О СХОДИМОСТИ В L^p ОРТОГОНАЛЬНЫХ РЯДОВ НА МНОЖЕСТВАХ ПОЧТИ ПОЛНОЙ МЕРЫ

Г. А. Карагулян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 29, №2, 1994

В статье рассмотрены общие ортогональные ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$, с $0 < \sum a_n^2 < \infty$, где $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ – ортонормальная система на $(0,1)$. В предположении, что $S_n(x)$ – частичные суммы ряда и $S_n \overset{L_2}{\Longrightarrow} f(x)$, доказано, что при любых $0 < \varepsilon < 1$ и $0 < \alpha < 2/3$ существует множество $E_\varepsilon \subset (0,1)$ с мерой, превосходящей $1-\varepsilon$, такое, что

1) $\int_{E_\varepsilon} \exp |C_\varepsilon S_n(x)|^\alpha \, dx \le 2, \quad n = 1, 2, \ldots$ 2) $\lim_{n\to\infty} \|S_n(x) - f(x)\|_{L^p(E_\varepsilon)} = 0.$

В статье рассмотрены ряды вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x), \quad \text{с} \quad 0 < \sum a_n^2 < \infty, \tag{1}$$

где $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ – некоторая ортонормированная на $(0,1)$ система. Обозначим частичные суммы ряда (1) через

$$S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n \varphi_n(x), \quad N = 1, 2, \ldots. \tag{2}$$

Как хорошо известно, Меньшовым [1] и Радемахером [2] установлено неравенство (см. также [3], стр. 252)

$$\int_0^1 \left[\sup_{1 \le N < \infty} \frac{|S_N(x)|}{\log N} \right]^2 dx \le C \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2.$$

Известно также, что при $1 \le p \le 2$ ряд (1) сходится в $L^p(0,1)$, однако, вообще говоря, сходимости в $L^p(0,1)$, $p > 2$, нет. Тем не менее, как показано ниже, для любого ряда (1) существует множество $E \subset (0,1)$, с мерой близкой единице, на котором сходимость в $L^p(E)$, $p > 2$, имеет место.

Теорема 1. *Для любого ортогонального ряда (1) и любых чисел* $0 < \varepsilon < 1$, $0 < \sigma < \frac{2}{3}$, *существует множество* $E_{\varepsilon,\sigma} \subset (0,1)$, $|E_{\varepsilon,\sigma}| > 1 - \varepsilon$ *такое, что*

$$\sup_{1 \le N < \infty} \int_{E_{\varepsilon,\sigma}} \exp\left[C_{\varepsilon,\sigma} \left(\frac{|S_N(x)|}{\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \right)^{1/2}} \right)^{2/3-\sigma} \right] dx \le 2, \tag{3}$$

где $C_{\varepsilon,\sigma}$ *– положительная постоянная, зависящая от* ε *и* σ.

Теорема 2. *Для любого ортогонального ряда (1) и для любого* $\varepsilon > 0$ *существует множество* $E_\varepsilon \subset (0,1)$ *с* $|E_\varepsilon| > 1 - \varepsilon$, *на котором ряд (1) сходится в* $L^p(E_\varepsilon)$ *при любом* $p > 2$.

Для любой последовательности $a \in l^2$ обозначим через $(a)_n$ ее координаты. Имеем

$$\|a\|_{l^2} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} (a)_n^2 \right)^{1/2} < \infty.$$

Ниже мы будем пользоваться следующим простым, но весьма полезным утверждением, являющимся модификацией одной леммы Эрдёша (см. [3], стр. 323).

Лемма 1. *Пусть задана последовательность* $a \in l^2$. *Найдутся число* l, $1 \le l < \infty$, *и векторы* a', $a'' \in l^2$ *вида*

$$\begin{aligned} a' &= ((a)_1, (a)_2, \dots, (a)_{l-1}, (a')_l, 0, \dots), \\ a'' &= (0, 0, \dots, 0, (a'')_l, (a)_{l+1}, (a)_{l+2}, \dots) \end{aligned} \tag{4}$$

такие, что

1) $a' + a'' = a$;

2) $\|a'\|_{l^2}^2 \le \frac{1}{2}\|a\|_{l^2}^2$, $\quad \|a''\|_{l^2}^2 \le \frac{1}{2}\|a\|_{l^2}^2$;

3) $|(a')_l| \le |(a)_l|$, $\quad |(a'')_l| \le |(a)_l|$.

Доказательство. В качестве l возьмем число, для которого

$$\sum_{n=1}^{l-1}(a)_n^2 \le \frac{1}{2}\|a\|_{l^2}^2 \le \sum_{n=1}^{l}(a)_n^2.$$

При этом, полагаем, что $\sum\limits_{n=1}^{0} = 0$. Положив

$$(a')_l = \frac{\frac{1}{2}\|a\|_{l^2}^2 - \sum\limits_{n=1}^{l-1}(a)_n^2}{(a)_l}, \quad (a'')_l = (a)_l - (a')_l,$$

определяем векторы (4), для которых, как легко проверить, условия 1) – 3) выполнены. Лемма доказана.

Пусть $f(x)$ – измеримая на $(0,1)$ функция. Обозначим через $f^*(x)$ монотонно убывающую на $(0,1)$ функцию, равноизмеримую с $f(x)$, т. е. такую, что

$$|\{f(x) > \lambda\}| = |\{f^*(x) > \lambda\}|$$

для любого числа $-\infty < \lambda < +\infty$.

Лемма 2. *Для любой совокупности измеримых функций* $\{f_n(x)\}_{n=1}^{N}$, $x \in (0,1)$, *справедливо неравенство*

$$\left\|\sum_{n=1}^{N} f_n(x)\right\|_{L^p(0,1)} \le \left\|\sum_{n=1}^{N} f_n^*(x)\right\|_{L^p(0,1)}, \quad p \ge 1. \tag{5}$$

Доказательство. Очевидно можно предполагать, что каждая $f_n(x)$ – ступенчатая функция, постоянная на отрезках $\left[\frac{k-1}{M}, \frac{k}{M}\right)$. Рассмотрим функции

$$g_n^{\sigma_n}(x) = a_{\sigma_n(k)}^{(n)} \quad \text{при} \quad x \in \left[\frac{k-1}{m}, \frac{k}{m}\right),$$

где σ_n – некоторая перестановка натуральных чисел $\{1, 2, ..., N\}$. Воспользуемся тем, что выражение $x^p + y^p$ $(p \ge 1)$ при условии $x + y = \mathrm{const}$ возрастает при возрастании $|x-y|$ (это легко проверить дифференцированием). Тогда нетрудно видеть, что выражение

$$\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\left|\sum_{n=1}^{N}a^{(n)}_{\sigma_n(k)}\right|^p$$

принимает свое наибольшее значение при $a^{(n)}_{\sigma_n(1)} \geq a^{(n)}_{\sigma_n(2)} \geq \ldots \geq a^{(n)}_{\sigma_n(N)}$, $n = 1, 2, \ldots, N$. Отсюда следует утверждение леммы.

Лемма 3. *Пусть $f(x)$ – измеримая функция, определенная на множестве $E \subset \subset (0,1)$, такая, что*

$$\|f(x)\|_{L^p(E)} \leq C \cdot p^\alpha \quad (\alpha > 0, C > 0 - - \textit{постоянные}) \tag{6}$$

при любом $p \geq 1$. Тогда имеет место неравенство

$$\int_E \exp\left[C_1 |f(x)|^{1/\alpha}\right] dx \leq 2,$$

где C_1 – положительная постоянная, зависящая только от C и α.

Доказательство. Воспользовавшись разложением экспоненциальной функции, учитывая (6) и неравенство

$$\int_E |f(x)|^r\, dx \leq \|f\|^r_{L^1(E)} \leq C^r, \quad \text{при} \quad 0 < r < 1 \ (E \subset (0,1)),$$

получаем

$$\int_E \exp\left(C_1 |f(x)|^{1/\alpha}\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{C_1^n}{n!}\int_E |f(x)|^{n/\alpha}\, dx \leq \sum_{n=0}^{[\alpha]}\frac{C_1^n \cdot C^{n/\alpha}}{n!} +$$
$$+ \sum_{n=[\alpha]+1}^{\infty}\frac{C_1^n}{n!}C^{n/\alpha}\left(\frac{n}{\alpha}\right)^n.$$

Очевидно, последняя сумма не превосходит 2 при достаточно малом $C_1 > 0$, зависящем только от C и α. Лемма доказана.

Лемма 4. *Для любых чисел $0 < \varepsilon < 1$, $\delta > 0$ и любого ортогонального ряда вида (1) существуют множество $E_{\varepsilon,\delta} \subset (0,1)$ с $|E_{\varepsilon,\delta}| > 1 - \varepsilon$ и число $A_{\varepsilon,\delta} > 0$ такие, что*

$$\|S_N(x)\|_{L^p(E_{\varepsilon,\delta})} \leq A_{\varepsilon,\delta}\, p^{\frac{1}{2}+\delta}\, \|a\|_{l^2}, \quad N = 1, 2, \ldots \tag{7}$$

при любом положительном $p \geq 1$.

Доказательство. Очевидно можно предполагать, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a)_n^2 = 1.$$

Разложим последовательность a, следуя конструкции Ердёша (см. [4], стр. 705) :

$$a = \sum_{k=1}^{2^n} a_k^{(n)}, \quad n = 1, 2, ...,$$

где $a_0^{(0)} = a$, а векторы $a_k^{(n)}$ построены последовательно. Если вектор $a_k^{(n-1)}$ уже построен, то, пользуясь леммой 1, представляем его в виде $a_k^{(n-1)} = a_{2k}^{(n)} + a_{2k+1}^{(n)}$. Легко усмотреть, что определенные таким образом векторы имеют вид

$$a_k^{(n)} = (0, ..., 0, a'_{l_k^{(n)}}, (a)_{l_k^{(n)}+1}, ..., (a)_{l_{k+1}^{(n)}-1}, a''_{l_{k+1}^{(n)}}, 0, ...)),$$

где $1 = l_0^{(n)} \leq l_1^{(n)} \leq ... \leq l_{2^n-1}^{(n)} < \infty$. При этом

$$\left|\left|a_k^{(n)}\right|\right|_{l^2}^2 \leq 2^{-n}, \quad k = 1, 2, ..., 2^n, \quad n = 1, 2, ..., \tag{8}$$

$$\left|\left(a_k^{(n)}\right)_i\right| \leq |(a)_i|, \quad i = 1, 2, ... \tag{9}$$

Легко убедиться, что для последовательности $a(N) = ((a)_1, (a)_2, ..., (a)_N, 0, ...)$ имеет место разложение

$$a(N) = \sum_{k=1}^{n_0} \varepsilon_k a_{m(k,N)}^{(k)} + b, \quad 1 \leq m(k, N) \leq 2^k, \tag{10}$$

где

$$b(0, ..., 0, (b)_l, (b)_{l+1}, 0, ...),$$

$$|(b)_l| \leq |(a)_l|, \quad |(b)_{l+1}| \leq |(a)_{l+1}|, \tag{11}$$

а ε_k равно 0 или 1. Определив

$$p_k^{(n)}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(a_k^{(n)}\right)_i \varphi_i(x), \quad k = 1, 2, ..., 2^n, \quad n = 1, 2, ...,$$

$$h(x)=\sum_{i=1}^{\infty}(b)_i\ \varphi_i(x),$$

из (8) - (10) получаем

$$\left\|p^{(n)}\right\|^2_{L^2(0,1)}\leq\frac{1}{2^n},\quad k=1,2,...,2^n,\quad n=1,2,... \tag{12}$$

и

$$S_N(x)=\sum_{k=1}^{n_0}\varepsilon_k\,p^{(k)}_{m(k,M)}(x)+h(x), \tag{13}$$

где

$$h(x)=(b)_l\ \varphi_l(x)+(b)_{l+1}\ \varphi_{l+1}(x). \tag{14}$$

Из (12) следует, что

$$\left|\left\{\left|p^{(n)}_k(x)\right|>\lambda\right\}\right|\leq\frac{1}{2^n\,\lambda^2}.$$

Тем самым, можно определить положительную функцию $\tilde{p}^{(n)}_k(x)$, такую, что

$$\left|p^{(n)}_k(x)\right|\leq\tilde{p}^{(n)}_k(x),\quad x\in(0,1), \tag{15}$$

$$\left|\left\{\tilde{p}^{(n)}_k(x)>\lambda\right\}\right|=\frac{1}{2^n\,\lambda^2},\quad\lambda>0. \tag{16}$$

Обозначим

$$E^{(n)}_k=\left\{\tilde{p}^{(n)}_k(x)>An^{\delta+1/2}\right\},\quad H_k=\left\{|\varphi_k(x)|>\frac{A}{|a_k|}\right\},$$

где число $A>0$ будет определено позже. Из неравенства Чебышева и (16) следует, что

$$\left|E^{(n)}_k\right|=\frac{1}{A^2\cdot 2^n\cdot n^{1+2\delta}},\quad |H_k|\leq\frac{a_k^2}{A^2}.$$

Отсюда, определив

$$F=\left(\cup_{n=1}^{\infty}\cup_{k=1}^{2^n}E^{(n)}_k\right)\cup\left(\cup_{k=1}^{\infty}H_k\right),$$

получаем, что при достаточно большом $A>0$, зависящем только от δ и ε

$$|F|\leq\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{A^2k^{1+2\delta}}+\frac{a_k^2}{A^2}\right)<\varepsilon.$$

Следовательно, для множества $E_{\varepsilon,\delta} = (0,1) \setminus F$ будем иметь $|E_{\varepsilon,\delta}| > 1 - \varepsilon$ и

$$\tilde{p}_k^{(n)}(x) \le A \cdot n^{\delta+1/2} \quad \text{при} \quad x \in E_{\varepsilon,\delta}, \tag{17}$$

$$|a_k|\,|\varphi_k(x)| \le A \quad \text{при} \quad x \in E_{\varepsilon,\delta}. \tag{18}$$

Из формул (13), (11), (14), (15), (18) и (5) следует, что

$$\begin{aligned} \|S_N(x)\|_{L^p(E_{\varepsilon,\delta})} &\le \left\| \sum_{k=1}^{n_0} \tilde{p}_{m(k,N)}^{(k)}(x) \right\|_{L^p(E_{\varepsilon,\delta})} + 2A \le \\ &\le \left\| \sum_{k=1}^{n_0} \left(\tilde{p}_{m(k,N)}^{(k)}(x) \times \chi_{E_{\varepsilon,\delta}}(x) \right)^* \right\|_{L^p(E_{\varepsilon,\delta})} + 2A. \end{aligned} \tag{19}$$

С другой стороны, из (16) и (17) вытекает, что

$$\left[\tilde{p}_k^{(n)}(x) \chi_{E_{\varepsilon,\delta}}(x) \right]^* \le \frac{1}{2^{n/2}\sqrt{x + x_n}}, \quad k = 1, 2, ..., 2^n,$$

где $x_n = \left(A^2 \cdot 2^n \cdot n^{1+2\delta} \right)^{-1}$. Следовательно, из (19) находим

$$\begin{aligned} \|S_N\|_{L^p(E_{\varepsilon,\delta})} &\le \left(\int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n/2}\sqrt{x + x_n}} \right)^p dx \right)^{1/p} + 2A \le \\ &\le \left(\int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{[\log \frac{1}{x}]} \frac{1}{2^{n/2}\sqrt{x_n}} \right)^p dx \right)^{1/p} + \\ &+ \left(\int_0^1 \left(\sum_{n=[\log \frac{1}{x}]+1}^{\infty} \frac{1}{2^{n/2}\sqrt{x_n}} \right)^p dx \right)^{1/p} + 2A \le \\ &\le \left\| \sum_{n=1}^{[\log \frac{1}{x}]} n^{\delta+1/2} \right\|_{L^p(0,1)} + 2A + 1 \le C \left\| \left(\log \frac{1}{x} \right)^{\delta+3/2} \right\|_{L^p(0,1)} + 2A + 1. \end{aligned} \tag{20}$$

Как легко проверить интегрированием по частям

$$\int_0^1 \left(\log \frac{1}{x} \right)^r dx \le C \cdot p^r,$$

где $C > 0$ – постоянная. А отсюда и из (20) вытекает, что

$$\|S_N\|_{L^p(E_{\varepsilon,\delta})} \le A_{\varepsilon,\delta} \cdot p^{\delta+3/2}, \quad p \ge 1,$$

и (7) следует в силу предположения $\|a\|_{l^2} = 1$. Лемма доказана.

Доказательства теорем. Неравенство (3) непосредственно следует из лемм 3 и 4. Воспользуемся леммой 4 с $\delta = \dfrac{9\sigma}{2(2-3\sigma)}$ (тогда $\dfrac{2}{3} - \sigma = \dfrac{1}{3/2+\sigma}$). Пусть $f(x) = \dfrac{S_N(x)}{A_{\varepsilon,\delta}||a||_{l^2}}$. Тогда из (7) следует, что $||f||_{L^p(E_{\varepsilon,\delta})} \le p^{3/2+\delta}$, и остается использовать лемму 3 с $C_{\varepsilon,\delta} = (A_{\varepsilon,\delta})^{-(2/3-\sigma)}$. Для доказательства теоремы 2 используем неравенство Гёльдера и лемму 4 ($p > 2$, $N > M$). Тогда

$$||S_N - S_M||^p_{L^p(E_{\varepsilon,\delta})} \le$$

$$\le \left(\int_{E_{\varepsilon,\delta}} |S_N(x) - S_M(x)|^{2(p-1)}\, dx\right)^{1/2} \times \left(\int_0^1 |S_N(x) - S_M(x)|^2\, dx\right)^{1/2} =$$

$$= \left(\sum_{n=M+1}^{N} a_n^2\right)^{1/2} \cdot ||S_N - S_M||^{p-1}_{L^{2(p-1)}(E_{\varepsilon,\delta})} \le$$

$$\le \left(\sum_{n=M+1}^{N} a_n^2\right)^{1/2} \cdot A_{\varepsilon,\delta}\,(2(p-1))^{(\delta+3/2)(p-1)}.$$

Так как $\lim\limits_{N,M\to\infty} \left(\sum_{n=M+1}^{N} a_n^2\right) = 0$, имеем

$$\lim_{N,M\to\infty} ||S_N - S_M||_{L^p(E_{\varepsilon,\delta})} = 0.$$

Теоремы доказаны.

ABSTRACT. The article considers general orthogonal series $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n(x)$, with $0 < \sum a_n^2 < \infty$, where $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ is an orthonormal system on $(0,1)$. Let $S_n(x)$ be the partial sums of the series and $S_n \xrightarrow{L_2} f(x)$. We prove that for any $0 < \varepsilon < 1$ and $0 < \alpha < 2/3$ there exists a set $E_\varepsilon \subset (0,1)$, with measure exceeding $1-\varepsilon$, such that

1) $\displaystyle\int_{E_\varepsilon} \exp|C_\varepsilon S_n(x)|^\alpha\, dx \le 2, \quad n = 1, 2, \ldots$ 2) $\lim\limits_{n\to\infty} ||S_n(x) - f(x)||_{L^p(E_\varepsilon)} = 0.$

ЛИТЕРАТУРА

1. D. E. Menshov, "Sur bes series de function orthogonales I," Fund. Math., vol. 4, pp. 82 – 105, 1923.
2. H. Rademacher, "Einige Sätze über Reihen von algemeinen Orthogonalfunktionen," Math. Annalen, vol. 87, pp. 111 – 138, 1922.
3. Б. С. Кашин, А. А. Саакян, Ортогональные ряды, Наука, Москва, 1984.
4. Н. К. Бари, Тригонометрические ряды, Физматгиз, Москва, 1961.

11 марта 1994

Институт математики
Национальной Академии Наук Армении