СУПЕРГАРМОНИЧЕСКАЯ АППРОКСИМАЦИЯ НА ЗАМКНУТОМ МНОЖЕСТВЕ

Ч. Бенсуда, П. М. Готье

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 29, №3, 1994

Согласно принципу локализации, при локальной аппроксимации имеет место глобальная аппроксимация. В статье установлена такая теорема и рассмотрены некоторые ее следствия.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Равномерные и касательные аппроксимации на неограниченных множествах изначально исследовались в основном при аппроксимации аналитическими функциями Н. У. Аракеляном, А. А. Нерсесяном и другими (см., напр., Гаер [13]). Аналогичные задачи гармонической аппроксимации были рассмотрены А. А. Шагиняном и А. А. Нерсесяном. Результаты данной работы относятся как к гармонической, так и к субгармонической аппроксимациям.

Пусть Ω - направленная, связная, некомпактная риманова поверхность в C^∞. Пучок ростков непрерывных функций $\mathcal{H}$ и решений лапласиана индуцирует на Ω гармоническую структуру Брело (см. [3], пункт 8). Для любого подмножества $A \subset \Omega$ предположим, что $\overline{A}$, A^0, ∂A и A', соответственно, замыкание, внутренность, граница или тонкая внутренность A. Пусть $\mathcal{C}(A)$ и $\mathcal{H}(A)$, соответственно, пространства непрерывных функций на A и сужений на A функций, гармонических в окрестности A. Обозначим через $\mathcal{S}(A)$ (соответственно, через $\mathcal{S}_c(A)$) выпуклый конус сужений на A функций, которые в некоторой окрестности A

Данное исследование финансировано NSERC (Канада) и FCAR (Квебек).

супергармоничны (соотв. супергармоничны и непрерывны). Далее, положим

$$\mathcal{S}_0(A) := \{u \in \mathcal{C}(A) : u_{|_{A^0}} \in \mathcal{S}(A^0)\}$$

и

$$\mathcal{H}_0(A) := \{h \in \mathcal{C}(A) : h_{|_{A^0}} \in \mathcal{H}(A^0)\}.$$

Для любого семейства $\mathcal{F}(A)$ функций, определенных на A, обозначим через $\mathcal{F}^+(A)$ подсемейство (строго) положительных функций и через $\overline{\mathcal{F}}(A)$ — замыкание $\mathcal{F}(A) \cap \mathcal{C}(A)$ в $\mathcal{C}(A)$ в топологии равномерной сходимости. Будем говорить, что функция σ из C^2 является *(строго) супергармонической*, если ее лапласиан (строго) отрицателен.

Для любой области Ω комплексной плоскости А. А. Нерсесяном [31] были исследованы функции, непрерывные на множестве E, гармонические внутри и ограниченные на границе. С помощью гармонической меры он получил условие интегрируемости, при выполнении которого такие функции являются пределами функций, гармонических на всем Ω. Следующая теорема является теоремой типа локализации.

Теорема 1 (о локализации [19]). *Пусть E – замкнутое множество из Ω и u – функция, определенная на E. Если каждая точка $x \in E$ обладает окрестностью $V_x \subset \Omega$ такой, что $u_{|_{E \cap V_x}} \in \overline{\mathcal{S}_c}(E \cap V_x)$, то для любой строго супергармонической функции $\sigma \in \mathcal{S}^+(E)$ и любого $\varepsilon > 0$ существует $v \in \mathcal{S}_c(E)$ такое, что $|u - v| \leq \varepsilon\sigma$ на E.*

В силу принципа максимума (доказанная ниже теорема 5), утверждение теоремы 1 о локализации остается справедливым даже если вес σ попросту супергармоническая функция, а не строго супергармоническая функция. С другой стороны, тонкая теория потенциала дает иную характеристику функций, допускающих приближение. Тем самым, следующая теорема обладает двумя версиями – супергармонической и гармонической.

Теорема 2. *Пусть E – замкнутое множество из Ω и u - функция, определенная на E. Тогда следующие утверждения равносильны :*

(а) любая точка $x \in E$ обладает лежащей в Ω окрестностью V_x такой, что $u_{|E\cap V_x} \in \overline{S_c}(E \cap V_x)$ (соответственно, $u_{|E\cap V_x} \in \overline{\mathcal{H}}(E \cap V_x)$) ;

(б) для любых $s \in S^+(E)$ и $\varepsilon > 0$ существует $v \in S_c(E)$ (соответственно, $v \in \mathcal{H}(E)$), для которого $|u - v| \leq \varepsilon s$ на E ;

(в) $u \in \overline{S_c}(E)$ (соответственно, $u \in \overline{\mathcal{H}}(E)$) ;

(г) $u \in C(E)$ и $u_{|E'}$ супергармоническая (соотв. гармоническая) функция на внутренности E' в тонкой топологии.

Отметим, что в гармонической версии теоремы 2 эквивалентность *а* $\Leftrightarrow$ *в* позволяет распространить на замкнутые подмножества римановой поверхности результат, ранее установленный П. М. Готье, В. Хенгартнером и М. Лабёчем [21] для открытых множеств из $\mathbb{R}^m$ и для римановой поверхности. Эквивалентность *в* $\Leftrightarrow$ *г* установлена А. Дебайардом и Б. Гаве [11], для компактных множеств из $\mathbb{R}^m$. Они были позже установлены П. М. Готье и С. Ладусе [23] для замкнутых множеств из $\mathbb{R}^m$, а затем Т. Багби и П. Бланше [3] – для некоторой римановой поверхности. Эквивалентность *в* $\Leftrightarrow$ *г* как в супергармонической, так и в гармонической версиях была установлена для компактных множеств в аксиоматической теории Блайдтнером и Хансеном [8].

Из содержащейся в теореме 2 характеристики функций, допускающих приближение, вытекают некоторые следствия, унифицирующие последние результаты многих авторов. Будем говорить, что открытое множество U гриново, если оно обладает функцией Грина G_U. Отметим, что любое замкнутое множество, лежащее в Ω, имеет базис, состоящий из окрестностей Грина. Из теоремы 2 вытекает

Следствие 1. Условия теоремы 2 эквивалентны условию (д) для любой окрестности Грина U из E, любого $\varepsilon > 0$, и для любого $p \in U \setminus E$ существует $v \in \mathcal{S}_c(E)$ (соотв., $v \in \mathcal{H}(E)$), такое, что на E

$$|u - v| \leq \varepsilon \inf\{G_U(\cdot, p), 1\}.$$

В случае, когда Ω - область в комплексной плоскости, Н. У. Аракеляном [1, 2] была дана характеристика замкнутых множеств E, на которых любая непрерывная функция, голоморфная внутри, является равномерным пределом функций, голоморфных на всем Ω. В гармоническом случае А. А. Шагиняном [32] была дана характеристика пар (Ω, E), где Ω – область из $\mathbb{R}^m$, а E – замкнутое множество из Ω, для которого любая функция из $C(E)$ есть равномерный или весовой предел функций из $\mathcal{H}(\Omega)$. Недавно С. Дж. Гардинером [14] были исследованы супергармонический и гармонический случаи в $\mathbb{R}^m$. Будем говорить, что замкнутое множество $E \subset \Omega$ допускает равномерную супергармоническую (или гармоническую) аппроксимацию, если $\mathcal{S}_0(E) = \overline{\mathcal{S}_c}(E)$ (или $\mathcal{H}_0(E) = \overline{\mathcal{H}}(E)$). Такое множество допускает локально-равномерную супергармоническую (или гармоническую) аппроксимацию, если любая точка $x \in E$ обладает лежащей в Ω окрестностью V_x такой, что

$$\mathcal{S}_0(E \cap V_x) = \overline{\mathcal{S}_c}(E \cap V_x) \quad (\text{или} \quad \mathcal{H}_0(E \cap V_x) = \overline{\mathcal{H}}(E \cap V_x)).$$

В компактном случае замыкания ограниченных областей из $\mathbb{R}^m$, допускающие равномерную аппроксимацию, были описаны М. В. Келдышем [28] в 1941 году. В 1949 году Дж. Дени [10] получил ту же хатрактеристику для любого компактного множества $K \subset \mathbb{R}^m$, а именно : $\mathbb{R}^m \setminus K$ и $\mathbb{R}^m \setminus K^0$ должны быть разреженными в тех же точках. Будем говорить, что замкнутое множество $E \subset \Omega$ *келдышево*, если $\Omega \setminus E$ и $\Omega \setminus E^0$ являются разреженными в одних и тех же точках. В качестве второго следствия к теореме [2] мы характеризуем замкнутые множества, допускающие равномерную супергармоническую и гармоническую аппроксимации.

Теорема 3. *Пусть E – замкнутое множество из Ω. Тогда следующие утверждения равносильны :*

(а) E допускает локально-равномерную супергармоническую аппроксимацию ;

(б) E допускает равномерную супергармоническую аппроксимацию ;

(в) E допускает локально-равномерную гармоническую аппроксимацию ;

(г) E допускает равномерную гармоническую аппроксимацию ;

(д) E келдышево.

Отметим, что эквивалентность г $\Leftrightarrow$ *д* является обобщением результата Келдыша и Дени для случая замкнутых множеств. Эта эквивалентность была установлена для замкнутых множеств из $\mathbb{R}^m$ М. Лабрёчем [29] в 1982 году. Им также была дана другая версия этой характеризации в терминах емкости, обобщающая результат А. А. Гончара [24, 25]. Для компактных множеств из $\mathbb{R}^m$, допускающих равномерную гармоническую аппроксимацию, ими был получен результат, аналогичный теореме Витушкина [35] для компактных множеств из комплексной плоскости, допускающих голоморфную аппроксимацию. Связь между этими двумя результатами остается неясной [22]. Недавно эквивалентность г $\Leftrightarrow$ *д* была установлена Т. Багби и П. Бланше [3] для римановых поверхностей. Эквивалентности *б* $\Leftrightarrow$ г $\Leftrightarrow$ *д* были установлены для компактных множеств в аксиоматическй теории Дж. Блайдтнером и В. Хансеном [8, 26]. Эквивалентности *а* $\Leftrightarrow$ *в* $\Leftrightarrow$ *д* были доказаны Ч. Бенсудой [6] для замкнутых множеств в аксиоматической теории Брело.

Представляет интерес рассмотрение замкнутых множеств, допускающих как равномерную аппроксимацию, так и аппроксимацию с произвольным непрерывным весом. Т. Карлеманом [9] в 1927 было показано, что любая непрерывная на вещественной оси функция допускает равномерное приближение целыми функциями с любым непрерывным весом. В этом смысле $\mathbb{R}$ – множество Карлемана на комплексной плоскости. В случае, когда Ω есть область на плоскости, Н. У. Аракеляном [1, 2] дана характеристика замкнутых областей Карлемана с пустой внутренностью. Позже А. А. Нерсесян [30] характеризовал замкнутые множества Карлемана. При этом, он использовал условие C, введенное в 1969 (после Карлемана) П. М. Готье [18], называемое также *условием длинных островов* (см. [4]). Замкнутое множество $E \subset \Omega$ удовлетворяет условию C, если для любого компактного множества $K \subset \Omega$ существует компактное множество $Q \subset \Omega$ такое, что каждая связная компонента внутренности E°, имеющая непустое пересечение с K, содержится в Q. Ниже мы будем говорить, что замкнутое множество $E \subset \Omega$ допускает касательную супергармоническую (или гармоническую) аппроксимацию, если для любой непрерывной в E функции ε со значениями в $(0, 1]$ и любой функции $u \in \mathcal{S}_0(E)$ (или $u \in \mathcal{H}_0(E)$) существует функция $v \in \mathcal{S}_c(E)$ (или $v \in \mathcal{H}(E)$) такая, что $|u - v| \leq \varepsilon$ на E.

Третьим следствием теоремы 2 является характеристика множеств, допускающих касательную гармоническую аппроксимацию.

Теорема 4. *Пусть E – замкнутое множество из Ω. Тогда следующие утверждения равносильны :*

(α) E допускает касательную гармоническую аппроксимацию ;

(β) E допускает касательную гармоническую аппроксимацию и удовлетворяет условию C ;

(γ) E – келдышево замкнутое множество, удовлетворящее условию C.

В теореме 3 содержится эквивалентность $\beta \Leftrightarrow \gamma$. Недавно эквивалентность $\alpha \Leftrightarrow \gamma$ была доказана С. Дж. Гардинером [15] для замкнутых множеств из $\mathbb{R}^m$. Импликация $\gamma \Rightarrow \alpha$ показана в [17]. В силу леммы 2 и рассуждения о единственности (см. [17, 18]), импликация $\gamma \Rightarrow \alpha$ представляет собой следствие теорем 2 и 3. Ниже мы докажем $\alpha \Rightarrow \gamma$.

В [17] нами найдена также касательная супергармоническая (или гармоническая) сильная аппроксимация : для любой функции $u \in \mathcal{S}_0(E)$ (или $u \in \mathcal{H}_0(E)$) и любой непрерывной функции ε со значениями в $(0,1]$ существует функция $v \in \mathcal{S}_c(E)$ (или $v \in \mathcal{H}(E)$) такая, что $u < v < u + \varepsilon$ на E. Показано также, что условие γ эквивалентно двум следующим :

(а) E допускает касательную супергармоническую сильную аппроксимацию ;

(б) E допускает касательную гармоническую сильную аппроксимацию.

Таким образом, остается открытым вопрос – вытекает ли из возможности касательной супергармонической аппроксимации условие C о длинных островах ?

Для δ-супергармонических функций (разности двух супергармонических) рассуждение о единственности не верно. Поэтому, если ограничиваться замкнутыми множествами, удовлетворяющими условию C, то во всех допустимых случаях эквивалентны следующие утверждения :

(1) E допускает равномерную аппроксимацию ;

(2) E допускает касательную аппроксимацию ;

(3) E допускает касательную сильную аппроксимацию.

Это утверждение уже было доказано для некоторых замкнутых множеств, названных "chapelets" [7].

§2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И РЕЗУЛЬТАТЫ

Регулярная область R, лежащая в Ω, обладает функцией Грина G_R. Следуя Т. Багби и П. Бланше [3], обозначим

$$G_\Omega = \lim_{R \to \Omega} G_R,$$

где R меняется в классе регулярных областей из Ω. Если функция G_Ω тождественно не равняетс рить, что открытое множество U обладает функцией Грина, если любая компонента W области U обладает функцией Грина G_W. Тогда будем считать, что $G_U(p,q) = G_W(p,q)$, если p и q принадлежат одной и той же компоненте W, в противном случае положим $G_U(p,q) = 0$. Если R - регулярная область из Ω, то для любого положительного $\varphi \in C_0^\infty(R)$ функция

$$P_R^\varphi(x) := \int G_R(x,y)\varphi(y)\, d\nu(y) \quad (\forall x \in R),$$

где ν - емкостная мера на Ω [3], принадлежит C^∞ на R и ее лапласиан равен $-\varphi$ (см. [3, теорема 4.8]). Таким образом, P_R^φ супергармонична на R и гармонична вне носителя φ. P_R^φ называется *потенциалом Грина* φ на R. Отметим, что P_R^φ сходится к 0 на ∂R. Чтоб убедиться в этом, предположим, что V - компактная окрестность $\mathrm{supp}(\varphi)$ и $y_0 \in V$. Рассмотрим класс $\{G_R(x,\cdot) : x \in R \setminus V\}$ функций, гармонических на V. В силу неравенства Гарнака, существует постоянная $c > 0$ такая, что

$$G_R(x,y) \le c\, G_R(x,y_0) \quad (\forall y \in \mathrm{supp}(\varphi) \text{ и } \forall x \in R \setminus V).$$

Пусть Ω обладает функцией Грина G_Ω, и пусть величина $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ положительна. Рассмотрим исчерпывание $(R_j)_j$ области Ω регулярными областями. $\varphi \in C_0^\infty(R_j)$ для достаточно больших j. По теореме о монотонной сходимости, последовательность $(P_{R_j}^\varphi)_j$ сходится к пределу P_Ω^φ, названному потенциалом Грина φ на Ω. Отметим, что такие потенциалы на Ω обладают такими же свойствами, что и потенциалы регулярных областей. Далее напомним, что наибольшая гармоническая миноранта потенциала Грина - тождественный нуль.

Теорема 5 (Принцип максимума). *Если Ω обладает функцией Грина, то для любой положительной функции $\varphi \in C_0(\Omega)$ и любой функции $s \in S^+(\Omega)$*

$$P_\Omega^\varphi \le s \quad \text{на} \quad \mathrm{supp}(\varphi) \quad \Rightarrow \quad P_\Omega^\varphi \le s \quad \text{всюду на} \quad \Omega.$$

Доказательство. Пусть $K = \operatorname{supp}(\varphi)$, $x \in \Omega \setminus K$, и пусть регулярная область R представляет из себя окрестность $K \cup \{x\}$. Так как $P_R^\varphi \leq P_\Omega^\varphi$, то $P_R^\varphi \leq s$ на K. Ясно, что функция $s - P_R^\varphi$ супергармонична на $R \setminus K$ и положительна на $\partial(R \setminus K)$. По принципу минимума, эта функция положительна всюду на $R \setminus K$. В частности

$$P_R^\varphi(x) \leq s(x) \quad \text{при} \quad x \in R \setminus K. \tag{1}$$

Переходя к пределу (R сужается до Ω), получаем, что неравенство (1) справедливо на Ω вместо R.

Замечание 2. Если Ω обладает функцией Грина, то при любом $s \in S^+(\Omega)$ существует потенциал σ из C^∞, строго супергармоничный на Ω и такой, что $\sigma \leq s$ всюду на Ω.

Доказательство. Пусть $s \in S^+(\Omega)$. Рассмотрим разложение единицы $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ на Ω. При любом $n \geq 1$ существует положительная постоянная α_n такая, что

$$\alpha_n P_\Omega^{\varphi_n} \leq \inf(1, s)/2^n \quad \text{на} \quad \operatorname{supp}(\varphi_n).$$

По принципу максимума (теорема 5), (2) справедливо на всем Ω. Рассмотрим потенциал

$$\sigma := \sum_{n \geq 1} \alpha_n P_\Omega^{\varphi_n}.$$

Беря достаточно малое α_n, можем посчитать на любом листе производную почленно. Тем самым, лапласиан потенциала σ удовлетворяет условию

$$-\Delta\sigma = \sum_{n \geq 1} \alpha_n \varphi_n. \tag{3}$$

Так как $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ - разложение единицы из класса C^∞, правая сторона (3) есть локально-конечная сумма функций из C^∞. Следовательно, функция σ принадлежит C^∞, строго супергармонична, и s преобладает над ней на Ω.

Доказательство следующей леммы основано на технике, использованной С. Дж. Гардинером [14].

Лемма 1. *Пусть E – замкнутое множество, лежащее в Ω, $s \in \mathcal{S}^+(E)$, и f – вещественнозначная на E функция. Тогда следующие утверждения равносильны :*

(а) при любом $\varepsilon > 0$ существуют $v_+, v_- \in \mathcal{S}(E)$ такие, что

$$\begin{cases} f - \varepsilon\, s < v_+ < f + \varepsilon\, s & \text{на } E \\ -f - \varepsilon\, s < v_- < -f + \varepsilon\, s & \text{на } E; \end{cases}$$

(б) при любом $\varepsilon > 0$ существует $h \in \mathcal{H}(E)$ такое, что

$$f - \varepsilon\, s < h < f + \varepsilon\, s \quad \text{на } E.$$

Доказательство. Пусть выполнено (а). Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существуют $v_+, v_- \in \mathcal{S}(E)$ такие, что

$$\begin{cases} f - \frac{\varepsilon}{4}\, s < v_+ < f + \frac{\varepsilon}{4}\, s & \text{на } E \\ -f - \frac{\varepsilon}{4}\, s < v_- < -f + \frac{\varepsilon}{4}\, s & \text{на } E. \end{cases}$$

В частности

$$0 < v_+ + v_- + \frac{\varepsilon}{2}\, s \quad \text{на } E. \tag{4}$$

Так как $v_+ + v_- + \frac{\varepsilon}{2}\, s$ есть непрерывная снизу функция на E, то существует окрестность W множества E, на которой справедливо (4). Тем самым, функция $-(v_- + \frac{\varepsilon}{4}s)$ субгармонична и миноризирует функцию $v_+ + \frac{\varepsilon}{4}s$, супергармоническую на W. Далее, существует $h \in \mathcal{H}(W)$ такое, что

$$-(v_- + \frac{\varepsilon}{4}s) \le h \le v_+ + \frac{\varepsilon}{4}s \quad \text{на } W.$$

При $x \in E$ имеем

$$h(x) - f(x) = (h(x) - v_+(x)) + (v_+(x) - f(x)) \le \frac{\varepsilon}{2}\, s(x) < \varepsilon\, s(x),$$

$$h(x) - f(x) = (h(x) + v_-(x)) - (v_-(x) + f(x)) \ge -\frac{\varepsilon}{2}\, s(x) > -\varepsilon\, s(x).$$

Следовательно, $h \in \mathcal{H}(E)$ и $f - \varepsilon\, s < h < f + \varepsilon\, s$ на E. Обратное утверждение следует непосредственно, если подставить $v_+ = h$ и $v_- = -h$.

В завершение этого параграфа приведем еще два результата. Нижеследующая лемма 2, устанавливающая в некотором смысле единственность (см. [18]), была доказана в $\mathbb{R}^m$ С. Дж. Гардинером [15]. Тем же способом ее утверждение может быть доказано для римановых поверхностей. В более общей формулировке нами она доказана в [17].

Лемма 2. *Пусть E – замкнутое множество, лежащее в Ω. Если для любой функции ε, непрерывной в E и со значениями в $(0,1]$, существует $s \in S^+(E)$ такое, что $0 < s \leq \varepsilon$ на E, то E удовлетворяет условию C.*

Второй результат – нижеприведенная теорема, доказанная Дж. Блайдтнером и В. Хансеном [8] в общей формулировке (см. [12]).

Теорема 6. *Пусть E - компактное множество, лежащее в Ω, и пусть u – функция, определенная на E. Тогда следующие утверждения равносильны :*

(а) $u \in \overline{S}_c(E)$ (соотв., $u \in \overline{\mathcal{H}}(E)$).

(б) $u \in \mathcal{C}(E)$ и $u_{|_{E'}}$ супергармонично (соотв., гармонично) на внутренности E' в тонкой топологии.

§3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

Доказательство супергармонического случая теоремы 2.

а $\Rightarrow$ *б* является прямым следствием теоремы 1 локализации и замечания 2, так как любое правильное, замкнутое множество, лежащее в Ω, имеет окрестность U, обладающую функцией Грина.

б $\Rightarrow$ *в* легко следует, если в качестве весовой функции s взять постоянную (например, $s = 1$).

в $\Rightarrow$ *а* тривиально.

а $\Rightarrow$ г. Если справедливо утверждение (а), то ясно, что $u \in \mathcal{C}(E)$. Пусть $x \in$ $\in E'$. Тогда существует компактная окрестность W_x точки x такая, что $u_{|E \cap W_x} \in$

$\in \overline{S}_c(E \cap W_x)$. Поскольку $E \cap W_x$ – компакт, то по теореме 6 функция $u|_{(E\cap W_x)'}$ супергармонична на $(E \cap W_x)'$ в тонкой топологии. Тем самым, u супергармонична в тонкой окрестности x. Так как x – произвольная точка из E', отсюда следует утверждение (г).

г $\Rightarrow$ *а*. Пусть справедливо утверждение (г), пусть $x \in E$ и V_x – компактная окрестность x. Тогда $E \cap V_x$ – компакт, и функция $u|_{(E\cap V_x)'}$ супергармонична на $(E \cap V_x)'$ в тонкой топологии. По теореме 6, $u|_{E\cap V_x} \in \overline{S}_c(E \cap V_x)$, и утверждение (а) справедливо ввиду того, что x – произвольная точка из E.

Доказательство гармонического случая теоремы 2. Импликации *б* $\Rightarrow$ *в* $\Rightarrow$ *а* тривиальны, а эквивалентность *а* $\Leftrightarrow$ *г* та же, что в супергармоническом случае.

а $\Rightarrow$ *б*. Пусть справедливо утверждение (а). Тогда для любой точки $x \in E$ существует окрестность V_x такая, что $\pm u|_{(E\cap V_x)} \in \overline{S}_c(E \cap V_x)$. Предположим, что $s \in S^+(E)$ и $\varepsilon > 0$. Тогда из супергармонического случая (б) следует, что существует $v_+, v_- \in S_c(E)$ такое, что

$$\begin{cases} u - \varepsilon \inf(s, 1) < v_+ < u + \varepsilon \inf(s, 1) & \text{на } E, \\ -u - \varepsilon \inf(s, 1) < v_- < -u + \varepsilon \inf(s, 1) & \text{на } E. \end{cases}$$

В силу леммы 1 существует $h \in \mathcal{H}(E)$ такое, что $u - \varepsilon \inf(s, 1) < h < u + \varepsilon \inf(s, 1)$ на E. Следовательно, $|u - h| \leq \varepsilon\, s$ на E. Гармонический случай утверждения (б) доказан.

Доказательство теоремы 3. Отметим, что эквивалентности *а* $\Leftrightarrow$ *в* $\Leftrightarrow$ *г* $\Leftrightarrow$ *д* установлены в [3] и [5].

д $\Rightarrow$ *б*. Пусть верно (д). Если $u \in S_0(E)$, то $u \in C(E)$ и, в силу теоремы 2, достаточно показать, что $u|_{E'}$ супергармонична на E' в тонкой топологии. Для этого предположим, что $x \in E'$. Тогда E – окрестность x и $\Omega \setminus E$ разрежена в x. По (д) то же самое верно для $\Omega \setminus E^0$. Следовательно, $E^0 \setminus \{x\}$ – тонкая проколотая окрестность x. Так как функция u непрерывна, то она локально ограничена. Далее, поскольку изолированная точка $\{x\}$ – полярное множество в Ω, то по теореме об устранимой особенности супергармонических функций u обладает супергармоническим продолжением в x. Так как функция u определена и непрерывна в x, то она является продолжением самой себя. Поэтому u супергармонична в x. Далее, так как x произвольно в E', то $u|_{E'}$ – супергармонична на E'. Из теоремы 2 следует, что $u \in \overline{S}_c(E)$. Утверждение (б) справедливо, поскольку u произвольно в $S_0(E)$.

б $\Rightarrow$ *г*. Пусть верно (б). Предположим, что $\varepsilon > 0$ и $f \in \mathcal{H}_0(E)$. Так как $\pm f \in \overline{S}_c(E)$, то существуют $v_+, v_- \in S_c(E)$ такие, что

$$\begin{cases} f - \varepsilon < v_+ < f + \varepsilon & \text{на } E, \\ -f - \varepsilon < v_- < -f + \varepsilon & \text{на } E. \end{cases}$$

В силу леммы 1 существует $h \in \mathcal{H}(E)$, для которого

$$f - \varepsilon < h < u + \varepsilon \quad \text{на } E.$$

Следовательно, $|f - h| \leq \varepsilon$ на E. Отсюда заключаем, что $f \in \overline{\mathcal{H}}(E)$. Поскольку f произвольно в $\mathcal{H}_0(E)$, утверждение (г) доказано.

Доказательство теоремы 4.

$\gamma \Leftrightarrow \beta \Rightarrow \alpha$ в силу теорем 2, 3 и леммы 2.

$\alpha \Rightarrow \gamma$. Любое замкнутое множество, допускающее касательную гармоническую аппроксимацию, необходимо допускает равномерную гармоническую аппроксимацию и, по теореме 3, оно келдышево. Тем самым, остается доказать необходимость условия C. Будем исходить из обратного. Предположим, что E – правильное, замкнутое множество, лежащее в Ω, но не удовлетворяющее условию C.

Этап 1 : существуют компактное множество L, исчерпание компактных множеств $(K_n)_{n \geq 1}$ и последовательность связных компонент $(\Gamma_n)_{n \geq 1}$ из E^0 такие, что

2) $K_n \subset K^0_{n+1}$ $(\forall n \geq 1)$,

3) $\Omega = \bigcup_{n\geq 1} K_n$,

4) $L \cap \Gamma_n \neq \emptyset$ и $\Gamma_n \setminus K_n \neq \emptyset$ $(\forall n \geq 1)$.

Таким образом, если игнорировать некоторую подпоследовательность, то существуют последовательность $(x_n)_{n\geq 1}$ из $E \cap L$, сходящаяся к x_0, и последовательность $(V_n)_{n\geq 1}$ открытых множеств таких, что $x_n \in L \cap \Gamma_n$ и $V_n \subset \Gamma_n \setminus K_n$ при любом $n \geq 1$. Пусть $h \in \mathcal{H}(E)$. Тогда существует шар B, т. е. параметрическая окрестность x_0, такой, что $h \in \mathcal{H}(B)$. Следуя Т. Багби и П. М. Готье [5], заключаем, что для любого $n \geq 1$ существует $\delta_n > 0$ такое, что

$$\sup_{V_n} |h| < \delta_n \Rightarrow |D^\alpha h(x_n)| < 1/n \quad (\forall |\alpha| \leq n).$$

Следовательно, $D^\alpha h(x_0) = 0$ для любого мультииндекса α. Отсюда вытекает, что h - тождественный ноль на B. Что касается последовательности $(\delta_n)_{n\geq 1}$ на E, существует непрерывная функция ε со значениями в $(0, 1]$ такая, что $\varepsilon < \delta_n$ на V_n $(\forall n \geq 1)$.

Этап 2. Пусть Ω_0 - окрестность E, обладающая функцией Грина G_0. Рассмотрим последовательность $(a_n)_{n\geq 1}$ из $\Omega_0 \setminus E$ такую, что любая точка из ∂E - предельная точка последовательности $(a_n)_{n\geq 1}$. Существует последовательность $(\beta_n)_{n\geq 1}$ такая, что ряд $\sum_{n\geq 1} \beta_n G_0(x, a_n)$ равномерно сходится на любом компактном множестве, лежащем в E. Тогда этот ряд задает функцию $f \in \mathcal{H}_0(E)$ и не допускает гармонического продолжения в окрестность любой точки из ∂E. Поскольку E допускает касательную гармоническую аппроксимацию, то существует $h_1 \in \mathcal{H}(E)$ такое, что $|f - h_1| < \varepsilon/2$ на E. Так как $h_1 \neq f$ на $B \cap E$, то существует $y \in B \cap E$ такое, что $f(y) \neq h_1(y)$. Аналогично, существует $h_2 \in \mathcal{H}(E)$ такое, что

$$|f - h_2| < \frac{1}{2}\{\inf(\varepsilon, |f(y) - h_1(y)|)\} \quad \text{на } E.$$

Следовательно, $|h_1 - h_2| < \varepsilon$ на E, т. е. $h_1 = h_2$ на B. Поэтому $|f(y) - h_1(y)| <$

$< |f(y) - h_1(y)|$, и получаем противоречие. Таким образом, условие C необходимо удовлетворено.

ABSTRACT. According to the localization principle, local approximation implies global approximation. We state a theorem in this direction as well as several corollaries.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. У. Аракелян, "Равномерная аппроксимация целыми функциями на замкнутых множествах", Изв. Акад. Наук СССР, сер. матем. т. 28, стр. 1187 – 1206, 1964.
2. Н. У. Аракелян, "Равномерная и касательная аппроксимация аналитическими функциями", Изв. АН Арм. ССР, Математика, т. 3, №5, стр. 273 – 286, 1968.
3. T. Bagby, P. Blanchet, "Uniform harmonic approximation on Riemannian manifolds", J. d'Analyse Math., (to appear).
4. T. Bagby, P. M. Gauthier, "Approximation by harmonic functions on closed subsets of Riemann surfaces", J. d'Analyse Math., vol. 51, pp. 259 – 284, 1988.
5. T. Bagby, P. M. Gauthier, "Tangential harmonic approximation on Riemannian manifolds : Necessary conditions", (preprint).
6. Ch. Bensouda, "Approximation harmonique sur les fermés en théorie axiomatique de Brelot", Thèse, Université Mohamed V, faculté des sciences de Rabat, Maroc, 1988.
7. Ch. Bensouda, "Approximation tangentielle sur les fermés d'un espace harmonique de Brelot", Izv. AN Armenii, Matematika, [Journal of Contemporary Mathematical Analysis (Armenian Academy of Sciences), vol. 29, no. 1, pp. 13 – 28, 1994].
8. J. Bliedtner, W. Hansen, "Simplicial cones in potential theory", I, Inventiones Math., vol. 29, pp. 83 – 110, 1975; II, vol. 46, pp. 255 – 275, 1978.
9. T. Carleman, "Sur un théorème de Weierstrass", Ark. Mat. Astronom. Fys. vol. 20, pp. 1 – 5, 1927.
10. J. Deny, "Systèmes totaux de fonctions harmoniques", Ann. Inst. Fourier (Grenoble), vol. 103, no. 1, pp. 103 – 113, 1949.
11. A. Debiard, B. Gaveau, "Potentiel fin and algèbres de fonctions analytiques", I, J. Functional Anal., vol. 16, pp. 289 – 304, 1974; II, vol. 17, pp. 296 – 310, 1974.
12. B. Fuglede, "Fine potential theory", Lecture Notes in Math., no. 1344, Proceeding, Prague, pp. 81 – 97, Springer, Berlin, 1988.
13. A. Gaier, Lectures on Complex Approximation, Birkhauser, 1987.
14. S. J. Gardiner, "Superharmonic extension and harmonic approximation", (preprint).
15. S. J. Gardiner, "Tangential harmonic approximation on relatively closed sets", (preprint).
16. S. J. Gardiner, "Harmonic Approximation", (preprint).
17. S. J. Gardiner, M. Goldstein, K. N. Gowrisankaran, "Tangential approximation in harmonic spaces", Illinois Journal of Mathematics, (to appear).
18. P. M. Gauthier, "Tangential approximation by entire functions and functins holomorphic in a disc", Izv. AN Arm.SSR, Matematika, vol. 4, pp. 319 – 326, 1969.
19. P. M. Gauthier, "Approximation by (pluri) subharmonic functions : fusion and localization", Canad. J. Math., vol. 44, pp. 941 – 950, 1992.
20. P. M. Gauthier, "Uniform approximation : holomorphic, harmonic, subharmonic",

Proc. Nankai Institute, International Press (to appear).
21. P. M. Gauthier, W. Hengartner, "Approximation uniforme qualitative sur des ensembles non bornés", Presses Univ. Montréal, 1982.
22. P. M. Gauthier, W. Hengartner, M. Labrèche, "Approximation harmonique, approximation holomorphe et topologie", Canad. J. Math., vol. 34, pp. 216 – 219, 1982.
23. P. M. Gauthier, S. Ladouceur, "Uniform approximation and fine potential theory", J. Approx. Theory, vol. 2, pp. 138 – 140, 1993.
24. А. А. Гончар, "Аппроксимация непрерывных функций гармоническими функциями", ДАН СССР, т. 154, стр. 503 – 506, 1964.
25. А. А. Гончар, "Свойство "нестабильности" гармонической меры", ДАН СССР, т. 165, стр. 479 – 481, 1965.
26. W. Hansen, "Harmonic and superharmonic functions on compact sets", Illinois Journal of Mathematics, vol. 29, pp. 103 – 107, 1985.
27. М. В. Келдыш, М. А. Лаврентьев, "Sur une probleme de M. Carleman", Dokl. Akad. Nauk SSSR, vol. 23, pp. 746 – 748, 1939.
28. М. В. Келдыш, "О разрешимости и стабильности задачи Дирихле", УМН, т. 8, стр. 171 - 231, 1941.
29. M. Labrèche, "De l'approximation harmonique", Thèse, Université de Montréal, Canada, 1982.
30. А. А. Нерсесян, "О множествах Карлемана", Изв. АН Арм. ССР, Математика, т. 6, № 6, стр. 465 – 471, 1971.
31. А. А. Нерсесян, "Аппроксимация гармоническими функциями на замкнутых подмножествах плоских областей", Изв. АН Армении, Математика, т. 25, № 4, стр. 274 – 283, 1990.
32. А. А. Шагинян, "О равномерной и касательной гармонической аппроксимации непрерывных функций на произвольных множествах", Матем. заметки., т. 2, стр. 131 – 142, 1971.
33. А. Г. Витушкин, "Необходимые и достаточные условия на множество, при которых любая непрерывная функция, аналитическая во внутренних точках множества может допускать равномерную аппроксимацию рациональными функциями", ДАН СССР, т. 7, стр. 1622 – 1625, 1966.

25 сентября 1993

Монреальский университет,
Монреаль, Квебек, Канада