàg–мартингалов, траектории которых при любом $t > 0$ непрерывны справа и имеют пределы слева. Отметим, что основы теории опциональных мартингалов были заложены Л. И. Гальчуком в работах [4 – 7].

Статья состоит из трех параграфов, из которых §1 содержит необходимые обозначения и общие понятия. Второй параграф содержит характеризацию множеств сходимости для опциональных и локально квадратично-интегрируемых, опциональных мартингалов. Условия сходимости даны в терминах строгой предсказуемости, посредством компенсатора некоторого вспомогательного, возрастающего процесса D_t (см. (1.4)) для опциональных, локальных мартингалов (теорема 2.1), или посредством квадратичной характеристики для опциональных, локалально квадратично-интегрируемых мартингалов (теорема 2.2). Эти результаты являются распространениями на опциональный случай результатов, полученных ранее Ю. М. Кабановым, Р. Ш. Липцером и А. Н. Ширяевым [8] для càdlàg мартингалов. Третий параграф основан на результатах §2. Здесь доказаны законы повторного логарифма для опциональных мартингалов (теоремы 3.1 и 3.2), при условии интегрируемости скачков. Рассмотрены вспомогательные экспоненциальные супермартингалы (леммы 3.2 и 3.3) и использована модификация леммы Бореля–Кантелли, доказанная в [2] (лемма 3.4). В §3 результаты Л. Лепингля (см. [9]), установленные для càdlàg-мартингалов, распространяются на случай опциональных мартингалов.

§1. НЕОБХОДИМЫЕ ПОНЯТИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Всюду ниже через $(\Omega, \mathcal{F}, F = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$ будем обозначать стохастический базис, где $\mathcal{F}$ есть P-полная σ-алгебра, $F = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ – произвольный неубывающий поток σ-подалгебр $\mathcal{F}$ ($\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$, $t \geq s \geq 0$), а P – вероятностная мера. Примем следующие обозначения :

$F_+ = (\mathcal{F}_{t+})_{t\geq 0}$, где $\mathcal{F}_{t+} = \cap_{s>t}\mathcal{F}_s$;

$\mathcal{P}$ и $O(O_+)$ – σ-алгебры предсказуемых, $O(O_+)$ опциональных множеств, порожденные, соответственно, F согласованными càglàd процессами (с непрерывными слева траекториями, имеющими пределы справа) и $F(F_+)$ согласованными càdlàg процессами. Те же обозначения будут использованы для соответствующих множеств измеримых процессов ;

$\mathcal{P}_s$ – множество строго предсказуемых процессов ($X = (X_t)_{t\geq 0} \in \mathcal{P}_s$, если $X \in \mathcal{P}$ и существует процесс $X_+ = (X_{t+})_{t\geq 0} \in O$, где $X_{t+} = \lim_{s \downarrow t} X_s$.) ;

$\mathcal{T}$, $\mathcal{T}_p$ и $\mathcal{T}_+$ – множества F-моментов остановки (м. о.), F-предсказуемых м. о. и F_+- м. о. соответственно ;

V^+ и A^+_{loc} – соответственно, множества соответственно возрастающих и локально интегрируемых, возрастающих процессов ($A \in A^+_{\text{loc}}$, если $A \in V^+$, F согласовано и существует последовательность $(R_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{T}_+$, $R_n \uparrow \infty$ п. н. (почти наверняка), и $EA_{R_n+} < \infty$ для любого $n \geq 1$.) ;

V и A_{loc} соответственно – множества соответственно всех процессов ограниченной и локально-интегрируемой вариации ($A \in A_{\text{loc}}$, если A F-согласовано и существует последовательность $(R_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{T}_+$, $R_n \uparrow \infty$ п. н., и при любом $n \geq 1$ имеем $E \operatorname{Var}_{[0,R_n]} A < \infty$, где $[O, R_n] = \{(\omega, t) \colon O \leq t \leq R_n(\omega)\}$ – стохастический интервал, $\operatorname{Var}_{[0,R_n]} A$ – вариация процесса A на интервале $[O, R_n]$) ;

$M(M^2)$ – множества всех опциональных (опциональных, квадратично-интегрируемых) мартингалов ($M \in M(M^2)$, если $M \in O$ и существует $\mathcal{F}_\infty$-измеримая с. в. (случайная величина) $\widetilde{M}$ с $E|\widetilde{M}| < \infty$ ($E|\widetilde{M}|^2 < \infty$) такая, что $E\left[\widetilde{M}|\mathcal{F}_T\right] = M_T$ п. н. на множестве $(T < \infty)$, при любом $T \in \mathcal{T}$) ;

$M_{\text{loc}}\left(M^2_{\text{loc}}\right)$ – множества всех локальных (локально, квадратично-интегрируемых) опциональных мартингалов ($M \in M_{\text{loc}}\left(M^2_{\text{loc}}\right)$, если $M \in O$ и существует последовательность $(R_n, M^n)_{n\geq 1}$, где $R_n \in \mathcal{F}_+$, $M^n \in M(M^2)$ такая, что $R_n \uparrow \infty$ п. н., $M = M^n$ на интервале $[0, R_n]$ и $E\left|M_{R_n+}\right| < \infty$ ($E\left|M_{R_n+}\right|^2 < \infty$) при любом $n \geq 1$) ;

Процесс $X = (X_t)_{t\geq 0} \in O$ называется опциональным супермартингалом, если : а) $E|X_T|\, I_{T<\infty} < \infty$ для любого $T \in \mathcal{T}$, где $I_{T<\infty}$ – индикатор множества $(T < \infty)$; б) $E[X_t|\mathcal{F}_s] \leq X_s$ п. н. для всех $s \leq t$; в) существует с. в. $\widetilde{X}$ с $E|\widetilde{X}| < \infty$ такая, что п. н. $E\left[\widetilde{X}|\mathcal{F}_T\right] \leq X_T$ на любом множестве $(T < \infty)$, $T \in \mathcal{T}$.

Замечание 1. Введенный выше класс опциональных мартингалов (супермартингалов) достаточно широк. Если $X = (X_t)_{t\geq 0}$ – некоторый мартингал (супермартингал) в обычном смысле и существует с. в. $\tilde{X}$ с $E|\tilde{X}| < \infty$ такая, что $E\left[\tilde{X}|\mathcal{F}_t\right] = X_t$ ($\leq X_t$) п. н. для всех $t \geq 0$, то существует опциональный мартингал (супермартингал) X', являющийся модификацией процесса X [4, 10].

Замечание 2. Известно (см. [3]), что любой опциональный процесс $X = (X_t)_{t\geq 0}$ является опционально сепарабельным, то есть существует последовательность $(S_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{T}$ (множество опциональной сепарабельности), всюду плотная на $\mathbb{R}_+$ и такая, что график процесса $X = (X_t)_{t\geq 0}$ содержится в замыкании графика последовательности $(X_{S_n})_{n\geq 1}$. Кроме того, при некоторой непрерывной замене времени $(T_t)_{t\geq 0}$ опционально-сепарабельный процесс $(X_t)_{t\geq 0}$ становится сепарабельным в обычном смысле (см. [3]). Таким образом, траектории опциональных, локальных мартингалов и супермартингалов для всех $t \geq 0$ имеют п. н. пределы слева $X_{t-}(\omega) = \lim_{s\uparrow t} X_s(\omega)$ и справа $X_{t+}(\omega) = \lim_{s\downarrow t} X_s(\omega)$ (см. [13]).

Для процесса $X = (X_t)_{t\geq 0}$ условимся обозначать через $(X \rightarrow)$ множество тех $\omega \in \Omega$, для которых существует конечное финальное значение $X_\infty(\omega) = \lim_{t\to\infty} X_t(\omega) < \infty$. Для множеств $A, B \in \mathcal{F}$ запись $A = B$ п. н., или $A \subset B$ п. н., будет означать, соответственно, $P(A\Delta B) = 0$, или $P(A \cap (\Omega \setminus B)) = 0$, где Δ – знак симметрической разности множеств. Пусть $M = (M_t)_{t\geq 0} \in \mathcal{M}_{loc}$. Тогда имеет место единственное (с точностью до неотличимости) разложение (см. [5])

$$M = M^r + M^g, \tag{1.1}$$

где $M^r = M^c + M^d \in \mathcal{M}_{loc}$, $M^c \in \mathcal{M}_{loc}$ и $M^d(M^g) \in \mathcal{M}_{loc}$, соответственно, непрерывная и "чисто разрывная" càdlàg (càglàd) составляющие для мартингала M (процессы M^d и M^g ортогональны любому непрерывному процессу $Y \in \mathcal{M}_{loc}$, т. е. $M^dY \in \mathcal{M}_{loc}$, $M^gY \in \mathcal{M}_{loc}$). Далее, определим следующие процессы :

$$[M, M]_t = \langle M^c \rangle_t + \sum_{s\leq t}(\Delta M_s)^2 + \sum_{s<t}(\Delta^+ M_s)^2, \tag{1.2}$$

$$B_t = \sum_{s\leq t}(1+|\Delta M_s|)^{-1}(\Delta M_s)^2 + \sum_{s<t}(1+|\Delta^+ M_s|)^{-1}(\Delta^+ M_s)^2, \qquad (1.3)$$

$$D_t = \langle M^c \rangle_t + B_t, \qquad (1.4)$$

где $\Delta M_s = M_s - M_{s-}$, $\Delta^+ M_s = M_{s+} - M_s$, а $\langle M^c \rangle \in A^+_{\mathrm{loc}}$ – квадратическая характеристика для $M^c \in M_{\mathrm{loc}}$, $((M^c)^2 - \langle M^c \rangle \in M_{\mathrm{loc}})$. Ряды в (1.2) и (1.3) сходятся п. н., и $[M, M] \in V^+$, $B \in A^+_{\mathrm{loc}}$ (см. [5], [8]).

§2. МНОЖЕСТВА СХОДИМОСТИ ДЛЯ ОПЦИОНАЛЬНЫХ МАРТИНГАЛОВ

Основными результатами этого параграфа являются нижеприведенные две теоремы, анонсированные ранее в [1].

Теорема 2.1. а) *Если $M \in M_{\mathrm{loc}}$, то $(\widetilde{D}_\infty < \infty) \subseteq (M \longrightarrow)$ п. н..*

б) Если $M \in M_{\mathrm{loc}}$ и для всех $T \in \mathcal{T}$ и $U \in \mathcal{T}_+$ имеем $E|\Delta M_T| I(T < \infty) < \infty$ и $E|\Delta^+ M_U| I(U < \infty) < \infty$, то $(\widetilde{D}_\infty < \infty) = ([M, M]_\infty < \infty) = (M \longrightarrow)$ п. н., где $\widetilde{D} \in \mathcal{P}_s \cap A^+_{\mathrm{loc}}$ – компенсатор процесса $D \in A^+_{\mathrm{loc}}$ $(D - \widetilde{D} \in M_{\mathrm{loc}})$.

Теорема 2.2. а) *Если $M \in M^2_{\mathrm{loc}}$, то $(\langle M \rangle_\infty < \infty) \subseteq (M \longrightarrow)$ п. н..*

б) Если $M \in M^2_{\mathrm{loc}}$ и для всех $T \in \mathcal{T}$ и $U \in \mathcal{T}_+$ имеем $E|\Delta M_T|^2 I(T < \infty) < \infty$ и $E|\Delta^+ M_U|^2 I(U < \infty) < \infty$, то $(\langle M \rangle_\infty < \infty) = ([M, M]_\infty < \infty) = (M \longrightarrow)$ п. н., где $\langle M \rangle \in \mathcal{P}_s \cap A_{\mathrm{loc}}$ – квадратическая характеристика мартингала M (см. [5]).

Для доказательства этих теорем нам понадобится следующая

Лемма 2.1. а) *Если $A \in A^+_{\mathrm{loc}}$, то $(\widetilde{A}_\infty < \infty) \subseteq (A_\infty < \infty)$ п. н..*

б) Если $A \in A^+_{\mathrm{loc}}$ и для всех $T \in \mathcal{T}$ и $U \in \mathcal{T}_+$ имеем $E\Delta A_T I_{T<\infty} < \infty$ и $E\Delta^+ A_U I_{U<\infty} < \infty$, то $(\widetilde{A}_\infty < \infty) = (A_\infty < \infty)$ п. н.

Доказательство. а) Процесс $A \in A^+_{\mathrm{loc}}$ можно записать в виде

$$A = A^r + A^g,$$

где $A^r = A^c + \sum_{s\leq \cdot} \Delta A_s \in A^+_{\mathrm{loc}}$, $A^g = \sum_{s<\cdot} \Delta^+ A_s \in A^+_{\mathrm{loc}}$, а $A^c \in A^+_{\mathrm{loc}}$ – непрерывный процесс (ряды п. н. абсолютно сходятся).

Рассмотрим процессы

$$A'_t = \int_{]0,t]} I(\Delta\widetilde{A}_s > 1)\, dA^r_s + \int_{[0,t[} I(\Delta^+\widetilde{A}_s > 1)\, dA^g_{s+} \in A^+_{\mathrm{loc}}, \tag{2.1}$$

$$A''_t = \int_{]0,t]} I(\Delta\widetilde{A}_s \le 1)\, dA^r_s + \int_{[0,t[} I(\Delta^+\widetilde{A}_s \le 1)\, dA^g_{s+} \in A^+_{\mathrm{loc}}, \tag{2.2}$$

(интегралы в (2.1) и (2.2) понимаются в смысле Лебега–Стильтьеса). В силу теоремы 1.6.3 из [11] и теоремы 1.10 из [7], из (2.1) и (2.2) следует, что

$$\widetilde{A'_t} = \int_{]0,t]} I(\Delta\widetilde{A}_s > 1)\, d\widetilde{A}^r_s + \int_{[0,t[} I(\Delta^+\widetilde{A}_s > 1)\, d\widetilde{A}^g_{s+} \in \mathcal{P}_s \cap A^+_{\mathrm{loc}}, \tag{2.3}$$

$$\widetilde{A''_t} = \int_{]0,t]} I(\Delta\widetilde{A}_s \le 1)\, d\widetilde{A}^r_s + \int_{[0,t[} I(\Delta^+\widetilde{A}_s \le 1)\, d\widetilde{A}^g_{s+} \in \mathcal{P}_s \cap A^+_{\mathrm{loc}}. \tag{2.4}$$

Далее, из (2.3) и (2.4) получаем, что п. н.

$$\begin{aligned} (\widetilde{A'_\infty} < \infty) &\subseteq \left(\sum_{s>0} I(\Delta\widetilde{A}_s > 1) + \sum_{s\ge 0} I(\Delta^+\widetilde{A}_s > 1) < \infty \right) \subseteq \\ &\subseteq \left(\sum_{s>0} I(\Delta\widetilde{A}_s > 1)\,\Delta A_s + \sum_{s\ge 0} I(\Delta^+\widetilde{A}_s > 1)\,\Delta^+ A_s < \infty \right) = (A'_\infty < \infty). \end{aligned} \tag{2.5}$$

Определим для некоторого $a > 0$ моменты остановки

$$T^1_a = \inf\left(t \ge 0 : (\widetilde{A''_t})^r > a\right) \in \mathcal{T}_p, \qquad T^2_a = \inf\left(t \ge 0 : (\widetilde{A''_t})^g > a\right) \in \mathcal{T}. \tag{2.6}$$

В силу свойств компенсаторов возрастающих процессов $(A''_t)^r$ и $(A''_t)^g$ (см. [5], теоремы 2.2 и 2.3) и ввиду определений (2.6)

$$E(A'')^r_{T^1_a} = E(\widetilde{A''})^r_{T^1_a} \le a + 1, \qquad E(A'')^g_{T^2_a} = E(\widetilde{A''})^g_{T^2_a} \le a.$$

Отсюда следует, что $P(((A'')^r_\infty = \infty) \cap (T^1_a = \infty)) = 0$ и $P(((A'')^g_\infty = \infty) \cap (T^2_a = \infty)) = 0$, т.е.

$$((\widetilde{A''})^r_\infty < \infty) = \cup_{a>0}(T^1_a = \infty) \subseteq ((A'')^r_\infty < \infty) \quad \text{п. н.}, \tag{2.7}$$

$$((\widetilde{A''})^g_\infty < \infty) = \cup_{a>0}(T^2_a = \infty) \subseteq ((A'')^g_\infty < \infty) \quad \text{п. н.}. \tag{2.8}$$

Из (2.7) и (2.8) вытекает, что п. н.

$$(\widetilde{A''_\infty} < \infty) = ((\widetilde{A''})^r_\infty < \infty) \cap ((\widetilde{A''})^g_\infty) \subseteq ((A'')^r_\infty < \infty) \cap ((A'')^g_\infty < \infty) = (A''_\infty < \infty). \tag{2.9}$$

Наконец, из (2.5), (2.9) и равенств

$$(\widetilde{A}_\infty < \infty) = (\widetilde{A'_\infty} < \infty) \cap (\widetilde{A''_\infty} < \infty) \quad \text{и} \quad (A_\infty < \infty) = (A'_\infty < \infty) \cap (A''_\infty < \infty)$$

приходим к утверждению а). б) Определим для $a > 0$ моменты остановки $S^1_a = \inf(t \geq 0\colon A^r_t > a) \in \mathcal{T}$, $S^2_a = \inf\left(t \geq 0\colon A^g_{t+} > a\right) \in \mathcal{T}_+$. Из определения компенсатора следует

$$E\widetilde{A^r_{S^1_a}} = EA^r_{S^1_a} \leq a + E\Delta A_{S^1_a} I(S^1_a < \infty) < \infty, \tag{2.10}$$

$$E\widetilde{A^g_{S^2_a+}} = EA^g_{S^2_a+} \leq a + E\Delta^+ A_{S^2_a} I(S^2_a < \infty) < \infty. \tag{2.11}$$

Из (2.10) и (2.11) следует, что $P((\widetilde{A^r_\infty} = \infty) \cap (S^1_a = \infty)) = 0$ и $P((\widetilde{A^g_\infty} = \infty) \cap (S^2_a = = \infty)) = 0$, т. е.

$$(A^r_\infty < \infty) = \cup_{a>0}(S^1_a = \infty) \subseteq (\widetilde{A^r_\infty} < \infty) \quad \text{п. н.}, \tag{2.12}$$

$$(A^g_\infty < \infty) = \cup_{a>0}(S^2_a = \infty) \subseteq (\widetilde{A^g_\infty} < \infty) \quad \text{п. н.}. \tag{2.13}$$

Наконец, из (2.12) и (2.13) следует, что п. н.

$$(A_\infty < \infty) = (A^r_\infty < \infty) \cap (A^g_\infty < \infty) \subseteq (\widetilde{A^r_\infty} < \infty) \cap (\widetilde{A^g_\infty} < \infty) = (\widetilde{A}_\infty < \infty),$$

что вместе с доказанным утверждением а) приводит к утверждению б).

Доказательство теоремы 2.1. Для процесса $M \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc}}$ будем рассматривать разложение $M = M' + M''$, где

$$M'_t = \int_{]0,t]} I(\Delta\widetilde{B^r_s} > 1)\, dM^r_s + \int_{[0,t[} I(\Delta^+\widetilde{B^g_s} > 1)\, dM^g_{s+} \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc}}, \tag{2.14}$$

$$M''_t = \int_{]0,t]} I(\Delta\widetilde{B^r_s} \leq 1)\, dM^r_s + \int_{[0,t[} I(\Delta^+\widetilde{B^g_s} \leq 1)\, dM^g_{s+} \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc}}, \tag{2.15}$$

$M = M^r + M^g$ (см. (1.1)), $B = B^r + B^g$ (см. (1.3)), $B^r = \sum_{s\le\cdot}(1+|\Delta M_s|)^{-1}(\Delta M_s)^2$ и $B^g = \sum_{s<\cdot}(1 + |\Delta^+ M_s|)^{-1}(\Delta^+ M_s)^2$ (относительно определения интегралов в (2.14) и (2.15) см., напр., [5] и [11]). Процесс B', соответствующий процессу $M' \in M_{\mathrm{loc}}$ (см. (1.3)), определяется следующим образом :

$$B'_t = \int_{]0,t]} I(\Delta \widetilde{B^r_s} > 1)\, dB^r_s + \int_{[0,t[} I(\Delta^+ \widetilde{B^g_s} > 1)\, dB^g_{s+} \in A^+_{\mathrm{loc}}. \tag{2.16}$$

Тем самым, компенсатор процесса B' имеет вид (см. [15] и [7])

$$\widetilde{B'_t} = \int_{]0,t]} I(\Delta \widetilde{B^r_s} > 1)\, d\widetilde{B^r_s} + \int_{[0,t[} I(\Delta^+ \widetilde{B^g_s} > 1)\, d\widetilde{B^g_{s+}}. \tag{2.17}$$

Из (2.17) и (2.14) приходим к следующим вложениям – п. н.

$$(\widetilde{D_\infty} < \infty) \subseteq (\widetilde{B'_\infty} < \infty) \subseteq (\sum_{s>0} \Big[I(\Delta \widetilde{B^r_s} > 1) + I(\Delta^+ \widetilde{B^g_s} > 1)\Big] < \infty) \subseteq (M' \to). \tag{2.18}$$

С другой стороны, процесс B'', соответствующий процессу $M'' \in M_{\mathrm{loc}}$, представим в виде

$$B''_t = \int_{]0,t]} I(\Delta \widetilde{B^r_s} \le 1)\, dB^r_s + \int_{[0,t[} I(\Delta^+ \widetilde{B^g_s} \le 1)\, dB^g_{s+} \tag{2.19}$$

(см. (1.3)). Отсюда для компенсатора $\widetilde{B''}$ получим (см. [11] и [7])

$$\widetilde{B''_t} = \int_{]0,t]} I(\Delta \widetilde{B^r_s} \le 1)\, d\widetilde{B^r_s} + \int_{[0,t[} I(\Delta^+ \widetilde{B^g_s} \le 1)\, d\widetilde{B^g_{s+}}. \tag{2.20}$$

Для процесса

$$\widetilde{D''} = < M^c > + \widetilde{B''}. \tag{2.21}$$

согласно (2.20) имеем

$$\Delta \widetilde{D''} \le 1. \tag{2.22}$$

Полагая $T^1_a = \inf\Big(t > 0 : (\widetilde{D''})^r_t > a\Big) \in T_p$, $T^2_a = \inf\Big(t > 0 : (\widetilde{B''})^g_t > a\Big) \in T$ и $T_a = T^1_a \wedge T^2_a \in T$ для $a > 0$ и имея ввиду (2.22), получим

$$E(D'')^r_{T^1_a} = E(\widetilde{D''})^r_{T^1_a} \le a + 1, \tag{2.23}$$

$$E(B'')^g_{T^2_a} = E(\widetilde{B''})^g_{T^2_a} \leq a. \tag{2.24}$$

Из (2.21) легко следует, что

$$E < M^c >^{1/2}_{T^1_a} \leq \left(E(\widetilde{D''})^r_{T^1_a}\right)^{1/2}. \tag{2.25}$$

Воспользовавшись теперь известным неравенством (см. [11], лемму 2.2.1)

$$\left(\sum_{s\leq t} X_s^2\right)^{1/2} \leq \frac{1}{4} + 2\sum_{s\leq t} X_s^2(1+|X_s|)^{-1},$$

имеющим место для любого процесса $X \in O$ такого, что множество $(t\colon X_t \neq 0)$ не более чем счетное, получим

$$E\left[(M'')^r, (M'')^r\right]^{1/2}_{T^1_a} \leq E\left(< M^c >_{T^1_a}\right)^{1/2} + E\left(\sum_{s\leq T^1_a} I(\Delta \widetilde{B}^r_s \leq 1)(\Delta M_s)^2\right)^{1/2} \leq$$

$$\leq \left(E(\widetilde{D''})^r_{T^1_a}\right)^{1/2} + \frac{1}{4} + 2E\left(\widetilde{D''}\right)^r_{T^1_a}, \tag{2.26}$$

$$E\left[(M'')^g, (M'')^g\right]^{1/2}_{T^2_a} \leq E\left(\sum_{s<T^2_a} I(\Delta^+ \widetilde{B}^g_s \leq 1)(\Delta^+ M_s)^2\right)^{1/2} \leq \frac{1}{4} + 2E\left(\widetilde{B''}\right)^g_{T^2_a}. \tag{2.27}$$

Далее, пользуясь неравенствами Дэвиса и Кунита–Ватанабе (см. [12] и [5]) для опциональных мартингалов, а также неравенствами (2.23), (2.24), (2.26) и (2.27), получим

$$E\sup_{t\leq T_a} |M''_t| \leq C\left(E\left[(M'')^r, (M'')^r\right]^{1/2}_{T_a} + E\left[(M'')^g, (M'')^g\right]^{1/2}_{T_a}\right) < \infty, \tag{2.28}$$

где $C = 51\sqrt{2}+8$. Из (2.28) следует, что процесс $(M'')^{T_a}$, остановленный в момент T_a, является равномерно интегрируемым мартингалом, т. е. $P((M'')^{T_a} \rightarrow) = 1$ (см. [13], теорему 6.1.6). Тем самым, $P(M'' \not\rightarrow, T_a = \infty) = 0$, т. е. $P(M'' \not\rightarrow, \cup_{a\in N}(T_a = \infty)) = 0$. Отсюда следует, что

$$(\widetilde{D''_\infty} < \infty) = \cup_{a\in N}(T_a = \infty) \subseteq (M'' \rightarrow) \quad \text{п. н.} \tag{2.29}$$

Наконец, ввиду (2.18) и (2.29) $(\widetilde{D}_\infty < \infty) = (\widetilde{B'_\infty} < \infty) \cap (\widetilde{D''_\infty} < \infty) \subseteq$

$\subseteq (M' \to) \cap (M'' \to) = (M \to)$ п. н., что доказывает утверждение а).

б) Положим $S_a = \inf(t \geq 0 \colon |M_{t+}| \geq a) \in \mathcal{T}_+$, где $a > 0$. Тогда

$$E \sup_{t \leq S_a} |M_{t+}| \leq a + E\left|\Delta^+ M_{S_a}\right| I(S_a < \infty) < \infty, \tag{2.30}$$

и, согласно неравенству Дэвиса для мартингала $M_+ \in M_{loc}(F_+)$

$$E[M,M]^{1/2}_{S_a+} < \infty. \tag{2.31}$$

Далее, из (2.31), (1.2) и (1.3) следует, что

$$(M \to) \subseteq (\sup_t |M_t| < \infty) = (\sup_t |M_{t+}| < \infty) = \cup_{a>0}(S_a = \infty) \subseteq ([M,M]^{1/2}_\infty < \infty) =$$
$$= ([M,M]_\infty < \infty) \subseteq (D_\infty < \infty) \quad \text{п. н.}\ . \tag{2.32}$$

Однако, так как $\Delta D \leq |\Delta M|$ и $\Delta^+ D \leq |\Delta^+ M|$ (см. (1.3)), то в силу леммы 2.1

$$(D_\infty < \infty) = (\tilde{D}_\infty < \infty) \quad \text{п. н.}\ . \tag{2.33}$$

Наконец, ввиду (2.32), (2.33) и уже доказанного утверждения а), $(M \to) \subseteq$ $\subseteq ([M,M]_\infty < \infty) \subseteq (\tilde{D}_\infty < \infty) \subseteq (M \to)$ п. н., откуда следует утверждение б).

Доказательство теоремы 2.2 аналогично доказательству соответствующего результата работы [8].

§3. ЗАКОНЫ ПОВТОРНОГО ЛОГАРИФМА

Как известно (см. [9]), для càdlàg мартингалов имеет место закон повторного логарифма. Основными результатами этого параграфа являются распространения закона повторного логарифма на случай опциональных мартингалов, содержащиеся в двух нижеследующих теоремах.

Теорема 3.1. *Пусть $M \in M^2_{loc}$ и $E\sup_t |\Delta M_t| < \infty$, $E\sup_t |\Delta^+ M_t| < \infty$ Тогда на множестве $(\langle M \rangle_\infty = \infty)$ $\overline{\lim_{t\to\infty}}\,(2 \langle M \rangle_t \log\log \langle M \rangle_t)^{-1/2} M_t \leq 1$ п. н.*

Теорема 3.2. *Пусть $M \in M_{loc}$ и $E\sup_t |\Delta M_t| < \infty$, $E\sup_t |\Delta^+ M_t| < \infty$. Тогда на множестве $([M,M]_\infty = \infty)$ $\overline{\lim_{t\to\infty}}\,(2[M,M]_t \log\log[M,M]_t)^{-1/2} M_t \leq 1$ п. н.*

Предположим, что $M \in M_{\mathrm{loc}}$, и что μ^1 (μ^2) — O (O_+)-измеримая, случайная мера, порожденная скачками ΔM $(\Delta^+ M)$ мартингала M с $\mathcal{P}(O)$-измеримым компенсатором $\nu^1(\nu^2)$ (см. [7]). Далее, определим процесс

$$\alpha(M)_t = \exp\left\{ M_t - 1/2 < M^c >_t - \sum_{i=1}^{2} (e^u - 1 - u) * \nu_t^i \right\}, \qquad (3.1)$$

где

$$(e^u - 1 - u) * \nu_t^1 = \iint_{]0,t]\times E} (e^u - 1 - u)\, \nu^1(ds, du) \in A^+_{\mathrm{loc}}, \quad E = \mathbb{R}^1 \setminus \{O\},$$

$$(e^u - 1 - u) * \nu_t^2 = \iint_{[0,t[\times E} (e^u - 1 - u)\, \nu^2(ds, du) \in A^+_{\mathrm{loc}}.$$

Для доказательства теорем 3.1 и 3.2 нам понадобятся следующие леммы (ср. [9]).

Лемма 3.1. *Всякий неотрицательный процесс $M \in M_{\mathrm{loc}}$ является опциональным супермартингалом.*

Лемма 3.2. *Для любого $M \in M_{\mathrm{loc}}$ процесс $\alpha(M)$ является опциональным супермартингалом.*

Лемма 3.3. *Пусть $M \in M_{\mathrm{loc}}$ так, что $\Delta M \le c$, $\Delta^+ M \le c$ $(c > 0)$. Тогда процесс $\gamma(M)_t = \exp(\lambda M_t - \varphi_c(\lambda) < M >_t)$ является опциональным супермартингалом, где $\varphi_c(\lambda) = c^{-2}(e^{\lambda c} - 1 - \lambda c)$, $\lambda > 0$.*

Имеет место также следующий вариант леммы Бореля–Кантелли (доказательство см. в [2]).

Лемма 3.4. *Пусть для процесса $A = A^r + A^g \in A^+_{\mathrm{loc}}$ выполнены следующие условия: а) $\widetilde{A}^r_\infty = \infty$, $\widetilde{A}^g_\infty = \infty$ п. н.; б) $E\sup_t \Delta A_t < \infty$, $E\sup_t \Delta^+ A_t < \infty$. Тогда $\widetilde{A}_t^{-1} A_t \to 1$ п. н. при $t \to \infty$.*

Доказательство леммы 3.1. Пусть $M \in M_{\mathrm{loc}}$, $M \ge 0$. Тогда существуют $M^n \in M$, $M^n \ge 0$, и $R_n \in \mathcal{T}_+$, $R_n \uparrow \infty$ п. н. такие, что при любом $n \ge 1$ на стохастическом интервале $[0, R_n]$ справедливо равенство $M = M^n$. Далее, для любых $t \geq s$ и $A \in \mathcal{F}_s$ имеем

$$EM_tI(A) = \lim_{n\to\infty} EM_tI(A)I(t \leq R_n) = \lim_{n\to\infty} EM_t^nI(A)I(t \leq R_n) \leq$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} EM_t^nI(A)I(s \leq R_n) = \lim_{n\to\infty} EM_s^nI(A)I(s \leq R_n) = EM_sI(A).$$

Отсюда следует, что процесс $M = (M_t)_{t\geq 0}$ – неотрицательный супермартингал в обычном смысле, и, согласно теореме 6.2.6 из [13], существует $M_\infty = \lim_{t\to\infty} M_t$ п. н. , $EM_\infty < \infty$ и $E[M_\infty|\mathcal{F}_t] \leq M_t$ п. н. , то есть $E[M_\infty|\mathcal{F}_T] \leq M_T$ п. н. на множестве $(T < \infty)$ для любого $T \leq \mathcal{T}$ (см. [13], теорему 6.2.13). Тем самым, M является опциональным супермартингалом.

Доказательство леммы 3.2. Определим следующие процессы :

$$\beta(M)_t = \exp(M_t - 1/2 < M^c >_t), \quad H_t = \exp(M_t), \quad L_t = \exp(-1/2 < M^c >_t).$$

По формуле замены переменных Ито (см. [5])

$$H_t = 1 + \int_{]0,t]} H_{s-}\, dM_s^r + 1/2 \int_{]0,t]} H_{s-}\, d < M^c >_s + \int_{[0,t[} H_s\, dM_{s+}^g +$$
$$+ \iint_{]0,t]\times E} H_{s-}(e^u - 1 - u)\,\mu^1(ds, du) + + \iint_{[0,t[\times E} H_s(e^u - 1 - u)\,\mu^2(ds, du), \tag{3.3}$$

$$L_t = 1 - 1/2 \int_{]0,t]} L_s\, d < M^c >_s \tag{3.4}$$

(относительно определений интегралов правой части (3.3) см. [7]). Далее, интегрируя по частям получим

$$\beta(M)_t = H_tL_t = 1 + \int_{]0,t]} H_{s-}\, dL_s^r + \int_{[0,t[} H_s\, dL_{s+}^g + \int_{]0,t]} L_{s-}\, dH_s^r +$$
$$+ \int_{[0,t[} L_s\, dH_{s+}^g + [H, L]_t. \tag{3.5}$$

Из (3.4) заключаем, что $L^g = 0$, $L_- = L$ и $[H, L] = 0$, а из (3.3) следует, что

$$H_t^r = 1 + \int_{]0,t]} H_{s-}\, dM_s^r + 1/2 \int_{]0,t]} H_{s-}\, d < M^c >_s +$$
$$+ \iint_{]0,t]\times E} H_{s-}(e^u - 1 - u)\,\mu^1(ds, du),$$

$$H_t^g = \int_{[0,t[} H_s\, dM_{s+}^g + \iint_{[0,t[\times E} H_s(e^u - 1 - u)\,\mu^2(ds, du).$$

Таким образом, (3.5) приводится к виду

$$\beta(M)_t = 1-\frac{1}{2}\int_{]0,t]}\beta(M)_{s-}\,d<M^c>_s+\int_{]0,t]}\beta(M)_{s-}\,d(M^r_s+1/2<M^c>_s+A^r_s)+$$
$$+\int_{[0,t[}\beta(M)_s\,d(M^g_{s+}+A^g_{s+}),\tag{3.6}$$

где $A^r=(e^u-1-u)*\mu^1$ а $A^g=(e^u-1-u)*\mu^2$. После очевидных преобразований из (3.6) получим

$$\beta(M)_t=1+\int_{]0,t]}\beta(M)_{s-}\,d(M^r_s+A^r_s)+\int_{[0,t[}\beta(M)_s\,d(M^g_{s+}+A^g_{s+}),$$

откуда вытекает, что

$$\beta(M)=\varepsilon(M+A),\tag{3.7}$$

где $\varepsilon(\cdot)$ – экспонента Долеан (см. [7]), а $A=A^r+A^g$. Учитывая, что $\widetilde{A^r}=$ $=(e^u-1-u)*\nu^1$, $\widetilde{A^g}=(e^u-1-u)*\nu^2$ (см. [7], леммы 3.1 и 3.3) и имея в виду (3.7), запишем процесс $\alpha(M)$ из (3.1) в виде

$$\alpha(M)=\varepsilon(N+\widetilde{A})\exp(-\widetilde{A}),\tag{3.8}$$

где $N=M+(A-\widetilde{A})\in M_{loc}$, $\widetilde{A}=\widetilde{A^r}+\widetilde{A^g}\in\mathcal{P}_s\cap A^+_{loc}$. Но так как $\Delta\widetilde{A}>0$ и $\Delta^+\widetilde{A}>0$ ($\Delta A=\exp(\Delta M)-1-\Delta M>0$, $\Delta^+A=\exp(\Delta^+M)-1-\Delta^+M>0$), то, согласно [14] (теорема 1), $\varepsilon(N+\widetilde{A})=\varepsilon(\widetilde{N})\,\varepsilon(\widetilde{A})$, где $\widetilde{N}_t=\int_{]0,t]}(1+\Delta\widetilde{A}_s)^{-1}\,dN^r_s+$ $+\int_{[0,t[}(1+\Delta^+\widetilde{A}_s)^{-1}\,dN^g_{s+}$, $N=N^r+N^g$. Следовательно, (3.8) запишется в виде

$$\alpha(M)=\varepsilon(\widetilde{N})\prod_{s\le\cdot}(1+\Delta\widetilde{A}_s)\exp(-\Delta\widetilde{A}_s)\prod_{s<\cdot}(1+\Delta^+\widetilde{A}_s)\exp(-\Delta^+\widetilde{A}_s).\tag{3.9}$$

Поскольку бесконечные произведения правой части этой формулы не превосходят единицы и $\varepsilon(\widetilde{N})$ – опциональный супермартингал (лемма 3.1), то из (3.9) следует, что для любого $T\in\mathcal{T}$

$$E\alpha(M)_T\le E\varepsilon(\widetilde{N})_T\le 1.\tag{3.10}$$

Из (3.10) следует, что $\alpha(M)$ является супермартингалом в обычном смысле, и так как $\alpha(M)\in O$, то он к тому же сепарабелен (см. замечание 2). Поэтому существует $\lim\limits_{t\to\infty} \alpha(M)_t = \alpha_\infty$ п. н. , где $E\alpha_\infty < \infty$ и $E[\alpha_\infty|\mathcal{F}_t] \le \alpha(M)_t$ (см. [13], теорему 6.2.6). Отсюда следует, что $E[\alpha_\infty|\mathcal{F}_T] \le \alpha(M)_T$ для любого $T \in \mathcal{T}$ (см. [13], теорему 6.2.13), т. е. $\alpha(M)$ – опциональный супермартингал.

Доказательство леммы 3.3. Напомним (см. [7]), что в разложении (1.1)

$$M_t^d = \iint_{]0,t]\times E} u(\mu^1 - \nu^1)(ds, du), \quad M_t^g = \iint_{[0,t[\times E} u(\mu^2 - \nu^2)(ds, du),$$

$$< M^d >= u^2 \times \nu^1, \qquad < M^g >= u^2 \times \nu^2 \quad \text{(см. [11], задачу 3.5.2)}$$

имеем

$$< M >=< M^c > + \sum_{i=1}^{2} u^2 * \nu^i. \tag{3.11}$$

Используя (3.11) и элементарные неравенства $\varphi_c(\lambda) \ge \frac{\lambda^2}{2}$ и $\exp(\lambda u) - 1 - \lambda u \le$ $\le \varphi_c(\lambda)u^2$ для всех $u \le c$, получим, что

$$\gamma(M)_t \le \exp\left(\lambda M_t - \frac{\lambda^2}{2} < M^c >_t - \varphi_c(\lambda)\sum_{i=1}^{2} u^2 * \nu_t^i\right) \le$$

$$\le \exp\left(\lambda M_t - \frac{\lambda^2}{2} < M^c >_t - \sum_{i=1}^{2}(\exp(\lambda u) - 1 - \lambda u) * \nu_t^i\right) = \alpha(\lambda M)_t. \tag{3.12}$$

Утверждение леммы следует теперь из того, что в (3.12) процесс $\alpha(\lambda M)$ является опциональным супермартингалом (см. лемму 3.2).

Доказательство теоремы 3.1. а) Предположим сначала, что $\Delta M \le c$, $\Delta^+ M \le$ $\le c$ $(c > 0)$ и воспользуемся известным неравенством $P(\sup_t X_t > c) \le c^{-1} X_0$ $(c > 0)$ (см. [6]) для неотрицательного опционального супермартингала $X =$ $= (X_t)_{t\ge 0}$. Положив здесь $X = \gamma(M)$ (лемма 3.3) и $c = \exp(\lambda a)$ $(\lambda > 0,\ a > 0)$, получим

$$P\left(\sup_t(\lambda M_t - \varphi_c(\lambda) < M >_t) > \lambda a\right) \le \exp(-\lambda a). \tag{3.13}$$

Следуя [9], обозначим

$$a_k = \frac{(1+\delta)(2\theta^k \log\log\theta^k)^{1/2}}{2}, \qquad \lambda_k = \theta^{-k}(2\theta^k \log\log\theta^k)^{1/2}, \tag{3.14}$$

где $\theta > 1$, $\delta > 0$ и $k \geq 1$ таковы, что $\theta^k \geq e$. Далее, положим $T_k = \inf(t \geq 0 : < M >_t \geq \theta^k) \in \mathcal{T}$, $k \geq 1$. Тогда на стохастическом интервале $]T_k, T_{k+1}[$

$$a_k + \lambda_k^{-1}\varphi_c(\lambda_k) < M >_t \leq a_k + \lambda_k^{-1}\varphi_c(\lambda_k)\theta^{k+1} \leq$$
$$\leq (\frac{1+\delta}{2} + \theta\lambda_k^{-2}\varphi_c(\lambda_k))(2 < M >_t \log\log < M >_t)^{1/2}. \tag{3.15}$$

Воспользовавшись теперь супермартингальным неравенством (3.13) с $\lambda = \lambda_k$ и $a = a_k$, получим

$$P\left(\sup_t (M_t - \lambda_k^{-1}\varphi_c(\lambda_k) < M >_t) > a_k\right) \leq (k\log\theta)^{-1-\delta}. \tag{3.16}$$

Из (3.15) и (3.16), ввиду классической леммы Бореля–Кантелли следует, что на множестве $(< M >_\infty = \infty)$

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} (2 < M >_t \log\log < M >_t)^{-1/2} M_t \leq \frac{1+\delta+\theta}{2} \quad \text{п. н.}, \tag{3.17}$$

так как $\lim\limits_{k\to\infty} \left((1+\delta)/2 + \theta\lambda_k^{-2}\varphi_c(\lambda_k)\right) = (1+\delta+\theta)/2$. Устремляя в (3.17) $\theta \downarrow 1$ и $\delta \downarrow 0$, приходим к нужному утверждению.

б) Предположим теперь, что $E\sup_t |\Delta M_t| < \infty$, $E\sup_t |\Delta^+ M_t| < \infty$, введем обозначения (см. [12])

$$S_t = \sup_{0<s\leq t} |\Delta M_s|, \qquad R_t = \sup_{0\leq s<t} |\Delta^+ M_s|,$$

$$V_t = \sum_{0<s\leq t} \Delta M_s I(|\Delta M_s| > 2S_{s-}); \quad W_t = \sum_{0\leq s<t} \Delta^+ M_s I(|\Delta^+ M_s| > 2R_s).$$

Если s таково, что $|\Delta M_s| > 2S_{s-}$, то, как легко видеть

$$2S_{s-} + \Delta V_s \leq 2|\Delta M_s| \leq 2S_s, \tag{3.18}$$

т. е. $\Delta V_s = \Delta M_s \leq 2\Delta S_s$. Аналогично, при $|\Delta^+ M_s| > 2R_s$ имеем

$$2R_s + \Delta^+ W_s \leq 2|\Delta^+ M_s| \leq 2R_{s+}, \tag{3.19}$$

т. е. $\Delta^+ W_s = \Delta^+ M_s \leq 2\Delta^+ R_s$. Из неравенств (3.18) и (3.19) заключаем, что

$$\operatorname*{Var}_{[0,\infty]} V \leq 2S_\infty, \quad \operatorname*{Var}_{[0,\infty]} W \leq 2R_\infty, \tag{3.20}$$

т. е. $V, W \in A$. Представим процессы V и W в виде $V = V^1 - V^2$, $W = W^1 - W^2$, где для $i = 1,2$ $V^i, W^i \in A^+$, причем V^i - càdlàg процессы, а W^i - càglàd процессы. Полагая, что $\widetilde{V}^i$ и $\widetilde{W}^i$ - компенсаторы процессов V^i и $W^i \in A^+$ (см. [7]), обозначим $\widetilde{V} = \widetilde{V}^1 - \widetilde{V}^2$ и $\widetilde{W} = \widetilde{W}^1 - \widetilde{W}^2$. Процесс $M \in M^2_{\rm loc}$ можно представить в виде

$$M = m^1 + m^2 + m, \tag{3.21}$$

где $m^1 = V - \widetilde{V} \in M^2_{\rm loc}$, $m^2 = W - \widetilde{W} \in M^2_{\rm loc}$ и $m = M - m^1 - m^2 \in M^2_{\rm loc}$, так что (см. [12], лемму 4)

$$|\Delta m| \le 4S_-, \qquad |\Delta^+ m| \le 4R. \tag{3.22}$$

Кроме того (см. [12], лемму 5), имеют место неравенства

$$E[m^1, m^1]^{1/2}_\infty \le \sum_{0<s<\infty} |\Delta m^1_s| \le E(\operatorname*{Var}_{[0,\infty]} V + \operatorname*{Var}_{[0,\infty]} \widetilde{V}) \le 4ES_\infty, \tag{3.23}$$

$$E[m^2, m^2]^{1/2}_\infty \le \sum_{0<s<\infty} |\Delta^+ m^2_s| \le E(\operatorname*{Var}_{[0,\infty]} W + \operatorname*{Var}_{[0,\infty]} \widetilde{W}) \le 4ER_\infty. \tag{3.24}$$

Из этих неравенств следует, что

$$[m^1, m^1]_\infty < \infty, \qquad [m^2, m^2]_\infty < \infty \quad \text{п. н.}, \tag{3.25}$$

$$E|\Delta m^1| < \infty, \qquad E|\Delta^+ m^2| < \infty. \tag{3.26}$$

Применяя теперь теорему 2.1, из (3.25) и (3.26) получим, что процессы m^1 и m^2 имеют п. н. конечные финальные значения

$$m^1_\infty < \infty, \qquad m^2_\infty < \infty. \tag{3.27}$$

С другой стороны

$$m^1 m^r - < m^1, m^r > \in M_{\rm loc}, \tag{3.28}$$

$$m^2 m^g - < m^2, m^g > \in M_{\rm loc}, \tag{3.29}$$

где $m^r = M^r - m^1$, $m^g = M^g - m^2$, $< m^1, m^r > \in \mathcal{P} \cap A_{loc}$ и $< m^2, m^g > \in \mathcal{P}_s \cap A_{loc}$ (см. [5]). Напомним теперь (см. [11] и [7]), что для любого процесса $N \in M_{loc}$, для всех $S \in \mathcal{T}_p$ на множестве $(S < \infty)$

$$^p(\Delta N)_S = E\left[\Delta N_S | \mathcal{F}_{S-}\right] = 0. \tag{3.30}$$

Аналогично, для всех $T \in \mathcal{T}$ на множестве $(T < \infty)$

$$^o(\Delta^+ N)_T = E\left[\Delta^+ N_T | \mathcal{F}_T\right] = 0, \tag{3.31}$$

где $^p(\Delta N)$ и $^o(\Delta^+ N)$ соответственно – предсказуемая и опциональная проекции процессов ΔN и $\Delta^+ N$. Пользуясь (3.28), (3.30) и (3.18), получим, что

$$\begin{aligned}
\Delta < m^1, m^r >_S &= E\left[\Delta m^1_S \Delta m^r_S | \mathcal{F}_{S-}\right] = \\
&= E\left[(\Delta V_S - E[\Delta V_S|\mathcal{F}_{S-}])\,(\Delta M_S - \Delta V_S + E[\Delta V_S|\mathcal{F}_{S-}])|\mathcal{F}_{S-}\right] = \\
&= E\left[(\Delta M_S - \Delta V_S)\,\Delta V_S|\mathcal{F}_{S-}\right] + (E[\Delta V_S|\mathcal{F}_{S-}])^2 = (E[\Delta V_S|\mathcal{F}_{S-}])^2 \geq 0
\end{aligned} \tag{3.32}$$

для всех $S \in \mathcal{T}_p$ на множестве $(S < \infty)$. Аналогично, из (3.29), (3.31) и (3.19) заключаем, что

$$\begin{aligned}
\Delta^+ < m^2, m^g >_T &= E\left[\Delta^+ m^2_T \Delta^+ m^g_T | \mathcal{F}_T\right] = \\
&= E\left[(\Delta^+ W_T - E[\Delta^+ W_T|\mathcal{F}_T])\,(\Delta^+ M_T - \Delta^+ W_T + E[\Delta^+ W_T|\mathcal{F}_T])|\mathcal{F}_T\right] = \\
&= E\left[(\Delta^+ M_T - \Delta^+ W_T)\,\Delta^+ W_T|\mathcal{F}_T\right] + \left(E[\Delta^+ W_T|\mathcal{F}_T]\right)^2 = \\
&= \left(E[\Delta^+ W_T|\mathcal{F}_T]\right)^2 \geq 0
\end{aligned} \tag{3.33}$$

для всех $T \in \mathcal{T}$ на множестве $(T < \infty)$. Из (3.32) и (3.33) следуют включения $< m^1, m^r >, < m^2, m^g > \in V^+$ а по (3.21)

$$< M > \geq < m > . \tag{3.34}$$

Полагая $T_n = \inf(t > 0 : S_{t-} \geq n$ или $R_t \geq n) \in \mathcal{T}_+$, $n \geq 1$ и пользуясь для мартингала m утверждением теоремы, доказанным в случае а) ($\Delta M \leq c$,

$\Delta^+ M \leq c$, $c > 0$), ввиду (3.22) получим

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} (2 < m >_t \log\log < m >_t)^{-1/2} m_t \leq 1 \quad \text{п. н.}$$

$$\text{на множестве} \quad (< m >_\infty = \infty) \cap (T_n = \infty). \tag{3.35}$$

Далее, так как $\Omega = \cup_n (T_n = \infty)$, то, ввиду (3.21), (3.27), (3.34), (3.35), на множестве $(< m >_\infty = \infty)$ имеем

$$\begin{aligned}
&\overline{\lim_{t\to\infty}} (2 < M >_t \log\log < M >_t)^{-1/2} M_t \leq \\
&\leq \overline{\lim_{t\to\infty}} \Big[(2 < m >_t \log\log < m >_t)^{-1/2} m_t + \\
&\quad + (2 < M >_t \log\log < M >_t)^{-1/2} (m_t^1 + m_t^2)\Big] \leq \\
&\leq \overline{\lim_{t\to\infty}} (2 < m >_t \log\log < m >_t)^{-1/2} m_t \leq 1.
\end{aligned} \tag{3.36}$$

С другой стороны, на множестве $(< m >_\infty < \infty) \cap (< M >_\infty = \infty)$

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} (2 < M >_t \log\log < M >_t)^{-1/2} M_t = 0 \quad \text{п. н.}, \tag{3.37}$$

поскольку, согласно теореме 2.2, $(< m >_\infty < \infty) \subseteq (m \to)$ п. н. . Теперь утверждение теоремы непосредственно следует из (3.36) и (3.37).

Доказательство теоремы 3.2. а) Сначала предположим, что $|\Delta M| \leq C$, $|\Delta^+ M| \leq C$ $(C > 0)$. Тогда, применяя лемму 3.4 с $A = [M, M]$ получим, что на множестве $([M, M]_\infty = \infty) = (< M >_\infty = \infty)$

$$[M, M]_t < M >_t^{-1} \to 1 \quad \text{п. н. при } t \to \infty. \tag{3.38}$$

В силу теоремы 3.1 и (3.38), на множестве $([M, M]_\infty = \infty) = (< M >_\infty = \infty)$

$$\begin{aligned}
&\overline{\lim_{t\to\infty}} (2[M, M]_t \log\log[M, M]_t)^{-1/2} M_t = \\
&= \overline{\lim_{t\to\infty}} \Big[(2 < M >_t \log\log < M >_t)^{-1/2} M_t\Big] (2 < M >_t \log\log < M >_t)^{1/2} \times \\
&\quad \times (2[M, M]_t \log\log[M, M]_t)^{-1/2} \leq 1 \quad \text{п. н.}
\end{aligned}$$

б) Пусть теперь $E\sup_t|\Delta M_t| < \infty$ и $E\sup_t|\Delta^+ M_t| < \infty$. Тогда процесс $M \in M_{loc}$ допускает представление (3.21), где m^1, m^2, $m \in M_{loc}$ (см. [12]). Поэтому, заметив что

$$[m,m]_t = <M^c>_t + \sum_{s\le t}(\Delta m_s)^2 + \sum_{s<t}(\Delta^+ m_s)^2,$$

$$(\Delta m_s)^2 \le 2\left((\Delta M_s)^2 + (\Delta m_s^1)^2\right), \quad (\Delta^+ m_s)^2 \le 2\left((\Delta^+ M_s)^2 + (\Delta^+ m_s^2)^2\right),$$

получим

$$[m,m]_\infty^{1/2} \le \sqrt{2}\left([M,M]_\infty^{1/2} + [m^1,m^1]_\infty^{1/2} + [m^2,m^2]_\infty^{1/2}\right). \tag{3.39}$$

С другой стороны, из (3.21) следует, что

$$[M,M]_\infty^{1/2} \le [m,m]_\infty^{1/2} + [m^1,m^1]_\infty^{1/2} + [m^2,m^2]_\infty^{1/2}. \tag{3.40}$$

Тем самым, из (3.25), (3.39) и (3.40) получим, что $([m,m]_\infty = \infty) = ([M,M]_\infty = \infty$ п. н.. Положим $T_n = \inf(t > 0: 4S_{t-} \ge n$, или $4R_t \ge n) \in \mathcal{T}_+$, $n \ge 1$ и отметим, что ввиду представления (3.21)

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\,(2[M,M]_t\log\log[M,M]_t)^{-1/2} M_t =$$

$$= \overline{\lim_{t\to\infty}}\Big[(2[M,M]_t\log\log[M,M]_t)^{-1/2}(m_t^1 + m_t^2) + (2[m,m]_t\log\log[m,m]_t)^{-1/2}\times$$

$$\times m_t\,(2[m,m]_t\log\log[m,m]_t)^{1/2}(2[M,M]_t\log\log[M,M]_t)^{-1/2}\Big]. \tag{3.41}$$

Далее, рассмотрим равенство (3.41) на множестве $([M,M]_\infty = \infty)\cap(T_n = \infty)$. В силу (3.27) первое слагаемое правой части (3.41) равняется нулю. С другой стороны, ясно, что

$$[M,M]^{-1}[m,m] = [M,M]^{-1}[M - m^1 - m^2, M - m^1 - m^2] =$$

$$= [M,M]^{-1}\left(<M^c> + \sum_{s\le\cdot}\Delta(M_s - m_s^1)^2 + \sum_{s<\cdot}\Delta^+(M_s - m_s^2)^2\right) =$$

$$= [M,M]^{-1}\left([M,M] + [m^1,m^1] + [m^2,m^2] - 2([M,m^1] + [M,m^2])\right). \tag{3.42}$$

Однако, в силу неравенства Кунита–Ватанабе (см. [5], теорему 6.2)

$$[M,M]^{-1}\left([M,m^1]+[M,m^2]\right)\leq [M,M]^{-1/2}\left([m^1,m^1]^{1/2}+[m^2,m^2]^{1/2}\right). \quad (3.43)$$

Тем самым, воспользовавшись (3.25) и (3.43), из (3.42) заключаем, что на множестве $([M,M]_\infty=\infty)$

$$[M,M]_t^{-1}[m,m]_t\to 1 \quad \text{п. н.} \quad \text{при} \quad t\to\infty. \quad (3.44)$$

Кроме того, на множестве $([M,M]_\infty=\infty)\cap(T_n=\infty)$ имеем $|\Delta m|\leq n$, $|\Delta^+m|\leq n$. Поэтому, имея в виду (3.44) и пользуясь утверждением теоремы, доказанным в случае а) ($|\Delta M|\leq C$, $|\Delta^+M|\leq C, C>0$) для мартингала m, получаем, что второе слагаемое правой части (3.41) не превосходит единицы. Для завершения доказательства теоремы 3.2 остается заметить, что $\Omega=\cup_n(T_n=\infty)$.

ABSTRACT. The paper presents a characterization of the set of convergence for optional local martingales in (strong) predictable terms, extending to the optional case the facts received by Yu. M. Kabanov, R. S. Liptser and A. N. Shiryaev in [8] for càdlàg martingales. The iterated logarithm laws for local and locally square–integrable optional martingales are obtained. The proofs follow the well–known scheme of D. Lepingle [9] using auxiliary exponential supermartingales and a modification of Borel Cantelli lemma.

ЛИТЕРАТУРА

1. K. V. Gasparian, "On a strong law of large numbers for optional martingales", 5-th International Vilnius Conference on Probab. Theory and Mathem. Statist., Abstracts of Communic., Vilnius, no. 1, pp. 167 — 168, 1989.
2. К. В. Гаспарян, "Об асимптотическом поведении опциональных мартингалов", ДАН Армении, т. 93, № 5, стр. 212 — 219, 1992.
3. C. Dellacherie, "Deux remarques sur la separabilite optionnelle", Lecture Notes in Mathem., Seminaire de Probab., XI, 581, pp. 47 – 49, 1977.
4. Л. И. Гальчук, "О существовании опциональных модификаций для мартингалов", Теория вероятн. и ее примен., т 22. № 3, стр. 620 — 622, 1977.
5. Л. И. Гальчук, "Опциональные мартингалы", Матем. сб., т. 112 (154), № 4 (8), стр. 483 — 521, 1980.
6. Л. И. Гальчук, "Разложение опциональных супермартингалов", Матем. сб., т. 115 (167), № 2 (6), стр. 163 — 178, 1981.
7. Л. И. Гальчук, "Стохастические интегралы по опциональным мартингалам и случайные меры", Теория вероятн. и ее примен., т 29, № 1, стр. 93 — 107, 1984.

8. Ю. М. Кабанов, Р. Ш. Липцер, А. Н. Ширяев, "Абсолютная непрерывность и сингулярность локально абсолютно непрерывных вероятностных распределений (часть I)", Матем. сб., т. 107 (149), № 3 (11), стр. 364 — 415, 1978.
9. D. Lepingle, "Sur le comportement asymptotique des martingales locales," Lecture Notes in Mathem., Seminaire de Probab. XII, 649, pp. 148 — 161, 1978.
10. C. Dellacherie, "Sur la regularisation des surmartingales," Lecture Notes in Mathem., Seminaire de Probab., XI, 581, pp. 362 — 364, 1977.
11. Р. Ш. Липцер, А. Н. Ширяев, Теория мартингалов, Москва, Наука, 1986.
12. Л. И. Гальчук, "О неравенствах Ленгляра и Буркхольдера-Дэвиса-Ганди для опциональных мартингалов, Статистика и управ. случ. процессами", Сб. статей, Москва, Наука, стр. 24 — 28, 1989.
13. П. А. Майер, Вероятность и потенциалы, Москва, Мир 1973.
14. К. В. Гаспарян, "О мультипликативном разложении экспоненциальных семимартингалов", ДАН Армении, т. 86, № 2, стр. 67 — 70, 1988.

15 марта 1994

Ереванский государственный университет