ЗАДАЧА УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

Р. Л. Шахбагян, М. эль-Саиди

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 29, №2, 1994

В статье исследована проблема управления системами, описываемыми эволюционными уравнениями в частных производных высокого порядка. Доказано существование точного управления смешанной задачей (при этом, управление может быть задано как на всей границе, так и на ее части) для некоторого класса эволюционных операторов высокого порядка в соответствующих функциональных пространствах.

ВВЕДЕНИЕ

Фундаментальные результаты в задачах оптимального управления, полученные в пятидесятые годы Л. С. Понтрягиным, В. М. Тихомировым, М. Р. Хестенсом, А. Д. Иоффе, изложенные в монографиях [1] – [3], привели к бурному развитию в этой области. В [1] исследованы задачи управления, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями. Однако, в многочисленных приложениях, в силу сложности управляемых систем, возникают математические модели, описываемые дифференциальными уравнениями в частных производных. Примеры таких задач содержатся в [4],[5].

Это направление, начатое в семидесятые годы Д. Расселом [6],[7] и Ж.- Л. Лионсом [8], получило дальнейшее продолжение и развитие в исследованиях Ж.- Л. Лионса [9],[10], а также в работах других авторов (см. [11] – [13]).

В [10] исследована задача управления, порожденная смешанной задачей для уравнения

$$u_{tt} - \Delta u = 0.$$

При этом, управление задано как на всей боковой границе цилиндра, так и на ее части (последний случай весьма важен с точки зрения приложений). Доказано существование точного управления при достаточно больших значениях временной переменной.

В настоящей статье, на основе изложенного в [10] метода, получившего название Hilbert Uniqueness Method (HUM), применена идея рассмотрения сопряженной задачи. В настоящее время достаточно полно исследованы задачи управления, описываемые эволюционными уравнениями в частных производных второго порядка. Значительно менее изучены системы, описываемые уравнениями высокого порядка, чему и посвящена эта статья.

В §1 дается постановка задачи. В §2 излагается метод HUM. В §3 описывается класс рассматриваемых операторов и вводятся функциональные пространства, в которых они действуют. В §4 доказан основной результат работы – существование точного управления смешанной задачей для класса операторов, введенных в §3.

§1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ

Пусть Ω ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с достаточно гладкой границей $\Gamma = \partial\Omega$. Обозначим через $Q_T = \Omega \times (0,T)$, $0 < T < \infty$, открытый цилиндр, лежащий в прямом произведении $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$, где $\mathbb{R}^+ = \{t \mid t \in \mathbb{R}^1,\ t > 0\}$.

В цилиндре $Q_T = \Omega \times (0,T)$ рассмотрим эволюционное уравнение вида

$$u''_t + \Delta^{2m} u + \sum_{|\alpha| \leq 2m-1} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (a_\alpha(x) D^\alpha u) = 0, \quad m \geq 1, \tag{1.1}$$

где $u'' = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, Δ есть n – мерный оператор Лапласа, а

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \quad |\alpha| = \sum_{k=1}^n \alpha_k.$$

Далее, обозначим

$$L\,u = \sum_{|\alpha| \le 2m-1} (-1)^{|\alpha|} D^{\alpha}(a_{\alpha}(x) D^{\alpha} u), \tag{1.2}$$

$$L_1 u = \Delta^{2m} u + L\,u. \tag{1.3}$$

Для формулировки задачи введем обозначения. Пусть $x^o = (x_1^o, \ldots, x_n^o)$ – произвольная заданная точка из $\mathbb{R}^n$. Для любого $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ положим

$$m(x) = x - x_o = (x_1 - x_1^o, \ldots, x_n - x_n^o), \quad m_k(x) = x_k - x_k^o. \tag{1.4}$$

Далее, через $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ обозначим единичную внешнюю нормаль к поверхности Γ, $\nu_k = \cos(\nu, x_k)$. Разделим поверхность Γ на две части, положив

$$\Gamma(x^o) = \{x \mid \ x \in \Gamma, \ \sum_{k=1}^{n} m_k \nu_k \ge 0\} \tag{1.5}$$

и $\Gamma_*(x^o) = \Gamma \setminus \Gamma(x^o)$. Рассмотрим следующую начально-краевую задачу :

$$u'' + L_1 u = 0, \quad (x,t) \in Q_T, \tag{1.6}$$

$$u(0) = u^o, \quad u'(0) = u^1, \quad \text{на} \quad \Omega, \tag{1.7}$$

где $u(0) = u(x,0)$, $u'(0) = \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}$. Пусть Σ – боковая поверхность цилиндра $Q_T: \ \Sigma = \Gamma \times (0,T)$. На Σ зададим краевые условия

$$\left.\frac{\partial^k u}{\partial \nu^k}\right|_{\Sigma} = 0, \quad k = 0, \ldots, 2m-2, \tag{1.8}$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial \nu} \Delta^{m-1} u\right|_{\Sigma} = \begin{cases} v, & \text{на } \Gamma(x^o) \times (0,T) \\ 0, & \text{на } \Gamma_*(x^o) \times (0,T), \end{cases} \tag{1.9}$$

где функция v – управление.

Определение 1.1 (см. [10]). Управление $v(x,t)$, определенное на $\Gamma(x^o) \times$ $\times (0,T)$, называется *точным*, если для любых начальных данных $u^o(x)$ и $u^1(x)$ $(x \in \Omega)$ существует T, $0 < T < \infty$, такое, что решение $u(v) = u(x,t;v)$ задачи (1.6) – (1.9) обращается в нуль вместе со своей производной по t при $t = T$, т. е.

$$u(x,T;v) = u'(x,T;v) = 0. \tag{1.10}$$

Таким образом, проблема заключается в нахождении точного управления смешанной задачей (1.6) - (1.9) в соответствующих функциональных пространствах.

§2. HUM. ОПЕРАТОР Λ

2.1. Для решения поставленной в §1 задачи точного управления мы применим метод HUM. В основе этого метода лежит идея одновременного рассмотрения двух задач – основной и, в определенном смысле, двойственной к ней. Итак, рассмотрим следующие две начально-краевые задачи :

Пусть функция $w(x,t)$ – решение задачи

$$w'' + L_1 w = 0, \quad (x,t) \in Q_T, \tag{2.1}$$

$$w(0) = w^0, \quad w'(0) = w^1, \quad x \in \Omega, \tag{2.2}$$

$$\left.\frac{\partial^k w}{\partial \nu^k}\right|_\Sigma = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, 2m-1 \tag{2.3}$$

и пусть функция $z(x,t)$ – решение задачи

$$z'' + L_1 z = 0, \quad (x,t) \in Q_T, \tag{2.4}$$

$$\left.\frac{\partial^k z}{\partial \nu^k}\right|_\Sigma = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, 2m-2, \tag{2.5}$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial \nu}\Delta^{m-1} z\right|_\Sigma = \begin{cases} \Delta^m w, & \text{на } \Gamma(x^0) \times (0,T) \\ 0, & \text{на } \Gamma_*(x^0) \times (0,T), \end{cases} \tag{2.6}$$

$$z(T) = z'(T) = 0, \quad x \in \Omega. \tag{2.7}$$

Мы исходим из того, что задачи (2.1) – (2.3) и (2.4) – (2.7) имеют единственное обобщенное решение в соответствующих пространствах Соболева (см. [14]).

2.2. Ниже мы будем существенно опираться на следующую лемму.

Лемма 2.1. *Пусть функции $w(x,t)$ и $z(x,t)$ – решения задач (2.1) – (2.3) и (2.4) – (2.7) соответственно. Тогда справедливо соотношение*

$$\int_\Omega (z'(0)w^0 - z(0)w^1)dx = \int_{\Gamma(x^0)\times(0,T)} |\Delta^m w|^2 d\Gamma\, dt. \tag{2.8}$$

Доказательство. Умножим тождество (2.1) на $z(x,t)$, а тождество (2.4) – на $w(x,t)$, составим симметрическую разность и проинтегрируем ее по цилиндру

Q_T. Тогда получим

$$\iint_{Q_T}(zw''-wz'')dx\,dt+\iint_{Q_T}(z\Delta^{2m}w-w\Delta^{2m}z)dx\,dt=\iint_{Q_T}(wLz-zLw)dx\,dt. \tag{2.9}$$

Преобразуем в отдельности обе части последнего соотношения. Применяя формулу интегрирования по частям, с учетом начальных условий (2.2) и (2.7), получим

$$\iint_{Q_T}(zw''-wz'')dx\,dt=\int_\Omega(zw'\Big|_0^T-\int_0^T z'w'\,dt-$$

$$-wz'|_0^T+\int_0^T w'z'\,dt)dx=\int_\Omega(z'(0)w^0-z(0)w^1)dx. \tag{2.10}$$

Преобразуем теперь интеграл

$$I_1=\iint_{Q_T}(z\Delta^{2m}w-w\Delta^{2m}z)dx\,dt. \tag{2.11}$$

Применяя многократно формулу Гаусса-Остроградского и учитывая условия (2.5), получим

$$\iint_{Q_T}z\Delta^{2m}w\,dx\,dt=\iint_{Q_T}\Delta^m z\Delta^m w\,dx\,dt-\int_\Sigma\frac{\partial}{\partial\nu}\Delta^{m-1}z\Delta^m w\,d\Sigma. \tag{2.12}$$

Аналогично, воспользовавшись условиями (2.3), получим

$$\iint_{Q_T}w\Delta^{2m}z\,dx\,dt=\iint_{Q_T}\Delta^m w\Delta^m z\,dx\,dt. \tag{2.13}$$

Подставив (2.12) и (2.13) в (2.11) и учитывая условия (2.6), будем иметь

$$I_1=-\int_{\Gamma(x^\circ)\times(0,T)}|\Delta^m w|^2 d\Gamma\,dt. \tag{2.14}$$

Правая часть тождества (2.9) преобразуется аналогично. В силу (2.3) и (2.5)

$$\iint_{Q_T}(wLz-zLw)dx\,dt=\sum_{|\alpha|\le 2m-1}\iint(a_\alpha(x)D^\alpha wD^\alpha z-a_\alpha(x)D^\alpha zD^\alpha w)dx\,dt=0. \tag{2.15}$$

Подставляя, наконец, преобразованные интегралы (2.10), (2.14) и (2.15) в тождество (2.9), приходим к соотношению (2.8). Лемма доказана.

2.3. Введем в рассмотрение оператор Λ, ставящий в соответствие каждой паре начальных данных $\{w^o, w^1\}$ задачи (2.1) - (2.3) пару $\{z'(0), -z(0)\}$:

$$\Lambda\{w^o, w^1\} = \{z'(0), -z(0)\}. \tag{2.16}$$

Как доказано ниже (и в этом заключается основная проблема), оператор Λ обратим в надлежащим образом построенных функциональных пространствах, естественно связанных с двумя рассматриваемыми смешанными задачами. После этого существование решения основной задачи (1.6) - (1.10) доказывается тривиально. В самом деле, полагаем в (2.16) $\Lambda\{w^o, w^1\} = \{u^1, -u^o\}$. Тогда, ввиду обратимости Λ, по заданной паре начальных данных $\{u^o, u^1\}$ определяется единственная пара $\{w^o, w^1\}$. По этим значениям определяется единственное решение $w(x,t)$ задачи (2.1) - (2.3), после чего, беря в условии (1.9)

$$v|_{\Gamma(x^*)\times(0,T)} = \Delta^m w, \tag{2.17}$$

легко убедиться, что, в силу (2.17), (2.4) - (2.7), решением исходной задачи (1.6) - (1.10) является функция

$$u(x, t; v) = z(x, t). \tag{2.18}$$

2.4. Обозначим через $\vec{L_2}(\Omega)$ гильбертово пространство вектор-функций $u(x) = (u_1(x), u_2(x))$, определенных на Ω, и таких, что $u_i \in L_2(\Omega)$, $i = 1, 2$ (т. е. $\vec{L_2}(\Omega) = L_2(\Omega) \times L_2(\Omega)$), наделенное скалярным произведением

$$< u, v >= \int_\Omega (u_1 v_1 + u_2 v_2) dx. \tag{2.19}$$

В силу (2.16) и (2.19) имеем

$$< \Lambda\{w^o, w^1\}, \{w^o, w^1\} >= \int_\Omega (z'(0)w^o - z(0)w^1) dx. \tag{2.20}$$

Из леммы 2.1 следует, что

$$< \Lambda\{w^o, w^1\}, \{w^o, w^1\} >= \int_{\Gamma(x^*)\times(0,T)} |\Delta^m w|^2 d\Gamma\, dt. \tag{2.21}$$

Таким образом, для доказательства обратимости оператора Λ достаточно показать, что интеграл

$$\left(\int_{\Gamma(x^\circ)\times(0,T)} |\Delta^m w|^2 d\Gamma\, dt\right)^{1/2} \tag{2.22}$$

определяет норму на множестве начальных данных задачи (2.1) - (2.3). Ниже мы докажем, что при достаточно больших $T > 0$ интегралом (2.22) задается норма на множестве $\{w^\circ, w^1\}$ в надлежащим образом построенных функциональных пространствах.

§3. КЛАСС ОПЕРАТОРОВ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

3.1. Нижеследующими условиями а), б), в) описывается класс рассматриваемых операторов.

а) Коэффициенты $a_\alpha(x)$ оператора L принадлежат пространству $C^{2m}(\bar\Omega)$.

Следующее условие связано с неотрицательностью энергии системы. Для формулировки этого условия произведем некоторые построения.

Предположив, что $w(x,t)$ – решение задачи (2.1) – (2.3), умножим тождество (2.1) на $w' = \frac{\partial w}{\partial t}$ и, проинтегрировав по цилиндру Q_T, получим

$$\begin{aligned} 0 = \iint_{Q_T} w'(w'' + L_1 w)dx\, dt = \iint_{Q_T} w'' w'\, dx\, dt + \\ + \iint_{Q_T} w'\Delta^{2m} w\, dx\, dt + \iint_{Q_T} w' Lw\, dx\, dt. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Очевидно

$$\iint_{Q_T} w' w''\, dx\, dt = \frac{1}{2}\int_\Omega |w'|^2 dx\Big|_0^T. \tag{3.2}$$

Далее, в силу начальных условий (2.2)

$$\begin{aligned} \iint_{Q_T} w'\Delta^{2m} w\, dx\, dt = \iint_{Q_T} \Delta^m w' \cdot \Delta^m w\, dx\, dt = \\ = \frac{1}{2}\int_\Omega \left\{\int_0^T \frac{\partial}{\partial t}(\Delta^m w)^2 dt\right\} dx = \frac{1}{2}\int_\Omega |\Delta^m w|^2 dx\Big|_0^T. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Наконец, преобразовав последний интеграл правой части (3.1), получим

$$\iint_{Q_T} w' Lw\,dx\,dt = \sum_{|\alpha|\leq 2m-1} \iint_{Q_T} D^\alpha w' \cdot a_\alpha D^\alpha w\,dx\,dt =$$
$$= \frac{1}{2} \sum_{|\alpha|\leq 2m-1} \int_\Omega \left\{ \int_0^T a_\alpha(x) \frac{\partial}{\partial t} (D^\alpha w)^2 dt \right\} dx =$$
$$= \frac{1}{2} \sum_{|\alpha|\leq 2m-1} \int_\Omega a_\alpha(x) |D^\alpha w|^2 dx \Bigg|_0^T . \tag{3.4}$$

Подставляя полученные выражения (3.2) – (3.4) в (3.1), приходим к тождеству

$$\frac{1}{2} \int_\Omega \left[|w'|^2 + |\Delta^m w|^2 + \sum_{|\alpha|\leq 2m-1} a_\alpha(x) |D^\alpha w|^2 \right] dx \Big|_0^T = 0. \tag{3.5}$$

Интеграл энергии обозначим через

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_\Omega \left[|w'|^2 + |\Delta^m w|^2 + \sum_{|\alpha|\leq 2m-1} a_\alpha(x) |D^\alpha w|^2 \right] dx. \tag{3.6}$$

Из (3.5) следует, что $E(t) = \mathrm{const}$ при $t \in [0, T]$. Выражение (3.6) для энергии диктует ограничения на "младшие" члены оператора L_1, а именно,

b) для любых $\xi \in \mathbb{R}^n$ и $x \in \Omega$ имеет место неравенство

$$\sum_{|\alpha|\leq 2m-1} a_\alpha(x) \xi^{2\alpha} \geq 0, \quad (\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \cdots \xi_n^{\alpha_n}); \tag{3.7}$$

c) для любых $\xi \in \mathbb{R}^n$ и $x \in \Omega$ имеем

$$\sum_{k=1}^n \sum_{|\alpha|\leq 2m-1} m_k(x) \frac{\partial a_\alpha}{\partial x_k} \xi^{2\alpha} \leq 0. \tag{3.8}$$

3.2 Введем функциональные пространства, в которых мы будем исследовать поставленную в §1 задачу управления.

Обозначим через $H^s(\Omega)$ ($s \in \mathbb{Z}_+$) пространство Соболева с нормой

$$\|u\|_s = \left[\sum_{|\alpha|\leq s} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^2 dx \right]^{1/2}. \tag{3.9}$$

По определению, $\overset{\circ}{H}{}^s(\Omega)$ подпространство гильбертова пространства $H^s(\Omega)$, являющееся замыканием в норме (3.9) финитных, бесконечно дифференцируемых в Ω функций.

Отметим, что на границе $\Gamma = \partial\Omega$ функции пространства $\overset{\circ}{H}{}^{s}(\Omega)$, вместе со своими производными порядка $s-1$ включительно, стремятся в среднем к нулю.

В пространстве $\overset{\circ}{H}{}^{s}(\Omega)$ зададим норму, эквивалентную (3.9) :

$$'||u||_s = \left[\sum_{|\alpha|=s} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^2 dx \right]^{1/2}. \tag{3.10}$$

Наконец, в прямом произведении гильбертовых пространств

$$F = \overset{\circ}{H}{}^{2m}(\Omega) \times L_2(\Omega) \tag{3.11}$$

будем рассматривать норму

$$||\{u, v\}||_F = \left('||u||^2_{2m} + ||v||^2_o\right)^{1/2}, \tag{3.12}$$

где $||\cdot||_o$ – норма пространства $L_2(\Omega)$.

§4. РАЗРЕШИМОСТЬ ПРОБЛЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

4.1 В этом параграфе доказан основной результат статьи. А именно, устанавливается существование точного управления рассматриваемой смешанной задачей. Доказательство основано на следующих двух теоремах.

Теорема 4.1. *Пусть $w(x,t)$ – решение задачи (2.1) – (2.3), отвечающее начальным данным $\{w^o, w^1\}$, принадлежащим пространству F. При выполнении условий а), б) существует постоянная $c > 0$, не зависящая от T такая, что*

$$\int_\Sigma |\Delta^m w|^2 d\Sigma \le c(1+T)||\{w^o, w^1\}||^2_F. \tag{4.1}$$

Теорема 4.2. *Пусть выполнены условия а) – в). Тогда существуют постоянные $c > 0$ и $T > 0$ такие, что для решения $w(x,t)$ задачи (2.1) – (2.3) справедлива оценка*

$$\int_{\Gamma(x^o)\times(0,T)} |\Delta^m w|^2 d\Gamma dt \ge c(T - T_o)||\{w^o, w^1\}||^2_F. \tag{4.2}$$

Доказательство теоремы 4.1. Введем в рассмотрение функции $h_k(x) \in$

$\in C^{2m}(\overline{\Omega})$, $k = 1, 2, \ldots, n$, удовлетворяющие условиям

$$h_k(x)|_\Gamma = \nu_k, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{4.3}$$

Умножив тождество (2.1) на $h_k \frac{\partial w}{\partial x_k}$, суммируя по $k = 1, 2, \ldots, n$ и интегрируя по цилиндру Q_T, получаем

$$\sum_{k=1}^n \iint_{Q_T} w'' h_k(x) \frac{\partial w}{\partial x_k}\, dx\, dt + \sum_{k=1}^n \iint_{Q_T} \Delta^{2m} w \cdot h_k(x) \frac{\partial w}{\partial x_k}\, dx\, dt +$$
$$+ \sum_{k=1}^n \iint_{Q_T} Lw \cdot h_k(x) \frac{\partial w}{\partial x_k}\, dx\, dt = 0. \tag{4.4}$$

Произведенные опеарции неоднократно применялись различными авторами в подобных ситуациях (см., напр., [15],[16]). Преобразуем вначале

$$I_1 = \sum_{k=1}^n \iint_{Q_T} w'' h_k(x) \frac{\partial w}{\partial x_k}\, dx\, dt. \tag{4.5}$$

Интегрируя по частям по переменной t, после несложных преобразований получим

$$I_1 = \sum_{k=1}^n \int_\Omega w' h_k \frac{\partial w}{\partial x_k}\, dx \Big|_0^T - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \iint_{Q_T} h_k(x) \frac{\partial}{\partial x_k}(w'^2)\, dx\, dt. \tag{4.6}$$

Учитывая, что $w'|_\Sigma = 0$, будем иметь

$$\sum_{k=1}^n \iint_{Q_T} h_k(x) \frac{\partial}{\partial x_k}(w'^2)\, dx\, dt = -\sum_{k=1}^n \iint_{Q_T} w'^2 \frac{\partial h_k}{\partial x_k}\, dx\, dt. \tag{4.7}$$

Обозначим

$$X = \sum_{k=1}^n \int_\Omega w' h_k(x) \frac{\partial w}{\partial x_k}\, dx \Big|_0^T \tag{4.8}$$

и подставим (4.7), (4.8) в (4.6). Тогда получим

$$I_1 = X + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \iint_{Q_T} w'^2 \frac{\partial h_k}{\partial x_k}\, dx\, dt. \tag{4.9}$$

Рассмотрим теперь

$$I_2 = \sum_{k=1}^n \iint_{Q_T} \Delta^{2m} w \cdot h_k(x) \frac{\partial w}{\partial x_k}\, dx\, dt. \tag{4.10}$$

Принимая во внимание условия (2.3) и (4.3), нетрудно убедиться, что

$$I_2 = \sum_{k=1}^{n} \iint_{Q_T} \Delta^m \left(h_k \frac{\partial w}{\partial x_k} \right) \cdot \Delta^m w \, dx \, dt -$$

$$- \sum_{k,j=1}^{n} \int_{\Sigma} \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \Delta^{m-1} \left(h_k \frac{\partial w}{\partial x_k} \right) \right\} \cdot \Delta^m w \cdot \nu_j \, d\Sigma.$$

Так как $w|_{\Sigma} = 0$, то

$$\frac{\partial w}{\partial x_j} = \nu_j \frac{\partial w}{\partial \nu}. \tag{4.10'}$$

А поскольку

$$\frac{\partial}{\partial \nu} = \sum_{k=1}^{n} \nu_k \frac{\partial}{\partial x_k},$$

то I_2 можем переписать в виде

$$I_2 = \sum_{k=1}^{n} \iint_{Q_T} \Delta^m \left(h_k \frac{\partial w}{\partial x_k} \right) \cdot \Delta^m w \, dx \, dt - \int_{\Sigma} |\Delta^m w|^2 \, d\Sigma. \tag{4.11}$$

Рассмотрим теперь

$$I_3 = \sum_{k=1}^{n} \iint_{Q_T} \Delta^m \left(h_k \frac{\partial w}{\partial x_k} \right) \cdot \Delta^m w \, dx \, dt = \sum_{k=1}^{n} \iint_{Q_T} h_k(x) \Delta^m \left(\frac{\partial w}{\partial x_k} \right) \cdot \Delta^m w \, dx \, dt +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{|\alpha|+|\beta|=2m \\ \alpha \neq 0}} a_{\alpha\beta} \iint_{Q_T} D^\alpha h_k(x) D^\beta \left(\frac{\partial w}{\partial x_k} \right) \cdot \Delta^m w \, dx \, dt = I_3' + I_3''. \tag{4.12}$$

Имеем

$$I_3' = \sum_{k=1}^{n} \iint_{Q_T} h_k(x) \Delta^m \left(\frac{\partial w}{\partial x_k} \right) \cdot \Delta^m w \, dx \, dt = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \iint_{Q_T} h_k(x) \frac{\partial}{\partial x_k} (\Delta^m w)^2 \, dx \, dt =$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \iint_{Q_T} \frac{\partial h_k}{\partial x_k} |\Delta^m w|^2 \, dx \, dt + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \int_{\Sigma} h_k(x) |\Delta^m w|^2 \nu_k \, d\Sigma.$$

Учитывая (4.3), получим

$$I_3' = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \iint_{Q_T} \frac{\partial h_k}{\partial x_k} |\Delta^m w|^2 \, dx \, dt + \frac{1}{2} \int_{\Sigma} |\Delta^m w|^2 \, d\Sigma. \tag{4.13}$$

Подставив (4.12) и (4.13) в (4.11), будем иметь

$$I_2 = I_3'' - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \iint_{Q_T} \frac{\partial h_k}{\partial x_k} |\Delta^m w|^2 \, dx \, dt - \frac{1}{2} \int_{\Sigma} |\Delta^m w|^2 \, d\Sigma. \tag{4.14}$$

Последнее слагаемое соотношения (4.4) преобразуем следующим образом :

$$
\begin{aligned}
I_4 &= \sum_{k=1}^{n} \iint_{Q_T} h_k(x)\frac{\partial w}{\partial x_k} \cdot Lw\,dx\,dt = \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sum_{|\alpha|\le 2m-1} \iint_{Q_T} D^\alpha \left(h_k \frac{\partial w}{\partial x_k}\right) \cdot a_\alpha(x) D^\alpha w\,dx\,dt = \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sum_{|\alpha|\le 2m-1} \iint_{Q_T} h_k(x) D^\alpha \left(\frac{\partial w}{\partial x_k}\right) \cdot a_\alpha(x) D^\alpha w\,dx\,dt + \\
&+ \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{|\alpha|+|\beta|\le 2m-1 \\ \alpha\ne 0}} A_{\alpha\beta} \iint_{Q_T} D^\alpha h_k D^\beta \left(\frac{\partial w}{\partial x_k}\right) \cdot a_\alpha(x) D^\alpha w\,dx\,dt = I_4' + I_4''.
\end{aligned}
\tag{4.15}
$$

Подставляя полученные для $I_1 - I_4$ выражения в (4.4), перепишем эту формулу в виде

$$
X + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \iint_{Q_T} w'^2 \frac{\partial h_k}{\partial x_k} dx\,dt - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \iint_{Q_T} \frac{\partial h_k}{\partial x_k} |\Delta^m w|^2\,dx\,dt -
$$

$$
- \frac{1}{2}\int_{\Sigma} |\Delta^m w|^2\,d\Sigma + I_3'' + I_4' + I_4'' = 0. \tag{4.16}
$$

Для доказательства неравенства (4.1) оценим по отдельности слагаемые соотношения (4.16). В силу того, что $h_k \in C^{2m}(\overline{\Omega})$, имеем

$$
\begin{aligned}
|I_3''| &= \Big|\sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{|\alpha|+|\beta|=2m \\ \alpha\ne 0}} a_{\alpha\beta} \iint_{Q_T} D^\alpha h_k D^\beta \left(\frac{\partial w}{\partial x_k}\right) \cdot \Delta^m w\,dx\,dt\Big| \le \\
&\le c_1 \sum_{k=1}^{n} \sum_{|\beta|\le 2m-1} \iint_{Q_T} \left|D^\beta \left(\frac{\partial w}{\partial x_k}\right)\right| \cdot |\Delta^m w|\,dx\,dt = \\
&= c_1 \sum_{|\beta|\le 2m} \iint_{Q_T} |D^\beta w| \cdot |\Delta^m w|\,dx\,dt \le \\
&\le c_2 \iint_{Q_T} \left[\sum_{|\beta|\le 2m} |D^\beta w|^2 + |\Delta^m w|^2\right] dx\,dt
\end{aligned}
\tag{4.17}
$$

(здесь и далее через c_i, $i = 1, 2, \dots$ обозначаем различные постоянные). Используя, далее, легко проверяемую оценку

$$
\|w\|_{2m}^2 \le c_4 \iint_{Q_T} |\Delta^m w|^2\,dx\,dt, \tag{4.18}
$$

из (4.17) и (3.6) получаем

$$
|I_3''| \le c_5 \iint_{Q_T} |\Delta^m w|^2\,dx\,dt \le c_6 \int_0^T E(t)\,dt = c_6 T\,E(0). \tag{4.19}
$$

Как нетрудно заметить

$$E(t) \le c_7 \left(\|w'\|_0^2 + '\|w\|_{2m}^2\right) \tag{4.20}$$

Используя последнюю оценку, из (4.19) находим

$$|I_3''| \le c_8 T \left(\|w^1\|_0^2 + '\|w^0\|_{2m}^2\right) = c_8 T \|\{w^0, w^1\}\|_F^2. \tag{4.21}$$

Далее

$$\begin{aligned} |I_4'| &= |\sum_{k=1}^{n} \sum_{|\alpha|\le 2m-1} \iint_{Q_T} h_k(x) D^\alpha \left(\frac{\partial w}{\partial x_k}\right) \cdot a_\alpha(x) D^\alpha w \, dx\, dt| \le \\ &\le c_9 \left(\iint_{Q_T} \sum_{|\alpha|\le 2m} |D^\alpha w|^2 dx\, dt + \sum_{|\alpha|\le 2m-1} \iint_{Q_T} |D^\alpha w|^2 dx\, dt \right) \le \\ &\le c_{10} \iint_{Q_T} |\Delta^m w|^2 dx\, dt \le \\ &\le c_{11} \int_0^T E(t) dt = c_{11} T\, E(0) \le c_{12} T \|\{w^0, w^1\}\|_F^2. \end{aligned} \tag{4.22}$$

I_4'' оценивается аналогично :

$$\begin{aligned} |I_4''| &= |\sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{|\alpha|+|\beta|\le 2m-1 \\ \alpha\ne 0}} A_{\alpha\beta} \iint_{Q_T} D^\alpha h_k D^\beta \left(\frac{\partial w}{\partial x_k}\right) \cdot a_\alpha(x) D^\alpha w \, dx\, dt| \le \\ &\le c_{13} T \|\{w^0, w^1\}\|_F^2. \end{aligned} \tag{4.23}$$

Имеем

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \iint_{Q_T} w'^2 \frac{\partial h_k}{\partial x_k} dx\, dt \right| \le c_{14} T \|\{w^0, w^1\}\|_F^2, \tag{4.24}$$

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \iint_{Q_T} \frac{\partial h_k}{\partial x_k} \Delta^m w \, dx\, dt \right| \le c_{15} T \|\{w^0, w^1\}\|_F^2. \tag{4.25}$$

Остается оценить интеграл X. Легко усмотреть, что

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \int_\Omega w' h_k(x) \frac{\partial w}{\partial x_k} dx \right| \le c_{16} \|\{w^0, w^1\}\|_F^2,$$

откуда вытекаст нсравенство

$$|X| \le 2 c_{16} \|\{w^0, w^1\}\|_F^2. \tag{4.26}$$

Из (4.16) следует, что

$$\int_\Sigma |\Delta^m w|^2 d\Sigma \le 2\left(|X| + |I_3''| + |I_4'| + |I_4''|\right) +$$

$$+\left|\sum_{k=1}^n \iint_{Q_T} w'^2 \frac{\partial h_k}{\partial x_k} dx\,dt\right| + \left|\sum_{k=1}^n \iint_{Q_T} \frac{\partial h_k}{\partial x_k} |\Delta^m w|^2\, dx\,dt\right|.$$

Подставляя, наконец, (4.17), (4.19), (4.21) - (4.26) в последнее неравенство, приходим к окончательной оценке

$$\int_\Sigma |\Delta^m w|^2 d\Sigma \le c_{17}(1+T)\|\{w^\circ, w^1\}\|_F^2.$$

Доказательство теоремы 4.2. Пусть $w(x,t)$ - решение задачи (2.1) - (2.3). Умножим тождество (2.1) на $m_k \frac{\partial w}{\partial x_k}$, просуммируем по $k = 1, 2, \dots, n$ и проинтегрируем по области Q_T. В результате получим

$$0 = \sum_{k=1}^n \iint_{Q_T} m_k(x)\frac{\partial w}{\partial x_k} \cdot w''\, dx\,dt + \sum_{k=1}^n \iint_{Q_T} m_k(x)\frac{\partial w}{\partial x_k} \cdot \Delta^m w\, dx\,dt +$$

$$+\sum_{k=1}^n \iint_{Q_T} m_k(x)\frac{\partial w}{\partial x_k} \cdot Lw\, dx\,dt = J_1 + J_2 + J_3. \tag{4.27}$$

Преобразуем слагаемые последнего соотношения.

$$J_1 = \sum_{k=1}^n \iint_{Q_T} m_k(x)\frac{\partial w}{\partial x_k} \cdot w''\, dx\,dt = -\sum_{k=1}^n \iint_{Q_T} m_k(x) w' \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x_k}\, dx\,dt +$$

$$+\sum_{k=1}^n \int_\Omega m_k(x) w' \frac{\partial w}{\partial x_k}\, dx\Big|_0^T = \widetilde{X} - \frac{1}{2}\iint_{Q_T} \sum_{k=1}^n m_k(x)\frac{\partial}{\partial x_k}(w')^2 dx\,dt, \tag{4.28}$$

где

$$\widetilde{X} = \sum_{k=1}^n \int_\Omega m_k(x) w' \frac{\partial w}{\partial x_k}\, dx\Big|_0^T. \tag{4.29}$$

Принимая во внимание, что $w'|_\Sigma = 0$ и $\frac{\partial m_k}{\partial x_k} \equiv 1$, $k = 1, 2, \dots, n$, из (2.28) получаем

$$J_1 = \widetilde{X} + \frac{n}{2}\iint_{Q_T} w'^2 dx\,dt. \tag{4.30}$$

Далее

$$J_2 = \sum_{k=1}^n \iint_{Q_T} m_k(x)\frac{\partial w}{\partial x_k} \cdot \Delta^{2m} w\, dx\,dt = \sum_{k=1}^n \iint_{Q_T} \Delta^m\left(m_k(x)\frac{\partial w}{\partial x_k}\right) \cdot \Delta^m w\, dx\,dt -$$

$$-\sum_{k,j=1}^{n}\int_{\Sigma}\frac{\partial}{\partial x_j}\left\{\Delta^{m-1}(m_k\frac{\partial w}{\partial x_k})\right\}\Delta^m w\,\nu_j\,d\Sigma = J_2' - J_2''. \tag{4.31}$$

Заметив, что $\frac{\partial m_k}{\partial x_j} = \delta_{jk}$, где δ_{jk} – символ Кронеккера, получим

$$\begin{aligned} J_2' &= \sum_{k,j=1}^{n}\iint_{Q_T}\Delta^{m-1}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}(m_k(x)\frac{\partial w}{\partial x_k})\right)\cdot\Delta^m w\,dx\,dt = \\ &= \sum_{k=1}^{n}\iint_{Q_T} m_k(x)\Delta^m\left(\frac{\partial w}{\partial x_k}\right)\cdot\Delta^m w\,dx\,dt + \\ &+ \sum_{k=1}^{n}\iint_{Q_T}\Delta^{m-1}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial w}{\partial x_k}\right)\cdot\Delta^m w\,dx\,dt = \widetilde{J_2'} + \iint_{Q_T}|\Delta^m w|^2 dx\,dt. \end{aligned} \tag{4.32}$$

Нетрудно убедиться в том, что

$$\widetilde{J_2'} = -\frac{n}{2}\iint_{Q_T}|\Delta^m w|^2 dx\,dt + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\int_{\Sigma} m_k(x)|\Delta^m w|^2\nu_k\,d\Sigma.$$

Подставив последнее выражение для $\widetilde{J_2'}$ в (4.32), получим

$$J_2' = (1-\frac{n}{2})\iint_{Q_T}|\Delta^m w|^2 dx\,dt + \frac{1}{2}\int_{\Sigma}(\sum_{k=1}^{n} m_k\nu_k)|\Delta^m w|^2\,d\Sigma. \tag{4.33}$$

Преобразуем теперь J_2'' :

$$\begin{aligned} J_2'' &= \sum_{k,j=1}^{n}\int_{\Sigma} m_k(x)\Delta^{m-1}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial w}{\partial x_k}\right)\cdot\Delta^m w\cdot\nu_j\,d\Sigma + \\ &+ \sum_{k,j=1}^{n}\int_{\Sigma}\Delta^{m-1}\left(\frac{\partial m_k}{\partial x_j}\right)\frac{\partial w}{\partial x_k}\cdot\Delta^m w\cdot\nu_j\,d\Sigma = \overline{J_2''} + \widetilde{J_2''}. \end{aligned} \tag{4.34}$$

В силу (4.10′)

$$\overline{J_2''} = \sum_{k,j=1}^{n}\int_{\Sigma} m_k(x)\nu_k\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\Delta^{m-1}w\cdot\Delta^m w\,d\Sigma = \int_{\Sigma}(\sum_{k=1}^{n} m_k\nu_k)\cdot|\Delta^m w|^2\,d\Sigma. \tag{4.35}$$

С учетом условий (2.3) получаем

$$\widetilde{J_2''} = \sum_{k,j=1}^{n}\int_{\Sigma}\Delta^{m-1}\left(\frac{\partial m_k}{\partial x_j}\right)\frac{\partial w}{\partial x_k}\cdot\Delta^m w\cdot\nu_j\,d\Sigma = \sum_{k=1}^{n}\int_{\Sigma}\Delta^{m-1}\frac{\partial w}{\partial x_k}\cdot\Delta^m w\cdot\nu_j\,d\Sigma = 0, \tag{4.36}$$

и, подставив (4.35) и (4.36) в (4.34), имеем

$$J_2'' = \int_{\Sigma}(\sum_{k=1}^{n} m_k\nu_k)\cdot|\Delta^m w|^2\,d\Sigma. \tag{4.37}$$

Возвращаясь к соотношению (4.31), заметим, что в силу (4.33) и (4.37)

$$J_2 = (1-\frac{n}{2})\iint_{Q_T} |\Delta^m w|^2 dx\,dt - \frac{1}{2}\int_\Sigma (\sum_{k=1}^n m_k\nu_k)|\Delta^m w|^2\,d\Sigma. \tag{4.38}$$

Воспользовавшись (4.34) и (4.38), перепишем (4.27) в виде

$$\widetilde{X} + \frac{n}{2}\iint_{Q_T} |w'|^2 dx\,dt + (1-\frac{n}{2})\iint_{Q_T} |\Delta^m w|^2 dx\,dt -$$

$$-\frac{1}{2}\int_\Sigma (\sum_{k=1}^n m_k\nu_k)|\Delta^m w|^2\,d\Sigma + J_3 = 0. \tag{4.39}$$

Преобразуем, наконец, J_3 :

$$J_3 = \sum_{k=1}^n \iint_{Q_T} m_k(x)\frac{\partial w}{\partial x_k}\cdot Lw\,dx\,dt =$$

$$= \sum_{k=1}^n \sum_{|\alpha|\le 2m-1} \iint_{Q_T} D^\alpha\left(m_k(x)\frac{\partial w}{\partial x_k}\right)\cdot a_\alpha(x)D^\alpha w\,dx\,dt =$$

$$= \sum_{|\alpha|\le 2m-1}\iint_{Q_T} a_\alpha(x)|D^\alpha w|^2\,dx\,dt + J_3', \tag{4.40}$$

где

$$J_3' = \sum_{k=1}^n \sum_{|\alpha|\le 2m-1}\iint_{Q_T} m_k(x)D^\alpha\left(\frac{\partial w}{\partial x_k}\right)\cdot a_\alpha(x)D^\alpha w\,dx\,dt. \tag{4.41}$$

Далее, имеем

$$J_3' = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^n \sum_{|\alpha|\le 2m-1}\iint_{Q_T} m_k(x)a_\alpha(x)\frac{\partial}{\partial x_k}(D^\alpha w)^2\,dx\,dt =$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^n \sum_{|\alpha|\le 2m-1}\iint_{Q_T}\left[a_\alpha(x)\frac{\partial m_k}{\partial x_k} + m_k\frac{\partial a_\alpha(x)}{\partial x_k}\right]|D^\alpha w|^2\,dx\,dt =$$

$$= -\frac{n}{2}\sum_{|\alpha|\le 2m-1}\iint_{Q_T} a_\alpha(x)|D^\alpha w|^2\,dx\,dt -$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^n \sum_{|\alpha|\le 2m-1}\iint_{Q_T} m_k(x)\frac{\partial a_\alpha(x)}{\partial x_k}|D^\alpha w|^2\,dx\,dt. \tag{4.42}$$

Подставляя (4.42) в (4.40), получаем

$$J_3 = (1-\frac{n}{2})\sum_{|\alpha|\le 2m-1}\iint_{Q_T} a_\alpha(x)|D^\alpha w|^2\,dx\,dt -$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^n \sum_{|\alpha|\le 2m-1}\iint_{Q_T} m_k(x)\frac{\partial a_\alpha(x)}{\partial x_k}|D^\alpha w|^2\,dx\,dt. \tag{4.43}$$

Возвращаясь к соотношению (4.39), с учетом (4.43) находим

$$\tilde{X} + \frac{n}{2}\iint_{Q_T} |w'|^2 dx\,dt + \left(1-\frac{n}{2}\right)\iint_{Q_T} |\Delta^m w|^2 dx\,dt -$$

$$-\frac{1}{2}\int_{\Sigma}\left(\sum_{k=1}^{n} m_k\nu_k\right)|\Delta^m w|^2\, d\Sigma + \left(1-\frac{n}{2}\right)\sum_{|\alpha|\le 2m-1}\iint_{Q_T} a_\alpha(x)|D^\alpha w|^2\, dx\,dt -$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{|\alpha|\le 2m-1}\iint_{Q_T} m_k(x)\frac{\partial a_\alpha(x)}{\partial x_k}|D^\alpha w|^2\, dx\,dt = 0. \tag{4.44}$$

Перепишем тождество (4.44) в виде

$$\tilde{X} + \frac{n-1}{2}Y - \frac{1}{2}\int_{\Sigma}\left(\sum_{k=1}^{n} m_k\nu_k\right)|\Delta^m w|^2\, d\Sigma + \frac{1}{2}\iint_{Q_T}\Bigg[|w'|^2 + |\Delta^m w|^2 +$$

$$+\sum_{|\alpha|\le 2m-1} a_\alpha(x)|D^\alpha w|^2 - \sum_{k=1}^{n}\sum_{|\alpha|\le 2m-1} m_k\frac{\partial a_\alpha}{\partial x_k}|D^\alpha w|^2\Bigg]\, dx\,dt = 0, \tag{4.45}$$

где

$$Y = \iint_{Q_T}\left[|w'|^2 - |\Delta^m w|^2 - \sum_{|\alpha|\le 2m-1} a_\alpha(x)|D^\alpha w|^2\right] dx\,dt. \tag{4.46}$$

Докажем, что

$$Y = \int_{\Omega} w\cdot w'\, dx\,\Big|_0^T. \tag{4.47}$$

Умножив тождество (2.1) на $w(x,t)$ и интегрируя по цилиндру Q_T, получим

$$\iint_{Q_T}(w'' + \Delta^{2m}w + Lw)w\, dx\,dt = 0, \tag{4.48}$$

и, после несложных преобразований имеем

$$0 = \int_{\Omega} w\cdot w'\, dx\,\Big|_0^T - \iint_{Q_T}|w'|^2 dx\,dt + \iint_{Q_T}|\Delta^m w|^2 dx\,dt +$$

$$+\sum_{|\alpha|\le 2m-1}\iint_{Q_T} a_\alpha(x)|D^\alpha w|^2 dx\,dt = \int_{\Omega} w\cdot w'\, dx\,\Big|_0^T - Y,$$

что равносильно (4.47).

Перейдем к доказательству оценки (4.2). С этой целью рассмотрим вначале последнее слагаемое левой части равенства (4.45). В силу условия в) теоремы

$$\frac{1}{2}\iint_{Q_T}\Bigg[|w'|^2 + |\Delta^m w|^2 + \sum_{|\alpha|\le 2m-1} a_\alpha(x)|D^\alpha w|^2 -$$

$$-\sum_{k=1}^{n}\sum_{|\alpha|\le 2m-1} m_k\frac{\partial a_\alpha}{\partial x_k}|D^\alpha w|^2\Bigg]\, dx\,dt \ge$$

$$\ge \int_0^T E(t)dt = T\,E(0) \ge c_1 T\|\{w^0, w^1\}\|_F^2. \tag{4.49}$$

Здесь мы воспользовались очевидной оценкой

$$E(t) \geq c_1({}'||w||^2_{2m} + ||w'||^2_0), \quad t \in [0, T]. \tag{4.50}$$

Подставляя (4.49) в (4.45) и разлагая интеграл по поверхности Σ в сумму двух интегралов по $\Gamma(x^o) \times (0, T)$ и $\Gamma_*(x^o) \times (0, T)$, приходим к оценке

$$c_1 T||\{w^o, w^1\}||^2_F - \frac{1}{2}\int_{\Gamma(x^o)\times(0,T)} (\sum_{k=1}^n m_k\nu_k)|\Delta^m w|^2\, d\Gamma\, dt \leq -\widetilde{X} - \frac{n-1}{2}Y. \tag{4.51}$$

При выводе этой оценки мы воспользовались тем, что

$$\int_{\Gamma_*(x^o)\times(0,T)} (\sum_{k=1}^n m_k\nu_k)|\Delta^m w|^2\, d\Gamma\, dt \leq 0.$$

Интегралы $\widetilde{X}$ и Y оцениваются точно так же, как X при доказательстве теоремы 4.1. Стало быть, имеем

$$|\widetilde{X}| \leq c_2||\{w^o, w^1\}||^2_F, \tag{4.52}$$

$$|Y| \leq c_3||\{w^o, w^1\}||^2_F. \tag{4.53}$$

Обозначив

$$R(x^o) = \sup_{x\in\Gamma} \sum_{k=1}^n m_k(x)\nu_k > 0,$$

из (4.51) – (4.53) получим

$$T||\{w^o, w^1\}||^2_F \leq \frac{R(x^o)}{2c_1}\int_{\Gamma(x^o)\times(0,T)} |\Delta^m w|^2\, d\Gamma\, dt + \frac{1}{c_1}\left(c_2 + \frac{n-1}{2}c_3\right)||\{w^o, w^1\}||^2_F.$$

Отсюда следует, что

$$\int_{\Gamma(x^o)\times(0,T)} |\Delta^m w|^2\, d\Gamma\, dt \geq \frac{2c_1}{R(x^o)}\left[T - \frac{1}{c_1}\left(c_2 + \frac{n-1}{2}c_3\right)\right]||\{w^o, w^1\}||^2_F.$$

Обозначив $T_o = \frac{1}{c_1}\left(c_2 + \frac{n-1}{2}c_3\right)$ и $c = \frac{2c_1}{R(x^o)}$, приходим к окончательной оценке :

$$\int_{\Gamma(x^o)\times(0,T)} |\Delta^m w|^2\, d\Gamma\, dt \geq c(T - T_o)||\{w^o, w^1\}||^2_F.$$

Как следствия из теорем 4.1 и 4.2 получаем следующие результаты.

Теорема 4.3. *Пусть оператор L удовлетворяет условиям а) – в). Тогда при достаточно больших T интеграл*

$$\left(\int_{\Gamma(x^\circ)\times(0,T)} |\Delta^m w|^2 \, d\Gamma \, dt\right)^{1/2} \tag{4.54}$$

определяет норму на множестве начальных данных $\{w^\circ, w^1\}$ задачи (2.1) – (2.3), эквивалентную норме пространства Соболева на прямом произведении $F = \overset{\circ}{H}{}^{2m}(\Omega) \times L_2(\Omega)$.

Доказательство. Из неравенства (4.1) следует существование интеграла (4.54). Если интеграл (4.54) равняется нулю, то, в силу (4.2), $w^\circ = 0$, $w^1 = 0$ при $T > T_\circ$. Поскольку задача (2.1) – (2.3) имеет единственное обобщенное решение, отсюда следует, что $w = 0$ внутри Q_T. Тем самым, теорема доказана.

Теорема 4.4. *При достаточно больших $T > 0$ оператор Λ, определяемый формулой (2.16), осуществляет изоморфизм между пространствами F и F', где $F' = H^{-2m}(\Omega) \times L_2(\Omega)$, а $H^{-2m}(\Omega)$ – сопряженное к $\overset{\circ}{H}{}^{2m}(\Omega)$ пространство.*

Доказательство. Утверждение теоремы следует из теоремы 4.3, поскольку в силу (2.20) и (2.21)

$$< \Lambda\{w^\circ, w^1\}, \{w^\circ, w^1\} >= \int_{\Gamma(x^\circ)\times(0,T)} |\Delta^m w|^2 \, d\Gamma \, dt =$$
$$= \int_\Omega (z'(0)w^\circ - z(0)w^1) dx.$$

Ввиду обратимости оператора Λ при достаточно больших T, для любой пары $\{z'(0), -z(0)\}$, где $z'(0) \in H^{-2m}(\Omega)$, $z(0) \in L_2(\Omega)$, найдется единственная пара $\{w^\circ, w^1\}$: $w^\circ \in \overset{\circ}{H}{}^{2m}(\Omega), w^1 \in L_2(\Omega)$, такая, что $\Lambda\{w^\circ, w^1\} = \{z'(0), -z(0)\}$. Тем самым, оператор Λ есть изоморфизм из F в F', и теорема доказана.

Приведем теперь основной результат работы.

Теорема 4.5. *Пусть оператор L удовлетворяет условиям а) – в), и $T > 0$ достаточно велико. Тогда при любых начальных данных $\{u^\circ, u^1\} \in F$ существует* *точное управление $v \in L_2(\Gamma(x^\circ) \times (0,T))$, приводящее систему (1.6) – (1.9) с начальными условиями u°, u^1 в состояние покоя за время T.*

Доказательство. Пусть $\{w^\circ, w^1\} \in F$. Как известно [14], эти начальные данные определяют единственное обобщенное решение $w(x,t)$ задачи (2.1) – (2.3). Согласно теореме 4.1, $\Delta^m w|_\Sigma$ существует и принадлежит пространству $L_2(\Sigma)$. Подставляя это значение $\Delta^m w$ в условие (2.6) и решая задачу (2.4) – (2.7), находим функцию $z(x,t)$. Повторяя рассуждения §2, легко убедиться в том, что $u = z(x,t)$ есть решение задачи точного управления системой (1.6) – (1.9).

4.2. О единственности управления. Заметим, что при заданном $T > T_0$ существует бесконечное множество управлений v, приводящих систему (1.6) – (1.9) в состояние покоя. В самом деле, для каждого $\hat{T}$, $0 < \hat{T} < T$, в силу теоремы 4.5, существует управление $\hat{v}$ такое, что для решения $\hat{u}(t,x,\hat{v})$ задачи (1.6) – (1.9) в цилиндре $Q_{\hat{T}}$ имеем $\hat{u}(\hat{T},x,\hat{v}) = \hat{u}'(\hat{T},x,\hat{v}) = 0$. Полагая

$$v = \begin{cases} \hat{v}, & \text{при } 0 < t \le \hat{T} \\ 0, & \text{при } \hat{T} < t < T, \end{cases} \tag{4.55}$$

получаем, что управление v приводит систему (1.6) – (1.9) в состояние покоя за время $\hat{T} \le T$. Как и в случае волнового уравнения (см. [17], а также [10], замечание 1.6), можно показать, что оптимальное управление $v_o \in L_2(\Gamma(x^\circ) \times (0,T))$, связанное условием (2.17) есть единственное управление, сообщающее минимум функционалу

$$\Phi(v_o) = \inf_v \int_{\Gamma(x^\circ)\times(0,T)} v^2\, d\Gamma\, dt,$$

где inf берется по всевозможным управлениям вида (4.55), приводящим систему (1.6) – (1.9) в состояние покоя за время T. Доказательство этого факта может быть получено рассуждениями, аналогичными примененным в [17], с естественными видоизменениями.

ABSTRACT. The paper investigates control problems for systems described by high-order evolutionary partial differential equations. The existence of exact control for mixed problems (where control can be applied

on the boundary or on part of the boundary) for a class of high-order evolutionary operators n suitable functional spaces is proved.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко, Математическая теория оптимальных процессов, Физматгиз, 1961, Наука, Москва, 1969.
2. M. R. Hestens, Calculus of Variations and Optimal Control Theory, W., 1966.
3. А. Д. Иоффе, В. М. Тихомиров, "Расширения вариационных задач", Труды МФО, т. 18, стр. 187 – 246, 1968.
4. А. Г. Бутковский, Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами, Наука, Москва, 1965.
5. P. K. Wang, "Control of distributed parameter systems", in transactions, Advances in Control Systems. Theory and applications, ed. C.T.Loondes, vol. 1, Acad. Press, New York, London, pp. 75 – 172, 1984.
6. D. L. Russel, "Controllability and stabilizability theory for linear partial differential equations", Recem progress and open questions, SIAM Rev., vol. 20, pp. 639 – 739, 1978.
7. D. L. Russel, "A unified boundary controllability theory", Stud. Appl. Math., vol. 52, pp. 189 – 211, 1973.
8. Ж.-Л. Лионс, Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями в частных производных, Мир, Москва, 1972.
9. J.-L. Lions, "Optimization pour certains classes dedustions devolution non lineare", Ann Mat. pure ed Appl., vol. 72, pp. 275 – 294, 1966.
10. J.-L. Lions, "Exact controlability, stabilization and perturbations for distributed systems", SIAM Review, vol. 30, no. 1, pp. 3 – 68, 1988.
11. W. Littman and L. Markus, "Exact boundary controllability of a hybrid system of elasticity", Rept., pp. 86 – 147, Univ. of Minnesota, Minneapolis, MN, 1987.
12. G. S. Nurre, R. S. Pyan, H. N. Scofield and J. L. Sims, "Dynamics and control of large space structures", J. Guidance Control Dynamics, vol. 7, pp. 514 – 526, 1984.
13. J. Lagnese, "Decay of solutions of wave equations in a bounded region with boundary dissipation", J. Dif. Eq., vol. 50, pp. 163 – 182, 1983.
14. J.-L. Lions and E. Magenes, Problémes aux Limites Nonhomogènes et Ápplications, vol. 1 and vol. 2, Dunod, Paris, 1968.
15. L. F. Ho, "Observabilitè frontière de lequation des ondes", C. R. Acad. Sei. Paris Sér. 1 Math, vol. 302, pp. 443 – 446, 1986.
16. Ж.-Л. Лионс, Управление сингулярными распределенными системами, Наука, Москва, 1987.
17. J.-L. Lions, "Controlabilitè exacte, stabilization perturbations des systèmes distribuès", vol. 1, Masson, Paris, 1988.

26 января 1994

Ереванский государственный университет,
Институт математики
Национальной Академии Наук Армении