ТЕОРЕМЫ ВЛОЖЕНИЯ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ

А. Г. Багдасарян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 29, №3, 1994

В статье доказаны теоремы вложения для пространств типа B и F Никольского–Бесова и Лизоркина–Трибеля. Найдены необходимые и достаточные условия для таких вложений, а также вложений рассмотренных пространств типа B и F в пространство C непрерывных функций. Доказана теорема о следах функций пространства типа B, а также пространства H типа Соболева–Лиувилля, порожденных некоторым, вполне правильным многогранником, удовлетворяющим единственно условию, что n-ые координаты вершин вне $\mathbb{R}_{n-1}$ должны быть больше, чем $1/p$.

§0. ВВЕДЕНИЕ

Настоящая статья посвящена установлению теорем вложения разных метрик и разных измерений для обобщенных пространств $H_p^s(\mu;\mathbb{R}_n)$ типа Соболева–Лиувилля, $B_{p,q}^s(\mu;\mathbb{R}_n)$ типа Никольского–Бесова и $F_{p,q}^s(\mu;\mathbb{R}_n)$ типа Лизоркина–Трибеля, порожденных некоторыми весовыми функциями $\mu(\xi)$. В дальнейшем, для краткости, эти пространства будем называть пространствами типов H, B и F, соответственно. Отметим, что при $\mu(\xi) = |\xi|$ эти пространства совпадают с соответствующими классическими пространствами.

Для пространств Соболева W_p^s первые результаты о вложениях были получены С. Л. Соболевым [1]. Для пространств Никольского–Бесова $B_{p,q}^s$ теоремы вложения были доказаны С. М. Никольским [2,3] (при $q = \infty$) и О. В. Бесовым [4,5] (при $1 \leq q < \infty$). Эти результаты были применены в теории краевых задач для эллиптических дифференциальных операторов. Тем не менее, исследование краевых задач для общих регулярных операторов требует рассмотрения пространств типа Соболева–Лиувилля и Никольского–Бесова, порожденных вполне правильными многогранниками, зависящими от начального оператора (см. [6]). Пространства типа H ранее были исследованы в [7], пространства типа B — в [8,9].

В данной статье доказаны некоторые теоремы вложения разных метрик для пространств типов H и B, а также теорема о вложении пространств типа H и B в пространство $\mathbf{C}$ непрерывных функций. Доказана независимость нулевых классов от порождающих функций.

В §3 доказана теорема о следах для функций пространств $H_p^1(\mu;\mathbb{R}_n)$ и $B_{p,q}^1(\mu;\mathbb{R}_n)$, порожденных вполне правильным многогранником, удовлетворяющим условию о том, что n-ые координаты вершин вне R_{n-1} больше $1/p$. Это условие в некотором смысле является также необходимым. Оказывается, что пространство следов зависит только от проекции порождающего многогранника на $\mathbb{R}_{n-1}$ и от его вершин, ближайших к $\mathbb{R}_{n-1}$.

§1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Будем пользоваться следующими обозначениями : $\mathbb{R}_n$ – n-мерное евклидово пространство, $\mathbb{Z}_n^+$ – множество мультииндексов, т. е. векторов $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ с целыми, неотрицательными компонентами. При $\xi \in \mathbb{R}_n$, $\alpha \in \mathbb{Z}_n^+$, положим

$$\xi^\alpha = \prod_{i=1}^n \xi_i^{\alpha_i}, \quad |\xi| = \left(\sum_{i=1}^n \xi_i^2\right)^{1/2}, \quad D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n}.$$

$$\overset{+}{\mathbb{R}}_n = \{x;\ x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}_n;\quad x_i \geq 0,\ i = 1, 2, ..., n\}.$$

Определение 1. G_0^+ — множество положительных функций $\mu(\xi)$, бесконечно дифференцируемых вне начала координат, таких, что $\lim\limits_{|\xi|\to 0} \mu(\xi) = 0$ и

$$|\xi^\alpha D^\alpha \mu(\xi)| \leq c\mu(\xi), \quad 1 + \mu(\xi) \geq c'(1 + |\xi|^r), \tag{1}$$

где c, c' и r – положительные постоянные.

Нетрудно убедиться, что для функций из G_0^+ наряду с (1) выполнены соотношения $\lim_{|\xi|\to\infty}\mu(\xi)=\infty$, $\mu(\xi)\le c''(1+|\xi|)^{r'}$, $c'', r'>0$.

Всюду ниже через c будем обозначать различные постоянные.

Определение 2. Пусть $1<p,\ q<\infty$, F – оператор преобразования Фурье и S – класс Шварца. Обозначим через $\Phi_{p,q}(\mu;\mathbb{R}_n)$ множество систем функций $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$, обладающих следующими свойствами :

а) $\varphi_k\in S(\mathbb{R}_n)$, $(F\varphi_k)(\xi)\ge 0$, $\quad k=0,1,\dots;$

б) $\operatorname{supp}F\varphi_k\subset\left\{\xi\in\mathbb{R}_n;2^{k-1}\le\mu(\xi)\le 2^{k+1}\right\}$, $k=1,2,\dots,$

$\operatorname{supp}F\varphi_0\subset\{\xi\in\mathbb{R}_n;\mu(\xi)\le 2\}$;

в) $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(F\varphi_k)(\xi)=1,\ \xi\in\mathbb{R}_n$;

г) $\{F\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}\in M_{p,q}$. (2)

Отметим, что условие г) означает, что оператор $T:Tf=F^{-1}\{F\varphi_kFf\}$ ($f=\{f_k\}_{k=0}^{\infty}\in L_p(l_q)$, $f_k\in S$, $k=0,1,\dots$) допускает расширение до непрерывного оператора из $L_p(l_q)$ на $L_p(l_q)$. Определения пространств $L_p(l_q)$ и $l_q(L_p)$ можно найти, напр., в [11]. Пример системы из $\Phi_{p,q}(\mu;\mathbb{R}_n)$ приведен в [12]. Для этого примера выполнено неравенство

$$\|F\varphi_k\|_{M_p^p}=\sup_{\|f\|_{L_p}=1}\|\varphi_k*f\|_{L_p}\le c,\qquad k=1,2,\dots \tag{3}$$

(см. [13]), где M_p^p – множество мультипликаторов Фурье типа (p,p).

Определим теперь основные функциональные пространства статьи, являющиеся обобщениями пространств Соболева-Лиувилля ($H_p^s(\mu;\mathbb{R}_n)$), Никольского-Бесова ($B_{p,q}^s(\mu;\mathbb{R}_n)$) и Лизоркина-Трибеля ($F_{p,q}^s(\mu;\mathbb{R}_n)$).

Определение 3. Пусть $1<p,\ q<\infty$, $-\infty<s<\infty$ и $\mu\in G_0^+$. Далее, пусть S' – сопряженное пространство класса S Шварца и $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}\in\Phi_{p,q}(\mu;\mathbb{R}_n)$. Положим

а) $H_p^s(\mu;\mathbb{R}_n)=\left\{f\in S':\ \|f\|_{H_p^s}=\|F^{-1}\left[(1+\mu^2)^{s/2}Ff\right]\|_{L_p(\mathbb{R}_n)}<\infty\right\}$,

б) $B_{p,q}^s(\mu;\mathbb{R}_n)=\left\{f\in S':\ \|f\|_{B_{p,q}^s}=\|f*\varphi_k\|_{l_q^s(L_p)}<\infty\right\}$,

в) $F_{p,q}^s(\mu;\mathbb{R}_n)=\left\{f\in S':\ \|f\|_{F_{p,q}^s}=\|f*\varphi_k\|_{L_p(l_q^s)}<\infty\right\}$.

Замечание 1. 1. В определении пространств $B^s_{p,q}(\mu;\mathbb{R}_n)$ можно ограничиться системами $\{\varphi_k\}$ со свойствами а) — в) и оценкой (3) вместо свойства (2); 2. Пространства а), б), в) – банаховы и не зависят от выбора системы $\{\varphi_k\}$. 3. Класс Шварца плотен в этих пространствах.

§2. ТЕОРЕМЫ ВЛОЖЕНИЯ РАЗНЫХ МЕТРИК

Лемма. *Пусть* $1 < p, q < \infty$, $-\infty < s < \infty$ *и* $\mu \in G_0^+$. *Тогда*

$$B^s_{p,\min(p,q)}(\mu) \subset F^s_{pq}(\mu) \subset B^s_{p,\max(p,q)}(\mu). \tag{4}$$

Доказательство аналогично случаю изотропных пространств.

Теорема 1. *Пусть* $1 < p < \infty$, μ_0 *и* $\mu_1 \in G_0^+$. *Тогда*

а) $B^0_{p,q}(\mu_0) = B^0_{p,q}(\mu_1)$, $\quad 1 \le q \le \infty$,

б) $F^0_{p,q}(\mu_0) = F^0_{p,q}(\mu_1)$. $\quad 1 < q < \infty$,

Доказательство. Утверждение а) доказано в [14]. Утверждение б) докажем от противного. Пусть существует последовательность функций $\{f_k\}_{k=0}^{\infty} \in F^0_{p,q}(\mu_1)$ и число $k_0 > 0$ такое, что при любом $\varepsilon > 0$ выполнено неравенство $||f_k||_{F^0_{p,q}(\mu_1)} \le$ $\le \varepsilon ||f_k||_{F^0_{p,q}(\mu_0)}$. Не ограничивая общности, можно считать, что $p \le q$. По доказанной лемме при $r > 0$ имеем $||f_k||_{B^{-r}_{p,q}(\mu_1)} \le \varepsilon ||f_k||_{F^0_{p,q}(\mu_0)} \le \varepsilon ||f_k||_{B^r_{p,q}(\mu_0)}$. Интерполяцией (см. [14], теорему 3) получаем $||f_k||_{B^{-r}_{p,q}(\mu_1)} \le \varepsilon ||f_k||_{B^r_{p,q}(\mu_0)}$, $r > 0$. Устремляя r к нулю, приходим к неравенству, противоречащему утверждению б). Тем самым, теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть* $1 < p, q < \infty$, $-\infty < s_0, s_1 < \infty$ *и* $\mu_0, \mu_1 \in G_0^+$. *Для того, чтобы имело место вложение*

$$F^{s_0}_{p,q}(\mu_0) \subset F^{s_1}_{p,q}(\mu_1) \tag{5}$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\left(1 + \mu_1^2\right)^{s_1/2} \left(1 + \mu_0^2\right)^{-s_0/2} \in L_\infty. \tag{6}$$

То же утверждение справедливо и для B-пространств, причем допустимы предельные значения $q = 1, \infty$.

Доказательство. Случай $s_0 = s_1 = 0$ рассмотрен в теореме 1, поэтому можно считать, что $s_0^2 + s_1^2 \neq 0$. Пусть имеет место соотношение (6). В силу теоремы 5 из [10], а также (6) и (2)

$$\left\{\left(1+\mu_1^2\right)^{s_1/2}\left(1+\mu_0^2\right)^{-s_0/2} F\varphi_k\right\}_{k=0}^{\infty} \in M_{(p,q)} \quad \{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty} \in \Phi_{p,q}(\mu_1).$$

Ввиду теоремы 1 и изоморфизма оператора типа лиувиллевского дифференцирования, при $f \in F^{s_0}_{p,q}(\mu_0)$ имеем

$$||f||_{F^{s_1}_{p,q}(\mu_1)} \sim ||F^{-1}\left(1+\mu_1^2\right)^{s_1/2} f||_{F^0_{p,q}(\mu_0)} \leq c||f||_{F^{s_0}_{p,q}(\mu_0)},$$

где, как и всюду ниже, знак $\sim$ обозначает двустороннюю оценку.

Пусть теперь имеет место вложение (5) и $f \in S(\mathbb{R}_n)$. Тогда

$$\begin{aligned} &||F^{-1}\left(1+\mu_1^2\right)^{s_1/2}\left(1+\mu_0^2\right)^{-s_0/2} Ff||_{F^0_{p,q}(\mu_1)} \leq \\ &\leq c||F^{-1}\left(1+\mu_0^2\right)^{-s_0/2} Ff||_{F^{s_0}_{p,q}(\mu_0)} \sim ||f||_{F^0_{p,q}(\mu_1)}. \end{aligned} \tag{7}$$

Обозначим через $M_{(p,q)}$ множество мультипликаторов Фурье для классических пространств Лизоркина–Трибеля (в наших обозначениях это пространства $F^s_{p,q} = F^s_{p,q}(|\xi|)$), т. е. $M_{p,q}$ есть множество распределений $T \in S'$ таких, что для всех $f \in S$ имеет место неравенство

$$||F^{-1}TFf||_{F^s_{p,q}} \leq c||f||_{F^s_{p,q}}.$$

Известно (см. [15]), что $M_{(p,q)}$ не зависит от s. Так как по теореме 1 $F^0_{p,q} = F^0_{p,q}(|\xi|) = F^0_{p,q}(\mu_1)$, то из (7) следует, что

$$\left(1+\mu_1^2\right)^{s_1/2}\left(1+\mu_0^2\right)^{-s_0/2} \in M_{(p,q)}.$$

Тем самым, соотношение (6) следует из включений (см. [15], пункт 2.6.6)

$$M_{(p,q)} \subset M_p \subset M_2^2 = L_\infty,$$

где M_p – множество мультипликаторов Фурье для классических пространств Никольского– Бесова.

Аналогично доказывается утверждение теоремы для B-пространств, притом с обычными видоизменениями при $q=\infty$. Теорема 2 доказана.

Пусть $\mathbf{C}$ – пространство непрерывных функций с равномерной нормой. Имеет место

Теорема 3. *Пусть $1<p,\ q<\infty$, $-\infty<s<\infty$, $1/p+1/p'=1$, $1/q+1/q'=1$ и $\mu\in G_0^+$. Для того, чтобы имело место вложение*

$$F^s_{p,q}(\mu)\subset\mathbf{C} \tag{8}$$

необходимо и достаточно условие

$$F^{-1}\left(1+\mu^2\right)^{-s/2}\in F^0_{p',q'}(\mu). \tag{9}$$

Это утверждение остается в силе при замене класса F на класс B. В этом случае q может равняться 1.

Доказательство начнем со случая B-пространств. Пусть $B^s_{p,q}(\mu)\subset\mathbf{C}$. Тогда имеет место оценка

$$|f(0)|\le c\|f\|_{B^s_{p,q}(\mu)},\quad f\in S(\mathbb{R}_n).$$

Ясно, что δ-функция Дирака принадлежит сопряженному пространству $\left(B^s_{p,q}(\mu)\right)'=B^{-s}_{p',q'}(\mu)$. Тем самым

$$\|\delta\|_{B^{-s}_{p',q'}}\sim\left(\sum_{k=0}^{\infty}\|F^{-1}(1+\mu^2)^{-s/2}F\varphi_k\|^{q'}_{L_{p'}}\right)^{1/q'}\sim\|F^{-1}(1+\mu^2)^{-s/2}\|_{B^0_{p',q'}}.$$

Необходимость условия (9) (с B вместо F) доказана. Пусть $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}\in\Phi_{p,q}(\mu)$. Положив $\psi_k=\sum\limits_{j=-2}^{2}\varphi_{k+j}$, $\psi_k\equiv0$, $k<0$, ввиду условий б) и в) определения 2 будем иметь

$$\psi_k*\varphi_k=\varphi_k,\qquad k=0,1,\dots. \tag{10}$$

Следовательно, воспользовавшись неравенством Гёльдера получаем

$$|f| = \left|\sum_{k=0}^{\infty} F^{-1}(1+\mu^2)^{-s/2}F\varphi_k * F^{-1}(1+\mu^2)^{s/2}F\psi_k Ff\right| \leq$$
$$\leq c\|F^{-1}(1+\mu^2)^{-s/2}\|_{B^0_{p',q'}(\mu)} \cdot \|f\|_{B^s_{p,q}(\mu)}.$$

Отсюда следует вложение (8) для B–пространств.

Для F-пространств необходимость условия (9) доказывается аналогично. Для доказательства достаточности (9) заметим, что в силу (10) и неравенства Гёльдера

$$|f| \leq \|F^{-1}(1+\mu^2)^{-s/2}F\varphi_k\|_{l_{q'}} * \|F^{-1}(1+\mu^2)^{s/2}F\psi_k Ff\|_{l_q} \leq$$
$$\leq c\|F^{-1}(1+\mu^2)^{-s/2}\|_{F^0_{p',q'}(\mu)} \cdot \|f\|_{F^s_{p,q}(\mu)}. \tag{11}$$

Замечание 1. Использованное при доказательстве теоремы 3 равенство $(B^s_{p,q}(\mu))' = B^{-s}_{p',q'}(\mu)$ непосредственно следует из теоремы 1 [14] и теоремы 3.7.1 [11]. Доказательство такого же равенства для F–пространств аналогично доказательству соответствующего утверждения для классов Лизоркина-Трибеля (см. [15], пункт 2.11.2).

§3. ТЕОРЕМЫ ВЛОЖЕНИЯ РАЗНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Определение 4 (см. [6]). Непустой многогранник $\mathbf{N}$ с вершинами из $\mathbb{R}_n$ назовем полным, если начало координат является вершиной $\mathbf{N}$, и, кроме того, $\mathbf{N}$ имеет вершины на каждой оси координат. Полный многогранник $\mathbf{N}$ назовем вполне правильным, если положительны все координаты внешних нормалей его $(n-1)$-мерных граней.

Определение 5. Полный многогранник назовем призмообразным, если он является частью вполне правильного многогранника, образованной его срезом гиперплоскостью, параллельной $\mathbb{R}_{n-1}$, и его вершины расположены только на $\mathbb{R}_{n-1}$

и на этой гиперплоскости. Вполне правильный многогранник назовем пирамидообразным, если ее единственная вершина вне $\mathbb{R}_{n-1}$ находится на n-той оси координат.

Пусть $\mathbf{N}$ – вполне правильный многогранник с вершинами $\alpha^j \in \overset{+}{\mathbb{R}}_n$, $j = 1, \ldots, N$; $\alpha^0 = (0, \ldots, 0)$. С $\mathbf{N}$ ассоциируем функцию

$$\mu(\xi) = \left(\sum_{j=1}^{N} \xi^{2\alpha^j}\right)^{1/2}. \tag{12}$$

Если $\mathbf{N}$ – призмообразный многогранник с основаниями $\mathbf{N}_0 \subset \mathbb{R}_{n-1}$ и $\mathbf{N}_1 \subset \{x \in \overset{+}{\mathbb{R}}_n;\ x_n = m\}$, то соответствующая функция $\mu(\xi)$ примет вид

$$\mu(\xi) = \left[\mu_0^2(\xi') + \xi_n^{2m}(1 + \mu_1^2(\xi'))\right]^{1/2}, \qquad \xi = (\xi', \xi_n), \tag{13}$$

где $\mu_0(\xi')$ и $\mu_1(\xi')$ – функции, отвечающие многогранникам $\mathbf{N}_0$ и $\mathbf{N}_1$ (см. (12)).

Отметим, что пирамидообразный многогранник можно рассматривать как призмообразный, с вершиной $(0, \ldots, 0, m)$ вместо основания $\mathbf{N}_1$. Соответствующая функция имеет вид

$$\mu(\xi) = \left(\mu_0^2(\xi') + \xi_n^{2m}\right)^{1/2}. \tag{14}$$

Функции вида (13) и (14) тоже будем называть, соответственно, призмообразными и пирамидообразными.

Для пирамидообразных функций теоремы вложения (для разных метрик и размерностей) доказаны в [8, 9].

Нашей целью является доказательство теорем вложения разных измерений (теорем о следах) для пространств типа H и B, порожденных некоторым вполне правильным многогранником. В изотропном случае, когда все вершины многогранника лежат на координатных осях и находятся на одинаковом расстоянии от начала координат, принятое нами условие $m_1 > 1/p$ (см. теорему 5) совпадает с известным необходимым условием положительности верхнего индекса (см., напр., [16]).

Определение 6 (см. [11]). Пусть A_0 и A_1 – банаховы пространства. Оператор $R \in L(A_0, A_1)$ называется ретракцией, если существует оператор $S \in L(A_1, A_0)$ такой, что $RS = E$, где E – тождественный оператор из $L(A_1, A_0)$. Оператор следа определяем соотношением

$$(Trf)(x') = f(x', 0), \quad x' = (x_1, ..., x_{n-1}), \quad f \in S(\mathbb{R}_n).$$

Следы остальных функций определяются с помощью предельного перехода.

Рассмотрим сначала случай призмообразных многогранников, т. е. пространства $H^1_p(\mu)$ и $B^1_{p,q}(\mu)$ с $\mu(\xi)$ вида (13). Отметим, что если в определениях пространств H и B вместо $(1+\mu^2)^{1/2}$ брать функцию

$$\left[\sum_{\alpha}\prod_{i=1}^{n}(1+\xi_i^2)^{\alpha_i}\right]^{1/2},$$

где сумма взята по всем вершинам многогранника, отличным от начала координат, то вопрос о бесконечной дифференцируемости можно обойти. В силу теоремы 2 при $\mu \in G_0^+$ пространства, порожденные такими функциями, совпадают.

Теорема 4. *Пусть функция $\mu(\xi)$ порождена призмообразным многогранником, $1 < p < \infty$, $1 \le q \le \infty$ и $m > 1/p$. Тогда оператор следа есть ретракция*

a) $H^1_p(\mu; \mathbb{R}_n)$ *на* $B^1_{p,p}\left(\mu_0^{1-(pm)^{-1}} \cdot \mu_1^{1/(pm)}; \mathbb{R}_{n-1}\right)$,

b) $B^1_{p,q}(\mu; \mathbb{R}_n)$ *на* $B^1_{p,q}\left(\mu_0^{1-(pm)^{-1}} \cdot \mu_1^{1/(pm)}; \mathbb{R}_{n-1}\right)$.

Доказательство. Представим функцию $(1+\mu^2)^{1/2}$ в эквивалентной форме

$$(1+\mu^2(\xi))^{1/2} \sim (1+\mu_1^2(\xi'))^{1/2}\left[\frac{1+\mu_0^2(\xi')}{1+\mu_1^2(\xi')} + \xi_n^{2m}\right]^m.$$

Обозначим

$$1+\rho_0^2(\xi') = \frac{1+\mu_0^2(\xi')}{1+\mu_1^2(\xi')}, \qquad \rho(\xi) = (\rho_0^2(\xi') + \xi_n^{2m})^{1/2}.$$

Тогда $(1+\mu^2(\xi))^{1/2} \sim (1+\mu_1^2(\xi'))^{1/2} \cdot \left(1+\rho^2(\xi)\right)^{1/2}$. Функция $\rho(\xi)$ пирамидообразна. Ввиду результатов [8,9] заключаем, что оператор следа есть ретракция из $H^1_p(\rho, \mathbb{R}_n)$ на $B^{1-(pm)^{-1}}_{p,p}(\rho_0; \mathbb{R}_{n-1})$ и из $B^1_{p,q}(\rho; \mathbb{R}_n)$ на $B^{1-(pm)^{-1}}_{p,p}(\rho_0; \mathbb{R}_{n-1})$.

Докажем прямое вложение для случая а). Пусть $f \in S(\mathbb{R}_n)$ и $g(x') = f(x', 0)$. В силу теоремы о следах для призмообразных функций и теоремы 6 из [14]

$$\|g\|_{B^1_{p,p}\left(\mu_0^{1-(pm)^{-1}}\cdot\mu_1^{1/(pm)};\mathbb{R}_{n-1}\right)} \sim \|F^{-1}_{n-1}(1+\mu_1^2)^{1/2}F_{n-1}g\|_{B^{1-(pm)^{-1}}_{p,p}(\rho_0;\mathbb{R}_{n-1})} \leq$$
$$\leq c\|f\|_{H^1_p(\mu;\mathbb{R}_n)},$$

где F_{n-1} есть $(n-1)$-мерное преобразование Фурье.

Для доказательства обратного вложения воспользуемся оператором продолжения из теоремы 3 [8]. Пусть R — такой оператор, действующий непрерывно из $B^{1-(pm)^{-1}}_{p,p}(\rho_0;\mathbb{R}_{n-1})$ в $H^1_p(\rho;\mathbb{R}_n)$ (см. [8]), тогда, в силу свойства изоморфизма оператора типа лиувиллевского дифференцирования (см. [14], теорему 6), имеем

$$\|f\|_{H^1_p(\mu;\mathbb{R}_n)} \sim \|RF^{-1}(1+\mu_1^2)^{1/2}Fg\|_{H^1_p(\rho;\mathbb{R}_n)} \leq c\|g\|_{B^1_{p,p}\left(\mu_0^{1-(pm)^{-1}}\cdot\mu_1^{1/(pm)};\mathbb{R}_{n-1}\right)}.$$

Утверждение б) доказывается аналогично. Теорема доказана.

Рассмотрим произвольный вполне правильный многогранник $\mathbf{N}$. Пусть его вершины имеют n-ые координаты

$$0, m_1, m_2, ..., m_N \quad \text{с} \quad 0 \leq m_1 \leq m_2 \leq ... \leq m_N, \ m_N > 0.$$

С многогранником $\mathbf{N}$ ассоциируем функцию

$$\nu(\xi) = \left[\mu_0^2(\xi') + \sum_{j=1}^{N} \xi_n^{2m_j}\left(1+\mu_j^2(\xi')\right)\right]^{1/2}, \tag{15}$$

где функция $\mu_j(\xi')$, $j = 1, ..., N$ отвечает проекции $\mathbf{N}$ на гиперплоскость $\{x \in \overset{+}{\mathbb{R}}_n;\ x_n = m\}$, а $\mu_0(\xi')$ отвечает проекции $\mathbf{N}$ на $\mathbb{R}_{n-1}$. Наряду с $\nu(\xi)$ рассмотрим призмообразную функцию

$$\mu(\xi) = \left[\mu_0^2(\xi') + \xi_n^{2m_1}(1+\mu_1^2(\xi'))\right]^{1/2}, \tag{16}$$

отвечающую части многогранника $\mathbf{N}$, лежащей между $\mathbb{R}_{n-1}$ и $\{x \in \overset{+}{\mathbb{R}}_n;\ x_n = m\}$. Имеет место

Теорема 5. *Пусть $1 < p < \infty$, $1 \le q \le \infty$ и $m_1 > 1/p$. Тогда пространство следов $H^1_p(\nu; \mathbb{R}_n)$ совпадает с пространством следов $H^1_p(\mu; \mathbb{R}_n)$, а пространство следов $B^1_{p,q}(\nu; \mathbb{R}_n)$ совпадает с пространством следов $B^1_{p,q}(\mu; \mathbb{R}_n)$.*

Доказательство. Так как $1+\mu^2(\xi) \le c(1+\nu^2(\xi))$, то имеем (см. [7]) $H^1_p(\nu; \mathbb{R}_n) \subset \subset H^1_p(\mu; \mathbb{R}_n)$. С другой стороны, нетрудно убедиться в том, что

$$1 + \nu^2(\xi) \le c' \left[1 + \mu_0^2(\xi') + \xi_n^{2m_N}(1 + \mu_1^2(\xi'))^{m_N/m_1}(1 + \mu_0^2(\xi'))^{1-m_N/m_1}\right]. \quad (17)$$

Обозначим правую часть (17) через $1 + \lambda^2(\xi)$ и заметим, что ввиду (17) $H^1_1(\lambda; \mathbb{R}_n) \subset H^1_p(\lambda; \mathbb{R}_n)$. Тем самым

$$H^1_p(\lambda; \mathbb{R}_n) \subset H^1_p(\nu; \mathbb{R}_n) \subset H^1_p(\mu; \mathbb{R}_n), \quad (18)$$

и в силу теоремы 4

$$T_r H^1_p(\mu; \mathbb{R}_n) = B^1_{p,p}\left(\mu_0^{1-(pm_1)^{-1}} \cdot \mu_1^{1/(pm_1)}; \mathbb{R}_{n-1}\right). \quad (19)$$

Если обозначить $(1 + \mu_1^2(\xi'))^{m_N/m_1}(1 + \mu_0^2(\xi'))^{1-m_N/m_1} = 1 + \lambda_1^2(\xi')$, то получаем

$$T_r H^1_p(\mu; \mathbb{R}_n) = B^1_{p,p}\left(\mu_0^{1-(pm_N)^{-1}} \cdot \lambda_1^{1/(pm_N)}; \mathbb{R}_{n-1}\right). \quad (20)$$

Далее, в силу теоремы 2

$$B^1_{p,p}\left(\mu_0^{1-1/(pm_1)} \cdot \mu_1^{1/(pm_1)}; \mathbb{R}_{n-1}\right) = B^1_{p,p}\left(\mu_0^{1-(pm_N)^{-1}} \cdot \lambda_1^{1/(pm_N)}; \mathbb{R}_{n-1}\right).$$

Из (18) — (20) следует необходимое утверждение для пространств H. Доказательство утверждения для пространств B аналогично.

Замечание 3. Прямые вложения теорем 4 и 5 можно доказать также с помощью "метода следов" вещественной интерполяции (см. [11], теорему 3.12.2). Необходимые при этом интерполяционные теоремы для пространств H и B доказаны в [14]. Теорема о следах для пространств F, порожденных призмообразными функциями, установлена в [12].

ABSTRACT. In the paper we prove some embedding theorems for several Nikolskii–Besov and Lizorkin–Triebel type spaces B and F. We find necessary and sufficient conditions ensuring these inclusions and also the inclusion of the considered B ana F type spaces in the space C of continuous functions. Also we prove trace theorems for a B type space and a Sobolev–Liouville type space H, both generated by a completely regular polyhedron satisfuing the only condition that n-th koordinates of its vertices out of $\mathbb{R}_{n-1}$ are grater than $1/p$.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Л. Соболев, "Об одной теореме функционального анализа", Мат. сб., т. 4 (46), стр. 471 — 497, 1938.
2. С. М. Никольский, "Неравенства для целой функции конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных", Труды МИАН СССР, т. 38, стр. 244 — 278, 1951.
3. С. М. Никольский, "Свойства некоторых классов функций многих переменных на дифференцируемых многообразиях", Мат. сб. т. 33, №2, стр. 261 — 326, 1953.
4. О. В. Бесов, "Исследование одного семейства функциональных пространств в связи с теоремами вложения и продолжения", Труды МИАН СССР. т. 60, стр. 42 — 81, 1961.
5. О. В. Бесов, "О некотором семействе функциональных пространств. Теоремы вложения и продолжения", ДАН СССР, т. 126, №6, стр. 1163 – 1165, 1959.
6. В. П. Михайлов, "О поведении на бесконечности одного класса многочленов", Труды МИАН СССР, т. 91, стр. 59 — 81, 1967.
7. Л. Р. Волевич, Б. П. Панеях, "Некоторые пространства обобщенных функций и теоремы вложения", УМН, т. 20, №1, стр. 3 — 74, 1965.
8. А. Г. Багдасарян, "Об интерполяции и о следах функций из некоторых анизотропных функциональных пространств", Известия АН Армении, Математика, т. 23, №4, стр. 353 - 365, 1988.
9. А. Г. Багдасарян, "Интерполяция и следы функций из некоторых функциональных пространств", ДАН Армении, т. 87, №5, стр. 207 — 211, 1988.
10. П. И. Лизоркин, "О мультипликаторах интегралов Фурье в пространствах $L_{p,\theta}$", Труды МИАН СССР, т. 81, стр. 231 — 248, 1967.
11. Й. Берг, Й. Лёфстрём, Интерполяционные пространства. Введение, Мир, Москва, 1980.
12. А. Г. Багдасарян, "Теоремы вложения и интерполяции для некоторых пространств типа Лизоркина–Трибеля", ДАН Армении. т. 91, №3, стр. 105 — 108, 1990.
13. П. И. Лизоркин, "(L_p, L_q) мультипликаторы интегралов Фурье", ДАН СССР, т. 152, №4, стр. 808 — 811, 1963.
14. А. Г. Багдасарян, "Интерполяция некоторых функциональных пространств разной анизотропии", Известия НАН Армении, Математика, т. 27, №4, стр. 38 – 46, 1992.
15. Х. Трибель, Теория функциональных пространств, Мир, Москва, 1983.
16. С. М. Никольский, Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, Наука, Москва, 1977.

28 сентября 1993

Ереванский государственный университет