О ДВУХ КЛАССАХ ПРЕДЕЛЬНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ТЕОРИИ ОЧЕРЕДЕЙ

Э. А. Даниелян, Г. В. Микаелян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 29, №2, 1994

В статье рассмотрены двупараметрические семейства предельных распределений, возникающих в моделях очередей типов $M|G|1|\infty$ и $GI|M|1|\infty$ при условии единичной загрузки, заданных посредством своих преобразований Лапласа-Стильтьеса. Исследованы аналитические свойства этих семейств — интегральные представления по устойчивым законам, интегральные представления с ядрами типа Миттаг-Леффлера и представления рядами. Вычислены моменты распределений.

§1. ВВЕДЕНИЕ

1°. Пусть $\{G_\alpha : \ 1 < \alpha \le 2\}$ и $\{R_\alpha : \ 1 < \alpha \le 2\}$ – два семейства бесконечно дифференцируемых функций распределений (ФР) неотрицательных случайных величин (СВ) X_α и Y_α с преобразованиями Лапласа-Стильтьеса (ПЛС)

$$g_\alpha(s) = \int_0^\infty e^{-sx} d\,G_\alpha(x) = e^{s^\alpha} \left\{1 - \frac{s}{\Gamma(1/\alpha)} \int_0^1 e^{-s^\alpha x} x^{(1/\alpha)-1} dx \right\}, \qquad (1.1)$$

$$r_\alpha(s) = \int_0^\infty e^{-sx} d\,R_\alpha(x) = s^\alpha \int_0^\infty e^{-s^\alpha x} \{1 - (1+x)^{-1/\alpha}\}\, dx \qquad (1.2)$$

соответственно, где $s \ge 0$ и $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция Эйлера (см. [1]). В частности

$$G_2(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{x/\sqrt{2}} e^{-u^2/2} du = 2\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) - 1$$

при любом $x \ge 0$, где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} du$ и $R_2(x) = 1 - e^{-x^2/4}$ - ФР Релея.

Функции G_α и R_α возникают в различных моделях типов $M|G|1|\infty$ и $GI|M|1|\infty$ во множестве задач (см., напр., [1] - [6]), как предельные распределения виртуального времени ожидания при единичной загрузке. Например, рассмотрим модель $M|G|1|\infty$ с параметром $a > 0$ поступления времен обслуживаний

ФР $B(x)$ в предположении, что :

(А) загрузка модели равна $\rho = a\beta_1 = 1$, где β_1 – среднее время обслуживания;

(Б) при $s \downarrow 0$, $\beta(s) = \int_0^\infty e^{-sx} d\,B(x) = 1 - s\beta_1 + (cs)^\alpha(1 + o(1))$, где $1 < \alpha \leq 2$, а c - положительная постоянная.

Предположим, что с времени $t = 0$ система начинает обслуживание вызовов и нет очереди. Обозначим через π первый после $t = 0$ случайный момент времени, когда система становится незанятой, т. е. π есть период занятости, инициированный одним вызовом. Обозначим через w_n, $n \geq 1$ время ожидания n-го вызова при обслуживании в порядке поступления, через p – случайное число обслуживаний за π вызовов. При выполнении (А) и (Б) существуют пределы

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(\frac{w_n}{c \cdot n^{1/\alpha}} < x\right) = G_\alpha(x) \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(\frac{w_n}{c \cdot n^{1/\gamma}} < x \,/\, p \geq n\right) = R_\alpha(x),$$

при этом, соотношения равномерны по x (см. [7]). Здесь P – вероятность, $\mathrm{P}(A\,/\,B)$ – условная вероятность события A при условии осуществления события B.

В специальном случае, когда времена между соседними поступлениями вызовов и обслуживания имеют конечные первые два момента, существование первого предела для модели $GI|GI|1|\infty$ впервые было доказано Ердешем и Кацом [8], а затем, иным методом, Прабху [9]. Существование этого предела влечет к отмеченному выше предельному ФР $2\Phi(x) - 1$. Существование в специальном случае $\alpha = 2$ второго предела для модели $M|G|1|\infty$, для виртуального времени ожидания, было доказано Киприяновым [10]. Оно влечет к предельному ФР $R_2(x)$. Для других моделей второй предел с $\alpha = 2$ был исследован, например, в [11] – [12].

2°. Пусть X_n^+, $n \geq 1$ – время обслуживания n-го вызова, X_n^- интервал времени между n-ым и $(n+1)$-ым вызовами, и пусть $X = X_n^+ - X_n^-$.

Если F есть ФР X, то

$$\varphi(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-sx} d\,F(x) = \frac{a\,\beta(s)}{a-s}, \quad 0 \le s < a.$$

При выполнении условий (А) и (Б) будем иметь : $\mathrm{M}\,X_1 = 0$ и $\varphi(s) = 1+(cs)^\alpha(1+$ $+o(1))$, где М – математическое ожидание. Как показано в [13] (стр. 668)

$$x^\alpha(1-F(x)) \to \frac{c^\alpha}{\alpha}, \quad x^\alpha F(-x) \to 0, \quad x \to \infty. \tag{1.3}$$

Нам также понадобятся определенные ниже ФР для F_α.

Пусть $\{X_n\}_{n\ge 1}$ – некоторая последовательность независимых, одинаково распределенных (НОР) СВ с ФР F, обладающим свойством (1.3), где $0 < \alpha < 2$ и $\mathrm{M}\,X_1 = 0$ при $1 < \alpha < 2$. Тогда, за исключением значения $\alpha = 1$, ФР СВ

$$\frac{S_n}{c\cdot n^{1/\alpha}}, \quad n \to \infty, \tag{1.4}$$

где $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ сходится к F_α (см. [14], стр. 185 – 193). Семейство $\{F_\alpha : 0 < \alpha \le 2,\ \alpha \ne 1\}$ обладает ПЛС

$$\varphi_\alpha(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-sx} d\,F_\alpha(x) = \exp\{-\mathrm{sign}(1-\alpha)\cdot s^\alpha\}, \quad s \ge 0$$

и принадлежит классу устойчивых законов [15]. ФР F_α есть стандартный устойчивый закон с показателем α.

Функции G_α и R_α являются предельными законами в схемах суммирования для НОР СВ $\{X_n\}_{n\ge 1}$ с $X_n = X_n^+ - X_n^-$. Действительно, из основного уравнения теории очередей $w_{n+1} = \max\{0, w_n + X_n\}$ следует, что :

(А) СВ w_{n+1} и $\max_{0\le k\le n} S_k$ одинаково распределены ;

(Б) $w_{n+1} = S_n$ на множестве $\{p \ge n\} = \{\inf(k : S_k \le 0) > n\}$.

Следовательно, G_α, $1 < \alpha \le 2$ является предельным законом для

$$\frac{\max_{0\le k\le n} S_k}{c\cdot n^{1/\alpha}}, \quad n \to \infty,$$

а R_α, при $\{\inf(k : S_k \leq 0) > n\}$ - предельный закон для условных сумм (1.4).

3°. Целью настоящей статьи является исследование аналитических свойств функций G_α и R_α.

В §2 найдены интегральные представления функций G_α и R_α посредством стандартных устойчивых законов – интегральные представления с ядрами (функциями) типа Миттаг-Леффлера (см. [16], гл. 3)

$$E_\rho(z, \mu) = \sum_{k \geq 0} \frac{z^k}{\Gamma(\mu + \frac{k}{\rho})}, \quad \rho > 0, \tag{1.5}$$

а также представления посредством рядов. В §3 проведено вычисление моментов G_α и R_α. В §4 даны представления этих моментов, где используются моменты функции Куммера

$$K(a, b, z) = 1 + \frac{a}{b}z + \frac{a(a+1)}{b(b+1)} \cdot \frac{z^2}{2!} + \frac{a(a+1)(a+2)}{b(b+1)(b+2)} \cdot \frac{z^3}{3!} + \cdots \tag{1.6}$$

и функции типа Миттаг-Леффлера. В §5 исследуются аналитические продолжения рядов, представляющих F_α и G_α. Последний §6 содержит некоторые замечания. В частности, там получены моменты функций $E_{1/\alpha}(-x, \alpha)$ и $E_{1/\alpha}(-x, 1)$, $x > 0$, $1 < \alpha < 2$.

§2. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

1°. Связи семейств $\{G_\alpha\}$ и $\{R_\alpha\}$ со спецфункциями упрощают доказательства многих их свойств и интересны сами по себе. Связь R_α с $F_{\alpha/2}$ основана (см. [6]) на представлении

$$r_\alpha(s) = \frac{1}{\Gamma(1/\alpha)} \int_0^\infty \frac{x^{1/\alpha} \cdot e^{-x}}{x + s^\alpha} dx, \quad s \geq 0, \quad 1 < \alpha \leq 2, \tag{2.1}$$

которое мы уточняем. Именно, при $\alpha \neq 2$

$$R_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha} \int_0^\infty n_{1+(2/\alpha)}(t) \cdot F_{\alpha/2}(x \cdot t^{-2/\alpha}) dt, \tag{2.2}$$

где

$$n_\beta(t) = \frac{2}{\Gamma(\frac{\beta+1}{2})} \int_0^\infty x^\beta \cdot e^{-x^2} \cos tx \, dx, \quad t > 0, \quad \operatorname{Re}\beta > -1. \tag{2.3}$$

Аналог для G_α получаем с помощью представления [18] :

$$g_\alpha(s) = \frac{s}{\pi}\sin\frac{\pi}{\alpha}\int_0^\infty \frac{x^{-1/\alpha}\cdot e^{-x}}{x+s^\alpha}dx, \quad s\geq 0, \quad 1<\alpha<2. \tag{2.4}$$

Интегралы (2.3) и

$$m_\beta(t) = \frac{2}{\Gamma(\frac{\beta+1}{2})}\int_0^\infty x^{\beta-1}\cdot e^{-x^2}\sin tx\,dx, \quad t>0, \quad \mathrm{Re}\beta>-1 \tag{2.5}$$

сводятся к функции Куммера (см. [17], стр. 451)

$$m_\beta(t) = t\cdot K\left(\frac{\beta+1}{2},\frac{3}{2},-\frac{t^2}{4}\right), \quad n_\beta(t) = K\left(\frac{\beta+1}{2},\frac{1}{2},-\frac{t^2}{4}\right). \tag{2.6}$$

ФР $F_{\alpha/2}$ абсолютно непрерывна (более того, она бесконечно дифференцируема [15]). Ее плотность в дальнейшем будем обозначать через $f_{\alpha/2}$.

Теорема 1. *Для всех α, $1<\alpha<2$ и $x\geq 0$ имеет место равенство*

$$G_\alpha(x) = \frac{1}{\Gamma(1/\alpha)}\int_0^\infty t^{-2/\alpha}f_{\alpha/2}(x\cdot t^{-2/\alpha})m_{1-(2/\alpha)}(t)\,dt. \tag{2.7}$$

Теорема 2. *Для всех α, $1<\alpha\leq 2$ и $x\geq 0$ имеют место равенства*

$$G_\alpha(x) = \frac{1}{\pi}\sin\frac{\pi}{\alpha}\int_0^\infty e^{-tx^{-\alpha}}\cdot t^{-1/\alpha}\cdot E_{1/\alpha}(-t,\alpha)\,dt, \tag{2.8}$$

$$R_\alpha(x) = 1-\frac{1}{x\cdot\Gamma(1/\alpha)}\int_0^\infty e^{-tx^{-\alpha}}\cdot t^{(1/\alpha)-1}\cdot E_{1/\alpha}(-t,1)\,dt. \tag{2.9}$$

2°. Доказательство теоремы 1. Замена переменной $x=y^2$ в интеграле

$$I(\beta) = \int_0^\infty \frac{x^\beta\cdot e^{-x}}{x+s^2}dx, \quad s>0$$

дает

$$\begin{aligned} I(\beta) &= i\int_0^\infty y^{2\beta}\cdot e^{-y^2}\left(\frac{1}{s+iy}-\frac{1}{s-iy}\right)dy = \\ &= i\int_0^\infty y^{2\beta}\cdot e^{-y^2}\int_0^\infty\left(e^{-(s+iy)x}-e^{-(s-iy)x}\right)dx\,dy = \\ &= 2\int_0^\infty dy\int_0^\infty y^{2\beta}\cdot e^{-y^2-sx}\sin xy\,dx, \; i=\sqrt{-1}. \end{aligned}$$

В силу сходимости интеграла при $\beta > -1$ и (2.3) получаем

$$\frac{1}{\Gamma(1+\beta)} I(\beta) = \int_0^\infty e^{-st} \cdot m_{1+2\beta}(t)dt.$$

Пусть α, $0 < \alpha < 2$, любое число. Рассмотрим процесс $\{\xi(t) : t \geq 0\}$ с независимыми приращениями и с ПЛС $\mathrm{M}e^{-s\xi(t)} = \exp(-ts^{\alpha/2})$, $s \geq 0$, $t \geq 0$. Ясно, что $\mathrm{P}(\xi(t) < x) = \mathrm{P}(\xi(1) \cdot t^{2/\alpha} < x) = F_{\alpha/2}(x \cdot t^{-2/\alpha})$ при любых $x \geq 0$ и $t > 0$. Тем самым

$$\frac{1}{\Gamma(1+\beta)} \int_0^\infty \frac{x^\beta \cdot e^{-x}}{x+s^\alpha} dx = \int_0^\infty e^{-s^{\alpha/2}t} \cdot m_{1+2\beta}(t)dt =$$
$$= \int_0^\infty m_{1+2\beta}(t)dt \int_0^\infty e^{-sx} d_x \mathrm{P}(\xi(t) < x) =$$
$$= \int_0^\infty e^{-sx} d_x \left(\int_0^\infty F_{\alpha/2}(x \cdot t^{-2/\alpha}) m_{1+2\beta}(t)dt \right).$$

В силу (2.4), (2.1) и тождеств

$$\Gamma(z) \cdot \Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}, \quad z \cdot \Gamma(z) = \Gamma(z+1) \tag{2.10}$$

приходим к (2.7) и (2.2), беря соответственно $\beta = -1/\alpha$ и $\beta = 1/\alpha$.

3°. В [18] доказаны разложения

$$g_\alpha(s) = e^{s^\alpha} - \sum_{k \geq 0} \frac{s^{k\alpha+1}}{\Gamma(k+1+(1/\alpha))}, \quad s > 0, \tag{2.11}$$

$$G_\alpha(x) = \frac{1}{\pi} \sin \frac{\pi}{\alpha} \sum_{k \geq 1} (-1)^{k-1} \frac{\Gamma(k-(1/\alpha))}{\Gamma(k\alpha)} x^{k\alpha-1}, \quad x \geq 0. \tag{2.12}$$

Оказывается, что (2.11) непосредственно следует из

$$g_\alpha(s) = e^{s^\alpha} - \frac{1}{\Gamma(1/\alpha)} \sum_{k \geq 0} \frac{s^{k\alpha+1}}{k!} \int_0^1 x^{\frac{1}{\alpha}-1} \cdot (1-x)^k dx.$$

(ср. с более длинным доказательством в [18]). Аналоги (2.11) и (2.12) для $r_\alpha(s)$ и $R_\alpha(x)$ находим с помощью интегрального представления

$$r_\alpha(s) = 1 - se^{s^\alpha} \left(\Gamma(1-\frac{1}{\alpha}) - s^{\alpha-1} \int_0^1 e^{-s^\alpha x} x^{-1/\alpha} dx \right), \quad s \geq 0, \tag{2.13}$$

которое следует из (1.2). Виду (2.13)

$$r_\alpha(s) = 1 - \Gamma\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)\left(se^{s^\alpha} + \sum_{k\geq 1}\frac{s^{k\alpha}}{\Gamma(k+1-(1/\alpha))}\right), \quad s \geq 0. \tag{2.14}$$

Для доказательства того, что при любых α, $1 < \alpha \leq 2$, и $x \geq 0$

$$R_\alpha(x) = \frac{1}{\Gamma(1/\alpha)}\sum_{k\geq 1}(-1)^{k-1}\frac{\Gamma(k+(1/\alpha))}{\Gamma(k\alpha+1)}x^{k\alpha}, \tag{2.15}$$

подставим $y = s^\alpha(1+x)$ в (1.2). Тогда для $r_\alpha(s)$ получим

$$s^{-1}\{r_\alpha(s) - 1\} = -\int_{s^\alpha}^\infty e^{-x}\cdot x^{-1/\alpha}dx.$$

Дифференцирование последнего равенства по s законно, поскольку для $\tilde{r}_\alpha(s) = s^{-1}r_\alpha(s)$ имеем

$$\frac{d}{ds}\{s^{1-\alpha}\cdot\tilde{r}_\alpha(s)\} - (\alpha + (1-\alpha)s^{-\alpha})\tilde{r}_\alpha(s) = -s^{-1-\alpha}. \tag{2.16}$$

Этому уравнению соответствует уравнение Вольтерра

$$\Gamma(\alpha+1)\cdot R_\alpha(x) + \int_0^x \frac{(\alpha-1)u}{(x-u)^{2-\alpha}}R_\alpha(u)du = \frac{x^\alpha}{\alpha}. \tag{2.17}$$

Доказательство существования и единственности решения стандартно (см. [18]). Для решения (2.17) используем следующие рассуждения. Полагаем, что $\tilde{r}_\alpha(s) = \sum_{k\geq 1} a_k\cdot s^{-k\alpha+\alpha-1}$, где $a_1, a_2, \ldots$ – постоянные. Подстановка в (2.16) приводит к рекуррентным формулам $a_1 = 0$, $a_2 = \frac{1}{\alpha}$, ... $a_{k+1} = \{1-k-(1/\alpha)\}a_k$, $k \geq 2$, откуда следует, что $a_n = (-1)^n\frac{\Gamma(n-1+(1/\alpha))}{\Gamma(1/\alpha)}$, $n \geq 1$. Следовательно, $\tilde{r}_\alpha(s)$ соответствует расходящийся ряд

$$\frac{1}{\Gamma(1/\alpha)}\sum_{k\geq 1}(-1)^{k-1}\cdot\Gamma\left(k+\frac{1}{\alpha}\right)s^{-k\alpha-1}. \tag{2.18}$$

Формальным почленным обращением (2.18) переходит в ряд правой части (2.15), который при $\alpha > 1$ сходится для всех $x \geq 0$. Как легко проверить, сумма этого ряда удовлетворяет (2.16), тем самым, (2.15) доказано.

4°. Доказательство теоремы 2. Интегральная форма $\Gamma(k-(1/\alpha))$ преобразует (2.12) к виду

$$G_\alpha(x) = \frac{1}{\pi}\sin\frac{\pi}{\alpha}\int_0^\infty t^{-1-(1/\alpha)}e^{-t}\left\{\sum_{k\geq 1}(-1)^{k-1}\frac{(t\cdot x^\alpha)^k}{\Gamma(k\alpha)}\right\}dt.$$

Поскольку

$$t\,x^\alpha\cdot E_{1/\alpha}(-t\,x^\alpha,\alpha) = \sum_{k\geq 1}(-1)^{k-1}\frac{(t\cdot x^\alpha)^k}{\Gamma(k\alpha)},$$

получаем

$$G_\alpha(x) = \frac{1}{\pi}\sin\frac{\pi}{\alpha}x^{\alpha-1}\int_0^\infty t^{-1/\alpha}e^{-t}\cdot E_{1/\alpha}(-t\,x^\alpha,\alpha)dt.$$

Замена переменной $t\,x^\alpha = y$ сводит это равенство к (2.8), и из (2.15) получаем

$$\{1-R_\alpha(x)\}\cdot\Gamma(1/\alpha) = \sum_{k\geq 0}(-1)^k\frac{x^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)}\int_0^\infty t^{k-1+(1/\alpha)}e^{-t}dt =$$

$$= \int_0^\infty t^{(1/\alpha)-1}e^{-t}\left\{\sum_{k\geq 0}(-1)^k\frac{(t\cdot x^\alpha)^k}{\Gamma(k\alpha+1)}\right\}dt = \int_0^\infty t^{(1/\alpha)-1}e^{-t}\cdot E_{1/\alpha}(-t\,x^\alpha,1)dt.$$

§3. ВЫЧИСЛЕНИЕ МОМЕНТОВ

1°. ФР F_α, $0<\alpha<1$, стандартной устойчивой СВ S_α с показателем α сосредоточена на $[0,+\infty)$ и (см. [13], стр. 504 – 505)

$$x^\alpha\{1-F_\alpha(x)\}\to\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)},\quad x\to\infty\quad\text{и}\quad e^{x^\alpha}\cdot F_\alpha(x)\to 0,\quad x\to 0.$$

Поэтому для степенного момента $\varphi(\alpha,\varepsilon)$ порядка ε от F_α имеем

$$\varphi(\alpha,\varepsilon)\begin{cases} <\infty, & \text{при } -\infty<\varepsilon<\alpha\\ =\infty, & \text{при } \varepsilon\geq\alpha,\end{cases} \tag{3.1}$$

а функция $\varphi(\alpha,z) = \mathrm{M}\,S_\alpha^z$ комплексного переменного z аналитична в полуплоскости $-\infty<\mathrm{Re}z<\alpha$.

Задача 1. *При каких вещественных* ε

$$g(\alpha,\varepsilon) = \int_0^\infty x^\varepsilon dG_\alpha(x) < +\infty \quad\text{и}\quad r(\alpha,\varepsilon) = \int_0^\infty x^\varepsilon dR_\alpha(x) < +\infty \quad ?$$

2°. *Ответ для* G_α : функция $g(\alpha, z) = \mathbf{M}X_\alpha^z$ комплексного переменного z аналитична в области $1 - \alpha < \operatorname{Re} z < \alpha$ и

$$g(\alpha,\varepsilon)\begin{cases} < \infty, & \text{при } 1-\alpha < \varepsilon < \alpha \\ = \infty, & \text{при } |\varepsilon - \frac{1}{2}| \geq \alpha - \frac{1}{2}. \end{cases} \tag{3.2}$$

Ответ следует из формул

$$x^\alpha\{1 - G_\alpha(x)\} \to \frac{\alpha - 1}{\Gamma(2-\alpha)}, \quad x \to \infty, \tag{3.3}$$

$$x^{1-\alpha} \cdot G_\alpha(x) \to \frac{1}{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(1/\alpha)}, \quad x \to 0. \tag{3.4}$$

Формулу (3.3) получаем как следствие асимптотической формулы

$$G_\alpha(x) \approx 1 + \frac{1}{\pi}\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k!}\sin(k\alpha\pi)\cdot\Gamma(k\alpha)x^{-k\alpha} + \frac{1}{\pi}\sum_{k\geq 1}\frac{\sin(k\alpha\pi)\Gamma(k\alpha+1)}{\Gamma(k+1+(1/\alpha))}x^{-k\alpha-1}$$

при $x \to \infty$ (см. [18]), преобразуя первый член с помощью (2.10). Согласно (2.4) и (2.10)

$$\lim_{s\to\infty} s^{\alpha-1}g_\alpha(s) = \frac{1}{\pi}\sin\frac{\pi}{\alpha}\lim_{s\to\infty}\int_0^\infty \frac{x^{-1/\alpha}\cdot e^{-x}}{(x/s)^\alpha + 1}dx = \frac{1}{\Gamma(1/\alpha)}.$$

Воспользовавшись теоремами 2 и 3, §5, гл. 8, [13], приходим к (3.4).

Решение для R_α : функция $r(\alpha, z) = \mathbf{M}Y_\alpha^z$ комплексного переменного z аналитична в области $-\alpha < \operatorname{Re} z < \alpha$ и

$$r(\alpha,\varepsilon)\begin{cases} < \infty, & \text{при } -\alpha < \varepsilon < \alpha \\ = \infty, & \text{при } |\varepsilon| \geq \alpha. \end{cases} \tag{3.5}$$

Ответ следует из формул

$$x^\alpha\{1 - R_\alpha(x)\} \to \frac{\alpha}{\Gamma(2-\alpha)}, \quad x \to \infty, \tag{3.6}$$

$$x^{-\alpha} \cdot R_\alpha(x) \to \frac{1}{\alpha\cdot\Gamma(1+\alpha)}, \quad x \to 0. \tag{3.7}$$

Формулу (3.6) получаем как следствие асимптотической формулы

$$\begin{aligned} R_\alpha(x) \approx{}& 1 + \frac{1}{\pi}\Gamma\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\sum_{k\geq 1}\sin(k\alpha\pi)\cdot\Gamma(k\alpha+1)x^{-k\alpha-1} + \\ &+ \frac{1}{\pi}\Gamma\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\sum_{k\geq 1}\frac{\sin(k\alpha\pi)\Gamma(k\alpha)}{\Gamma(k+1+(1/\alpha))}x^{-k\alpha}, \quad x\to\infty. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Докажем (3.8). Поскольку при любых $x \geq 0$, $s \geq 0$ и $n \geq 1$

$$\frac{1}{x+s^{\alpha}} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}x^{k-1}s^{-k\alpha} + \frac{1}{x+s^{\alpha}}(-1)^{n}x^{n}s^{-n\alpha},$$

то из (2.1) следует, что

$$r_{\alpha}(s) = \frac{1}{\Gamma(1/\alpha)}\sum_{k\geq 1}(-1)^{k-1}\Gamma\left(k+\frac{1}{\alpha}\right)s^{-k\alpha-1}, \quad s\to\infty.$$

Обозначим через $r_{\alpha}^{(m)}(s)$ m-ую производное $r_{\alpha}(s)$. При $\mathrm{Im}s\to\infty$ в полосе $0 \leq \leq \mathrm{Re}s \leq a$, $a > 0$ равномерно выполнено соотношение $r_{\alpha}^{(m)}(s) = O(s^{-\alpha-m-1})$. Теперь, повторяя рассуждения Л. Берга [18] легко прийти к необходимому утверждению. Согласно (2.1), $s^{\alpha}\cdot r_{\alpha}(s)\to\alpha^{-1}$ при $s\to\infty$. Поэтому из теорем 2 и 3 из §5, гл. 8, [13] следует (3.7).

3°. Функция $\Gamma(1-(z/\alpha))/\Gamma(1-z)$, $0<\alpha<2$, аналитична в полуплоскости $-\infty < \mathrm{Re}z < \alpha$ и, по теореме 2.6.3 из [15], она совпадает с $\varphi(\alpha,z)$ в полосе $-1 < \mathrm{Re}z < \alpha$. Тем самым, по теореме единственности

$$\varphi(\alpha,z) = \frac{\Gamma(1-(z/\alpha))}{\Gamma(1-z)}, \quad 0<\alpha<2, \quad -\infty<\mathrm{Re}z<\alpha. \tag{3.9}$$

Отметим, что $\varphi(\alpha,1)=1$.

Задача 2. *Вычислить $g(\alpha,\varepsilon)$ при $1-\alpha<\varepsilon<\alpha$ и $r(\alpha,\varepsilon)$ при $-\alpha<\varepsilon<\alpha$, где* $1<\alpha<2$.

В нижеприведенных примерах раздельно рассмотрены случаи $\varepsilon=0$ и $\varepsilon=1$.

Пример 1. G_{α} и R_{α} являются ФР, тем самым, $g(\alpha,0)=r(\alpha,0)=1$. Для проверки этого факта подставим в (2.4)

$$\Delta \equiv \int_0^{\infty}\frac{y^{\beta}dy}{y+1} = \begin{cases} -\frac{\pi}{\sin\pi\beta}, & \text{при } -1<\beta<0 \\ \infty, & \text{при } |\beta+\frac{1}{2}|\geq\frac{1}{2}. \end{cases} \tag{3.10}$$

Тогда получим

$$g_{\alpha}(s) = \frac{1}{\pi}\sin\frac{\pi}{\alpha}\lim_{s\to\infty}\int_0^{\infty}\frac{y^{-1/\alpha}}{y+1}e^{-s^{\alpha}y}dy, \quad g_{\alpha}(0) = \frac{1}{\pi}\sin\frac{\pi}{\alpha}\Delta_{-1/\alpha} = 1. \tag{3.11}$$

Интегрированием по частям в (1.2) получаем

$$r_\alpha(s) = \int_0^\infty e^{-s^\alpha x} d_x\{1 - (1+x)^{-1/\alpha}\}. \tag{3.12}$$

Пример 2.

$$g(\alpha, 1) = \frac{1}{\Gamma(1 + (1/\alpha))}, \quad r(\alpha, 1) = \Gamma(1 - (1/\alpha)). \tag{3.13}$$

Из формулы (1.1) следует, что

$$g(\alpha, 1) = -g'_\alpha(0) = \lim_{s\to 0} \frac{1 - g_\alpha(s)}{s} =$$
$$= \lim_{s\to 0} \left\{ s^{-1}(1 - \exp s^\alpha) + \frac{1}{\Gamma(1/\alpha)} \int_0^1 e^{-s^\alpha(1-x)} x^{(1/\alpha)-1} dx \right\} = \frac{1}{\Gamma(1 + (1/\alpha))}.$$

Второе равенство следует из (2.13).

4°. *Решение для* G_α содержится в следующей теореме.

Теорема 3. *Если* $1 < \alpha < 2$ *и* $1 - \alpha < Re z < \alpha$, то

$$g(\alpha, z) = \frac{(1 - z)\sin(\pi/\alpha)}{\sin \frac{(1-z)\pi}{\alpha}} \cdot \frac{\Gamma(1 - (z/\alpha))}{\Gamma(2 - z)}.$$

Доказательство. Пусть $\{\xi(t) : t \geq 0\}$ – процесс с независимыми приращениями и ПЛС

$$Me^{-s\xi(t)} = \exp(-t s^{1/\alpha}), \quad s \geq 0, \quad t \geq 0. \tag{3.14}$$

Тогда пары $\xi(1)$, $S_{1/\alpha}$ и $\xi(t)$, $\xi(1) \cdot t^\alpha$ одинаково распределены. Согласно (3.14)

$$Me^{-s\xi(X_\alpha)} = \int_0^\infty e^{-s^{1/\alpha} t} dP(X_\alpha < t) = g_\alpha(s^{1/\alpha}), \quad s \geq 0. \tag{3.15}$$

Из (3.11), воспользовавшись (3.10), находим

$$P[\xi(X_\alpha) < x] = \frac{1}{\pi} \sin\frac{\pi}{\alpha} \int_0^\infty \frac{y^{-1/\alpha}}{y+1} dy, \quad x > 0,$$

$$M[\xi(X_\alpha)]^{\varepsilon/\alpha} = \frac{1}{\pi} \sin\frac{\pi}{\alpha} \Delta_{(\varepsilon-1)/\alpha} = \frac{\sin(\pi/\alpha)}{\sin\frac{(1-\varepsilon)\pi}{\alpha}}, \quad 1 - \alpha < \varepsilon < 1. \tag{3.16}$$

По формуле условного математического ожидания

$$M[\xi(X_\alpha)]^{\varepsilon/\alpha} = \varphi\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{\varepsilon}{\alpha}\right) \cdot g(\alpha, \varepsilon), \quad 1 - \alpha < \varepsilon < 1.$$

При $1-\alpha<\varepsilon<1$ с помощью (3.9) и (3.16) вычисляем $g(\alpha,\varepsilon)$. Функция в правой части равенства теоремы 3 аналитична в полосе $1-\alpha<\mathrm{Re}z<\alpha$ и совпадает с аналитической в той же полосе функцией $g(\alpha,z)$ при действительных ε, $1-\alpha<\varepsilon<1$. Тем самым, ввиду теоремы единственности аналитических функций, теорема 3 доказана.

Ответ для R_α содержится в следующей теореме.

Теорема 4. *Если* $1<\alpha<2$ *и* $-\alpha<Rez<\alpha$, *то*

$$r(\alpha,z)=\frac{\pi z}{\sin(\pi z/\alpha)}\cdot\frac{\Gamma(1+\frac{1-z}{\alpha})}{\Gamma(1/\alpha)\Gamma(2-z)}.$$

Доказательство. Как и в (3.15), имеем

$$\mathrm{M}e^{-s\xi(Y_\alpha)}=r_\alpha(s^{1/\alpha}),\quad s\geq 0.$$

В силу (3.12)

$$\mathrm{P}\left[\xi(Y_\alpha)<x\right]=1-(1+x)^{-1/\alpha},\quad x\geq 0,\quad \mathrm{M}\left[\xi(Y_\alpha)\right]^{\varepsilon/\alpha}=\frac{1}{\alpha}\int_0^\infty\frac{x^{\varepsilon/\alpha}dx}{(x+1)^{(1/\alpha)+1}}.$$

Заменой переменной $1+x=y^{-1}$ интеграл сводится к бета-функции, тем самым

$$\mathrm{M}\left[\xi(Y_\alpha)\right]^{\varepsilon/\alpha}=\frac{\Gamma(\frac{1-\varepsilon}{\alpha})\Gamma(1+\frac{\varepsilon}{\alpha})}{\Gamma(1/\alpha)},\quad -\alpha<\varepsilon<1. \tag{3.17}$$

При этом, если $-\alpha<\varepsilon<1$, то как и выше

$$\mathrm{M}\left[\xi(Y_\alpha)\right]^{\varepsilon/\alpha}=\varphi\left(\frac{1}{\alpha},\frac{\varepsilon}{\alpha}\right)\cdot r(\alpha,\varepsilon).$$

Подставив сюда (3.9) и (3.17), после преобразований с помощью (2.10) получаем

$$r(\alpha,\varepsilon)=\frac{\pi\varepsilon}{\sin(\pi\varepsilon/\alpha)}\cdot\frac{\Gamma(1+\frac{1-\varepsilon}{\alpha})}{\Gamma(1/\alpha)\Gamma(2-\varepsilon)},\quad -\alpha<\varepsilon<1.$$

Функция в правой части этого равенства при $\varepsilon=z$ аналитична в полосе $-\alpha<\mathrm{Re}z<1$ и совпадает с аналитической там же функцией $r(\alpha,z)$.

§4. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ МОМЕНТОВ

1°. Теоремы 3 и 4 связывают моменты G_α, R_α и F_α, $1 < \alpha < 2$. Действительно, по (3.9) имеем :

(А) при $1 < \alpha < 2$

$$g(\alpha, z) = \frac{\sin(\pi/\alpha)}{\sin\frac{(1-z)\pi}{\alpha}} \cdot \varphi(\alpha, z), \quad 1 - \alpha < \operatorname{Re} z < \alpha;$$

(Б) при $1 < \alpha < 2$

$$r(\alpha, z) = \frac{\Gamma(\frac{1-z}{\alpha})\Gamma(1 + \frac{z}{\alpha})}{\Gamma(1/\alpha)} \cdot \varphi(\alpha, z), \quad -\alpha < \operatorname{Re} z < \alpha.$$

Ввиду теорем 1 и 2 должны иметь место соотношения, связывающие моменты R_α и G_α с моментами функций Куммера и функций типа Миттаг-Леффлера. А именно, справедлива

Теорема 5. *При* $1 < \alpha < 2$

$$(A) \qquad g(\alpha, z) = -\frac{z}{\Gamma(1/\alpha)}\varphi\left(\frac{\alpha}{2}, z - 1\right) \int_0^\infty t^{(2z-2)/\alpha} m_{1-(2/\alpha)}(t)\, dt, \quad 1 - \alpha < Re z < \alpha$$

$$(Б) \qquad r(\alpha, z) = \frac{1}{\alpha}\varphi\left(\frac{\alpha}{2}, z\right) \int_0^\infty t^{2z/\alpha} m_{1+(2/\alpha)}(t)\, dt, \quad -\alpha/2 < Re z < \alpha/2.$$

Из (3.9) и (2.10) следует, что :

(А) в полосе $1 - \alpha < \operatorname{Re} z < 0$

$$g(\alpha, z) = \frac{z(z-1)}{\Gamma(1 + (1/\alpha))} \frac{\Gamma(2\frac{z-1}{\alpha})}{\Gamma(2 - z)} \int_0^\infty t^{(2z-2)/\alpha} m_{1-(2/\alpha)}(t)\, dt; \tag{4.1}$$

(Б) в полосе $-\alpha/2 < \operatorname{Re} z < \alpha/2$

$$r(\alpha, z) = \frac{\Gamma(1 - (2z/\alpha))}{\alpha \cdot \Gamma(1 - z)} \int_0^\infty t^{2z/\alpha} m_{1+(2/\alpha)}(t)\, dt.$$

Теорема 6. *При* $1 < \alpha < 2$

$$(A) \qquad g(\alpha, z) = \frac{1}{\pi} \sin\frac{\pi}{\alpha} \Gamma\left(1 - \frac{z}{\alpha}\right) \int_0^\infty x^{(z-1)/\alpha} \cdot E_{1/\alpha}(-x, \alpha) dx, \quad 0 < Re z < \alpha;$$

$$(Б) \qquad r(\alpha, z) = \frac{z\Gamma(\frac{1-z}{\alpha})}{\Gamma(1 + (1/\alpha))} \int_0^\infty x^{(z/\alpha)-1} \cdot E_{1/\alpha}(-x, 1) dx, \quad 0 < Re z < \alpha,$$

за исключением точки $z = 1$. При $z = 1$ имеем

$$r(\alpha, 1) = -\frac{1}{\Gamma(1/\alpha)} \int_0^\infty x^{(1/\alpha)-1} \ln x \cdot E_{1/\alpha}(-x, 1) dx.$$

Отметим, что из (3.13) и (3.10) вытекает формула

$$\int_0^\infty x^{(1/\alpha)-1} \ln x \cdot E_{1/\alpha}(-x, 1) dx = -\frac{\pi}{\sin(\pi/\alpha)}.$$

Доказательство теоремы 5. Из (2.6) и (1.6) следует асимптотическая формула $m_\beta(t) \sim t$, $t \to 0$, а после подстановки в (2.5) $xt = y$ получаем $m_\beta(t) \sim$ $\sim t^{-\beta} e_\beta$, $t \to \infty$, где

$$e_\beta = \frac{2}{\Gamma(\frac{\beta+1}{2})} \int_0^\infty \frac{\sin x \, dx}{x^{1-\beta}} = \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{1-\beta}} \cdot \frac{1}{\Gamma(\frac{\beta+1}{2})\Gamma(\frac{2}{1-\beta})}, \quad -1 < \beta < 0.$$

Из асимптотических формул для $m_\beta(t)$ заключаем, что интеграл $\int_0^\infty t^{\delta-1} m_\beta(t) dt$ сходится при $-1 < \delta < \beta$. Исходя из вышеизложенного, из (3.1) заключаем, что интеграл

$$\frac{1}{\Gamma(1/\alpha)} \int_0^\infty t^{-2/\alpha} \cdot c_\varepsilon(t) m_{1-(2/\alpha)}(t) \, dt, \tag{4.2}$$

где

$$c_\varepsilon(t) = \int_0^\infty x^\varepsilon \frac{d}{dx} f_{\alpha/2}(x \cdot t^{-2/\alpha}) dx = -\varepsilon \cdot t^{2\varepsilon/\alpha} \cdot \varphi\left(\frac{\alpha}{2}, \varepsilon - 1\right),$$

сходится при $1 - \alpha < \varepsilon < 0$. Умножив обе части (2.7) на x^ε и проинтегрировав от 0 до $+\infty$, получаем

$$g(\alpha, \varepsilon) = \frac{1}{\Gamma(1/\alpha)} \int_0^\infty x^\varepsilon dx \int_0^\infty t^{-2/\alpha} \frac{d}{dx} f_{\alpha/2}(x \cdot t^{-2/\alpha}) m_{1-(2/\alpha)}(t) \, dt.$$

При $1 - \alpha < \varepsilon < 0$ изменение порядка интегрирования в последнем интеграле законно, так как полученный после этого интеграл (4.2) сходится. Утверждение (A) доказано при $1 - \alpha < \varepsilon < 0$. Функции

$$\frac{-z}{\Gamma(1/\alpha)}, \quad \varphi\left(\frac{\alpha}{2}, z - 1\right), \quad \int_0^\infty t^{(2z-2)/\alpha} m_{1-(2/\alpha)}(t) \, dt$$

аналитичны в полосе $1-\alpha < \operatorname{Re} z < 0$ и их произведение совпадает при вещественных ε, $1-\alpha<\varepsilon<0$, с аналитической в той же полосе функцией $g(\alpha, z)$. В силу единственности аналитической функции приходим к утверждению (А).

Имеют место формулы

$$n_\beta(t) \sim 1, \quad t \to 0, \quad \text{и} \quad n_\beta(t) \sim \frac{2}{\Gamma(\frac{\beta+1}{2})} t^{-\beta-1} \cdot e_\beta \int_0^\infty x^\beta \cos x \, dx, \quad t \to \infty.$$

Тем самым, интеграл $\int_0^\infty t^\delta n_\beta(t) dt$ сходится при $-1<\delta<\beta$.

Рассмотрим теперь интеграл

$$\frac{1}{\alpha} \int_0^\infty t^{-2/\alpha} \cdot s_\varepsilon(t) n_{1+(2/\alpha)} dt, \tag{4.3}$$

где

$$s_\varepsilon(t) = \int_0^\infty x^\varepsilon f_{\alpha/2}(x \cdot t^{-2/\alpha}) dx = t^{(2\varepsilon+2)/\alpha} \cdot \varphi\left(\frac{\alpha}{2}, \varepsilon\right).$$

Ввиду вышеизложенного, из (3.1) приходим к заключению, что интеграл (4.3) сходится при $-\alpha/2 < \varepsilon < \alpha/2$. Умножив обе части (2.2) на x^ε и проинтегрировав от 0 до $+\infty$, получаем

$$r(\alpha, \varepsilon) = \frac{1}{\alpha} \int_0^\infty x^\varepsilon dx \int_0^\infty t^{-2/\alpha} f_{\alpha/2}(x \cdot t^{-2/\alpha}) n_{1+(2/\alpha)}(t) \, dt.$$

Изменение порядка интегрирования в последнем интеграле при $-\alpha/2 < \varepsilon < \alpha/2$ законно. Тем самым, мы приходим к утверждению (Б) для $-\alpha/2 < \varepsilon < \alpha/2$.

Функции

$$\frac{1}{\alpha} \varphi\left(\frac{\alpha}{2}, z\right), \quad \int_0^\infty t^{2z/\alpha} n_{1+(2/\alpha)}(t) \, dt$$

аналитичны в полосе $-\alpha/2 < \operatorname{Re} z < \alpha/2$ и их произведение при вещественных ε, $-\alpha/2 < \varepsilon < \alpha/2$, совпадает с функцией $r(\alpha, z)$, аналитической там же.

3°. Доказательство теоремы 6. Поскольку

$$1 - G_\alpha(x) = \frac{1}{\pi} \sin \frac{\pi}{\alpha} \int_0^\infty \left(1 - e^{-y/x^\alpha}\right) \cdot y^{-1/\alpha} E_{1/\alpha}(-y, \alpha) dy,$$

то

$$g(\alpha,\varepsilon)=\varepsilon\int_0^\infty x^{\varepsilon-1}(1-G_\alpha(x))dx=$$
$$=\frac{\varepsilon}{\pi}\sin\frac{\pi}{\alpha}\int_0^\infty y^{-1/\alpha}E_{1/\alpha}(-y,\alpha)dy\int_0^\infty x^{\varepsilon-1}\left(1-e^{-y/x^\alpha}\right)dx.$$

Внутренний интеграл равен $\alpha^{-1}\cdot y^{\varepsilon/\alpha}\Gamma(-\varepsilon/\alpha)$ (см. [17], стр. 347). В силу единственности аналитической функции приходим к утверждению (А) для $0<\varepsilon<\alpha$.

Если $0<\varepsilon<1$, то

$$r(\alpha,\varepsilon)=\varepsilon\int_0^\infty x^{\varepsilon-1}(1-R_\alpha(x))dx=$$
$$=\frac{\varepsilon}{\Gamma(1/\alpha)}\int_0^\infty y^{(1/\alpha)-1}E_{1/\alpha}(-y,1)dy\int_0^\infty x^{\varepsilon-2}\cdot e^{-y/x^\alpha}dx.$$

Заменой переменной $u=y/x^\alpha$ во внутреннем интеграле приходим к утверждению (Б) для $0<\varepsilon<1$.

Пусть $1<\varepsilon<\alpha$. Запишем равенство утверждения (Б) в виде

$$(1-z)r(\alpha,z)=\frac{z}{\Gamma(1/\alpha)}\Gamma(1+\frac{1-z}{\alpha})\int_0^\infty x^{(z/\alpha)-1}E_{1/\alpha}(-x,1)dx. \qquad (4.4)$$

В силу результатов [16] (§3, гл. 3), $\lim_{x\to\infty}x\cdot E_{1/\alpha}(-x,1)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}$. Отсюда следует, что интеграл

$$\int_0^\infty x^{(z/\alpha)-1}E_{1/\alpha}(-x,1)dx$$

абсолютно и равномерно сходится внутри полосы $0<\mathrm{Re}z<\alpha$. Так как при любом $x>0$ функция $x^{\frac{z}{\alpha}-1}E_{1/\alpha}(-x,1)$ – целая, то функция

$$\int_0^\infty x^{(z/\alpha)-1}E_{1/\alpha}(-x,1)dx$$

аналитична в полосе $0<\mathrm{Re}z<\alpha$. В той же области аналитичны и функции $r(\alpha,z)$ и $\Gamma(1+\frac{1-z}{\alpha})$. Следовательно, (4.4) справедливо при $0<\mathrm{Re}z<\alpha$, и утверждение (Б) доказано для $1<\varepsilon<\alpha$. Ввиду (4.5) интеграл

$$\int_0^\infty x^{(\varepsilon/\alpha)-1}\ln x\cdot E_{1/\alpha}(-x,1)dx$$

равномерно сходится при $\varepsilon \in (0, \alpha)$. Согласно (4.4) имеем

$$r(\alpha, 1) \cdot \Gamma(1/\alpha) = \lim_{\varepsilon \to 1} \frac{1}{1-\varepsilon} \int_0^\infty x^{(\varepsilon/\alpha)-1} \cdot E_{1/\alpha}(-x, 1)dx =$$

$$= -\int_0^\infty x^{(1/\alpha)-1} \ln x \cdot E_{1/\alpha}(-x, 1)dx.$$

§5. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Замена x^α на $z \in C$ в формулах (2.12) и (2.15) приводит к целым функциям

$$z^{1/\alpha} G_\alpha(z^{1/\alpha}) = \frac{1}{\pi} \sin \frac{\pi}{\alpha} z \sum_{k \geq 0} (-1)^k \frac{\Gamma(k+1-(1/\alpha))}{\Gamma(k\alpha + \alpha)} z^k,$$

$$R_\alpha(z^{1/\alpha}) = \frac{1}{\Gamma(1/\alpha)} \sum_{k \geq 1} (-1)^{k-1} \frac{\Gamma(k+(1/\alpha))}{\Gamma(k\alpha+1)} z^k$$

(в силу формулы Стирлинга $\Gamma(x) \sim \sqrt{2\pi} \cdot x^{x-(1/2)} \cdot e^{-x}$, $x \to \infty$, радиус сходимости рядов бесконечен). Для заданной целой функции $\sum_{k \geq 0} c_k \cdot z^k$, $z \in C$ будем рассматривать ее *порядок* ρ и *тип* σ (см., напр., [19], гл. 7) :

$$\rho = \overline{\lim_{k \to \infty}} \frac{k \cdot \log k}{\log |c_k|^{-1}}, \quad \sigma = e^{-\rho} \overline{\lim_{k \to \infty}} k \cdot |c_k|^{\rho/k}. \tag{5.1}$$

Теорема 7. *Целые функции* $z^{1/\alpha} G_\alpha(z^{1/\alpha})$ *и* $R_\alpha(z^{1/\alpha})$ *имеют порядок* $\rho = 1/(\alpha - 1)$ *и тип* $\sigma = (\alpha - 1) \cdot \alpha^{\alpha/(1-\alpha)}$.

Доказательство. Пусть ρ и σ – порядок и тип функции $z^{1/\alpha} G(z^{1/\alpha})$. По формуле Стирлинга, при $k \to \infty$

$$\log \frac{\Gamma(k\alpha + \alpha)}{\Gamma(k+1-(1/\alpha))} \sim \left(\alpha k + \alpha - \frac{1}{2}\right) \log \alpha + \left(\alpha k + \alpha - \frac{1}{2}\right) \log(k+1) -$$

$$-k\alpha + k + 1 - 2\alpha - \left(k - \alpha + \frac{1}{2}\right) \log(k + 1 - \alpha).$$

Тем самым, учитывая (5.1), приходим к утверждению теоремы для $z^{1/\alpha} G_\alpha(z^{1/\alpha})$. Доказательство для $R_\alpha(z^{1/\alpha})$ вполне аналогично.

§6. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

1°. Применение формулы

$$\int_0^\infty t^{s-1} K(a, b, -t)dt = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} \cdot \frac{\Gamma(s)\Gamma(a-s)}{\Gamma(b-s)}, \tag{6.1}$$

справедливой для всех $\mathrm{Re}a > \mathrm{Re}s > 0$ и $b \neq 0, -1, -2, \ldots$ (см. [17], стр. 715), позволяет дать другое доказательство теоремам 3 и 4. Покажем это для теоремы 3. Из (6.1), заменой переменной $t = x^2/4$, и из (2.6) для $1 - \alpha < \varepsilon < 0$, учитывая равенство $\Gamma(3/2) = \sqrt{\pi}/2$ выводим

$$\int_0^\infty t^{(2\varepsilon-2)/\alpha} m_{1-(2/\alpha)}(t)\,dt = \int_0^\infty t^{\frac{2\varepsilon-2}{\alpha}+1} \cdot K\left(1-\frac{1}{\alpha}, \frac{3}{2}, -\frac{t^2}{4}\right) dt =$$

$$= 2^{\frac{2\varepsilon-2}{\alpha}} \cdot \sqrt{\pi} \cdot \frac{\Gamma(-\frac{\varepsilon}{\alpha})\Gamma(1+\frac{\varepsilon-1}{\alpha})}{\Gamma(1-\frac{1}{\alpha})\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon-1}{\alpha})}. \tag{6.2}$$

Ввиду теоремы 5, (6.2) и (3.9)

$$g(\alpha,\varepsilon) = 2^{\frac{2\varepsilon-2}{\alpha}} \cdot \sqrt{\pi} \cdot \frac{\Gamma(1-\frac{2\varepsilon-2}{\alpha})}{\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon-1}{\alpha})} \cdot \frac{1}{\Gamma(1/\alpha)\Gamma(1-\frac{1}{\alpha})} \cdot \frac{-\varepsilon\Gamma(-\frac{\varepsilon}{\alpha})\Gamma(1+\frac{\varepsilon-1}{\alpha})}{\Gamma(2-\varepsilon)}.$$

В силу формулы Лагранжа

$$\Gamma\left(1+\frac{\varepsilon-1}{\alpha}\right) = 2^{\frac{2\varepsilon-2}{\alpha}} \cdot \sqrt{\pi} \cdot \frac{\Gamma(1-\frac{2\varepsilon-2}{\alpha})}{\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon-1}{\alpha})},$$

а по второй формуле (2.10)

$$-\varepsilon\Gamma\left(-\frac{\varepsilon}{\alpha}\right)\Gamma\left(1+\frac{\varepsilon-1}{\alpha}\right) = (\varepsilon-1)\cdot\Gamma\left(1-\frac{\varepsilon}{\alpha}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{\varepsilon-1}{\alpha}\right).$$

Следовательно, при $1-\alpha < \varepsilon < 0$

$$g(\alpha,\varepsilon) = \frac{\Gamma(1-\frac{\varepsilon-1}{\alpha})\Gamma(\frac{\varepsilon-1}{\alpha})}{\Gamma(1/\alpha)\Gamma(1-\frac{1}{\alpha})} \cdot \frac{(\varepsilon-1)\Gamma(1-\frac{\varepsilon}{\alpha})}{\Gamma(2-\varepsilon)},$$

и обращаясь к первой формуле (2.10) завершаем доказательство теоремы 3.

2°. Сравнение теорем 3 и 6 позволяет заключить, что *функция комплексной переменной z*

$$e_{1/\alpha}(\alpha,z) = \int_0^\infty x^z \cdot E_{1/\alpha}(-x,\alpha)\,dx$$

аналитична в полуплоскости $-1 < \mathrm{Re}z < 1$ и

$$e_{1/\alpha}(\alpha,z) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha z)}\frac{\pi z}{\sin\pi z}, \quad 1 < \alpha < 2. \tag{6.3}$$

К этому заключению приходим, приравнивая выражения для $g(\alpha, 1+\alpha z)$ из теорем 3 и 6. При $1 < \alpha < 2$ имеют место асимптотические формулы

$$x^2 \cdot E_{1/\alpha}(-x,\alpha) \to \frac{\alpha(\alpha-1)}{\Gamma(2-\alpha)}, \quad x \to +\infty, \quad \text{и} \quad E_{1/\alpha}(-x,\alpha) \to \frac{1}{\Gamma(\alpha)}, \quad x \to 0$$

(см. [16], гл. 3, §2 и (1.5)). Тем самым, интеграл $e_{1/\alpha}(\alpha,\delta)$ абсолютно сходится при $-1 < \delta < 1$. Следовательно, $e_{1/\alpha}(\alpha,z)$ функция, аналитическая в полосе $-1 < \mathrm{Re} z < 1$. Функция

$$\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha z)} \frac{\pi z}{\sin \pi z}$$

тоже аналитична в полосе $-1 < \mathrm{Re} z < 1$ и совпадает с $e_{1/\alpha}(\alpha,z)$ в $-1/\alpha < \mathrm{Re} z < 1 - (1/\alpha)$. Ввиду единственности аналитической функции, формула (6.3) доказана. Аналогично, приравнивая выражения для $r(\alpha, \alpha z+\alpha)$ из теорем 4 и 6, приходим к заключению, что *функция комплексного переменного z*

$$e_{1/\alpha}(1,z) = \int_0^\infty x^z \cdot E_{1/\alpha}(-x,1)\, dx$$

аналитична в полосе $-1 < \mathrm{Re} z < 1$ *и*

$$e_{1/\alpha}(1,z) = \frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha(1+z))} \frac{\pi(z+1)}{\sin \pi(z+1)}, \quad 1 < \alpha < 2. \tag{6.4}$$

Действительно, (6.4) имеет место при $-1 < \mathrm{Re} z < 0$, $z \neq (1/\alpha) - 1$. Из асимптотических формул

$$x \cdot E_{1/\alpha}(-x,1) \to \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}, \quad x \to +\infty, \quad \text{и} \quad E_{1/\alpha}(-x,1) \to 1, \quad x \to 0$$

(см. [16], гл. 3, §2 и (1.5)) следует, что интеграл $e_{1/\alpha}(1,\delta)$ абсолютно сходится при $-1 < \delta < 0$. Тем самым, $e_{1/\alpha}(1,z)$ – функция, аналитическая в полосе $-1 < \mathrm{Re} z < 0$. Там же аналитична функция

$$\frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha(1+z))} \frac{\pi(z+1)}{\sin \pi(z+1)},$$

совпадающая с $e_{1/\alpha}(1,z)$ при $-1 < \mathrm{Re} z < 0$, $z \neq (1/\alpha)-1$. Формула (6.4) доказана.

ABSTRACT. We consider two one-parametric families of limit distributions arising in Queueing Models of $M|G|1|\infty$ and $GI|M|1|\infty$ types under unit traffic intensity condition and given by their Laplace-Stieltjes Transform. We investigate the analytical properties of the families : their integral representations by stable laws, integral representations with kernels of Mittag-Leffler type and series representations. Also the moments of the distributions are evaluated.

ЛИТЕРАТУРА

1. E. A. Danielian, F. Liese, "$M|G|1|\infty$ – queueing model with unit traffic-intensity in continous time", Rostock Math. Kolloq., vol. 32, pp. 67 - 86, 1987.
2. Э. А. Даниелян, "Предельная теорема для времени ожидания в модели $M|G|1|\infty$ при единичной загрузке", Уч. зап. ЕГУ, т. 2(165), стр. 9 – 16, 1987.
3. Э. А. Даниелян, "Предельные теоремы для времени ожидания в приоритетных системах с одним обслуживающим прибором", ДАН Арм. ССР, т. 21, №. 3, стр. 129 - 135, 1980.
4. А. В. Печинкин, Г. М. Арипов, "Предельное распределение времени ожидания в системе $GI|M|1$", Известия АН Узбекской ССР, №. 1, стр. 27 - 32, 1975.
5. А. В. Печинкин, Г. М. Арипов, "О квазистационарных распределениях для систем с очередью", Труды III Всесоюзн. школы по теории масс. обслуживания, т. 2, стр. 140 - 149, 1976.
6. Э. А. Даниелян, Г. А. Попов, "Об одной предельной теореме для приоритетных систем при единичной загрузке", ДАН Арм. ССР, т. 70, №. 1, стр. 11 - 15, 1980.
7. Т. З. Хачикян, "Новые предельные теоремы в модели $M|G|1|\infty$", Кандидатская диссертация, ЕГУ, 1992.
8. P. Erdos, M. Kac, "On certain limit theorems of the theory of probability", Bull. Amer. Math. Soc., vol. 52, pp. 292 - 302, 1946.
9. N. U. Prabhu, Stochastic Storage Processes, Springer-Verlag, Berlin, 1980.
10. E. K. Kyprianou, "On the quasi-stationary distributions of the virtual waiting time in queues with Poisson arrivals", J. Appl. Prob., no. 8, pp. 494 – 507, 1971.
11. E. K. Kyprianou, "On the quasi-stationary distributions of the $GI|M|1$", J. Appl. Prob., no. 1, pp. 117 – 128, 1972.
12. E. A. Danielian, "Asymptotical investigation of the virtual waiting time for priority queues in a busy store", Current Topics in Cybernetics and Systems, Springer-Verlag, Berlin, pp. 80 – 81, 1978.
13. В. Феллер, Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 2, Наука, Москва, 1984.
14. А. А. Боровков, Теория вероятностей, Наука, Москва, 1976.
15. В. М. Золотарев, Одномерные устойчивые распределения, Наука, Москва, 1983.
16. М. М. Джрбашян, Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, Наука, Москва, 1966.
17. А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев, Интегралы и ряды, Наука, Москва, 1986.
18. L. Berg, "On Danielian's class of distribution functions" Rostock Math. Kolloq., vol. 37, pp. 67 - 86, 1987.
19. А. И. Маркушевич, Теория аналитических функций, Наука, Москва, 1968.

26 января 1994 Ереванский государственный университет