ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ДАРЛИНГТОНА ДЛЯ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ПОЗИТИВНЫХ J-СИММЕТРИЧЕСКИХ МАТРИЦ-ФУНКЦИЙ

В. Л. Даллакян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 29, №2, 1994

В статье рассмотрены вещественные рациональные позитивные J-симметрические матриц-функции порядка n. Доказано, что любая такая функция $h(\lambda)$ представима в виде дробно-линейного преобразования $h(\lambda) = [a_{11}(\lambda)R + a_{12}(\lambda)] \cdot [a_{21}(\lambda)R + a_{22}(\lambda)]^{-1}$, где R постоянная (диагональная) матрица, а матрица коэффициентов $A(\lambda) = (a_{ij}(\lambda))$ рациональна, Э-несжимаема в правой полуплоскости, Э-унитарна на мнимой оси, вещественна и симплектична.

ВВЕДЕНИЕ

Теорема С. Дарлингтона [1] о дробно-линейном представлении рациональных вещественных позитивных функций $z(\lambda)$ нашла множество приложений в аналитической теории цепей. В случае, когда $z(\lambda)$ – рациональная вещественная позитивная матрица-функция порядка n, ее дробно-линейное представление было получено Е. Я. Меламуд [2]. В работе [2] получено также дробно-линейное представление для случая, когда $z(\lambda)$ является, кроме того, симметрической. Реализация по Дарлингтону мероморфных позитивных матриц-функций рассмотрена в работах Д. З. Арова (см., напр., [3]).

В настоящей работе получено дробно-линейное представление для рациональных позитивных вещественных J-симметрических матриц-функций порядка n, где

$$J = \begin{pmatrix} I_{n_\alpha} & 0 \\ 0 & -I_{n_\beta} \end{pmatrix}, \quad n = n_\alpha + n_\beta,$$

а I_m единичная матрица порядка m.

§1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Квадратнаую нулевую матрицу порядка n обозначим через O_n. Квадратную блочную диагональную матрицу с блоками $D_1, D_2, \ldots, D_k$, лежащими на главной диагонали и с нулевыми элементами вне этих блоков, обозначим через $\{D_1, \ldots, D_k\}$. Мы будем рассматривать *вещественные J-внутренние* матрицы-функции $A(\lambda)$ [3].

Как известно [2], рациональная вещественная позитивная матрица-функция $h(\lambda)$ представима в виде суммы

$$h(\lambda) = h_0(\lambda) + h_1(\lambda), \tag{1}$$

где $h_0(\lambda)$ – вещественная позитивная матрица-функция, удовлетворяющая условию $h_0(\lambda) + h_0^*(\lambda) = 0$ при $\operatorname{Re}\lambda = 0$ (*реактансная* матрица-функция), а $h_1(\lambda)$ – рациональная вещественная позитивная матрица-функция с полюсами, лежащими на мнимой оси. Обозначим

$$\Im = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Имеет место

Теорема 1 [2]. *Произвольная рациональная позитивная вещественная матрица-функция $z(\lambda)$ порядка n представима в виде дробно-линейного преобразования*

$$z(\lambda) = [a(\lambda)R + b(\lambda)] \cdot [c(\lambda)R + d(\lambda)]^{-1},$$

где $R = \{I_m, O_{n-m}\}$, $m = \operatorname{rank}\,[z(\lambda) + z'(-\lambda)]$, а матрица-функция $A(\lambda) = \begin{pmatrix} a(\lambda) & b(\lambda) \\ c(\lambda) & d(\lambda) \end{pmatrix}$ порядка $2n$ рациональна и является вещественной $\Im$-внутренней.

§2. ДРОБНО-ЛИНЕЙНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ТИПА ДАРЛИНГТОНА ДЛЯ РАЦИОНАЛЬНЫХ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ПОЗИТИВНЫХ МАРТИЦ-ФУНКЦИЙ

Рассмотрим рациональную вещественную позитивную матрицу-функцию $h(\lambda)$ порядка $n = n_\alpha + n_\beta$

$$h(\lambda) = \begin{pmatrix} h_{11}(\lambda) & h_{12}(\lambda) \\ h_{21}(\lambda) & h_{22}(\lambda) \end{pmatrix}, \tag{3}$$

где $h_{11}(\lambda)$ - матрица-функция порядка n_α. Пусть

$$m = \operatorname{rank}\,[h(\lambda) + h'(-\lambda)], \quad m_\alpha = \operatorname{rank}\,[h_{11}(\lambda) + h'_{11}(-\lambda)],$$

$$m'_\alpha = n_\alpha - m_\alpha, \quad m_\beta = m - m_\alpha, \quad m'_\beta = n_\beta - m_\beta.$$

Заметим, что $m'_\beta \geq 0$. Это обусловлено тем, что позитивность матрицы (3) влечет эрмитово-неотрицательность ($\overline{\tau} = \tau > 0$) матрицы

$$H(i\tau) = \begin{pmatrix} A & B \\ B^* & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11}(i\tau) + h'_{11}(-i\tau) & h_{12}(i\tau) + h'_{21}(-i\tau) \\ h_{21}(i\tau) + h'_{12}(-i\tau) & h_{22}(i\tau) + h'_{22}(-i\tau) \end{pmatrix}.$$

Согласно лемме В. П. Потапова [5] о неотрицательных эрмитовых матрицах, уравнение $AX = B$ имеет хотя бы одно решение, т. е. столбцы матрицы B являются линейными комбинациями столбцов матрицы A. Но тогда $\operatorname{rank}\,[A\ B] = \operatorname{rank}\,A$. Следовательно, $H(i\tau)$ имеет кроме m_α еще m_β линейно независимых строк, которые естественно, расположены в блоке $[B^*\ C]$, имеющем n_β строк. Это означает, что $m'_\beta \geq 0$.

Введем следующие обозначения :

$$j = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -I_n \end{pmatrix}, \quad P^\alpha = \begin{pmatrix} I_{n_\alpha} & 0 \\ 0 & O_{n_\beta} \end{pmatrix}, \quad P^\beta = \begin{pmatrix} O_{n_\alpha} & 0 \\ 0 & I_{n_\beta} \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & J \\ -J & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathfrak{I}_1 = \begin{pmatrix} P^\alpha & P^\beta \\ P^\beta & P^\alpha \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{I}_2 = \begin{pmatrix} I_{m_\alpha} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{m_\beta} & 0 \\ 0 & I_{m'_\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{m'_\beta} \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{I}_4 = \begin{pmatrix} \mathfrak{I}_2 & 0 \\ 0 & \mathfrak{I}_2 \end{pmatrix}.$$

Теорема 2. *Произвольная рациональная вещественная позитивная матрица-функция $h(\lambda)$ (3) порядка $n = n_\alpha + n_\beta$ представима в виде дробно-линейного преобразования*

$$h(\lambda) = [a(\lambda)R + b(\lambda)] \cdot [c(\lambda)R + d(\lambda)]^{-1} \tag{4}$$

над постоянной матрицей $R = \{I_{m_\alpha}, O_{m'_\alpha}, I_{m_\beta}, O_{m'_\beta}\}$ с вещественной $\mathfrak{I}$-внутренней матрицей коэффициентов порядка $2n$

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} a(\lambda) & b(\lambda) \\ c(\lambda) & d(\lambda) \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Доказательство. Наряду с $h(\lambda)$, вещественна и позитивна также матрица $h_2(\lambda) = \mathfrak{I}_2 h(\lambda) \mathfrak{I}_2^*$. Согласно теореме 1, матрица $h_2(\lambda)$ представима в виде дробно-линейного преобразования

$$h_2(\lambda) = [a_2(\lambda)R_2 + b_2(\lambda)] \cdot [c_2(\lambda)R_2 + d_2(\lambda)]^{-1},$$

где $R_2 = \{I_m, O_{n-m}\}$, а матрица-функция

$$A_2(\lambda) = \begin{pmatrix} a_2(\lambda) & b_2(\lambda) \\ c_2(\lambda) & d_2(\lambda) \end{pmatrix}$$

порядка $2n$ вещественна и $\mathfrak{I}$-внутренняя. Следовательно, матрица-функция $h(\lambda)$ представима в виде (4) с $R = \mathfrak{I}_2^* R_2 \mathfrak{I}_2$, и матрица коэффициентов равна $A(\lambda) = \mathfrak{I}_4^* A_2(\lambda) \mathfrak{I}_4$. Так же мы получаем, что $\mathfrak{I}_4^* \mathfrak{I} \mathfrak{I}_4 = \mathfrak{I}$, и, тем самым, $A(\lambda)$ является $\mathfrak{I}$-внутренней. Теорема 2 доказана.

Обратимся теперь к конкрстному построению матрицы $A(\lambda)$ для матрицы-функции (3). Рассмотрим матрицу-функцию

$$f(\lambda) = \frac{h(\lambda) + h'(-\lambda)}{2}$$

с рангом, равным m. Предположим $m = 0$. Тогда $h(\lambda)$ – реактансная, вещественная, позитивная матрица. Полагая, что $R = O$, будем иметь

$$h(\lambda) = [I \cdot R + h(\lambda)] \cdot [O \cdot R + I]^{-1}.$$

Матрица коэффициентов этого дробно-линейного преобразования :

$$\begin{pmatrix} I & h(\lambda) \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

Поскольку $J_2 = \Im_1 j \Im\Im_1$, имеем

$$A'(\lambda)J_2A(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & J \\ -J & h'(\lambda)J - Jh(\lambda) \end{pmatrix}.$$

В этом случае $h(\lambda)$ является J-симметрической ($h'(\lambda) = Jh(\lambda)J$), а матрица $A(\lambda)$ удовлетворяет условию симплектичности

$$A'(\lambda)J_2A(\lambda) \equiv J_2. \tag{6}$$

Предположим теперь, что $0 < m \leq n$. Тогда для матрицы-функции $h(\lambda)$ справедливо разложение (1), которое можно представить в виде дробно-линейного преобразования

$$h(\lambda) = [I \cdot h_1(\lambda) + h_0(\lambda)] \cdot [O \cdot h_1(\lambda) + I]^{-1}. \tag{7}$$

Так как $h_0(\lambda)$ -- рациональная, вещественная, позитивная, реактансная матрица-функция, матрица коэффициентов

$$A_0(\lambda) = \begin{pmatrix} I & h_0(\lambda) \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

дробно-линейного преобразования (7) вещественна, $\Im$-внутренняя и удовлетворяет условию (6).

По теореме 2, $h_1(\lambda)$ может быть записано в виде дробно-линейного преобразования

$$h_1(\lambda) = [a_1(\lambda)R + b_1(\lambda)] \cdot [c_1(\lambda)R + d_1(\lambda)]^{-1} \tag{8}$$

с вещественной $\Im$-внутренней матрицей коэффициентов

$$A_1(\lambda) = \begin{pmatrix} a_1(\lambda) & b_1(\lambda) \\ c_1(\lambda) & d_1(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Покажем теперь, что если матрица-функция $h(\lambda)$ является J-симметрической, то $A_1(\lambda)$ удовлетворяет условию (6). Дробно-линейное преобразование матрицы-функции $h(\lambda)$ является суперпозицией преобразований (7) и (8), т. е. матрица коэффициентов этого дробно-линейного преобразования есть $A(\lambda) =$

$= A_0(\lambda)A_1(\lambda)$. Отсюда следует, что, если матрицы $A_0(\lambda)$ и $A_1(\lambda)$ вещественные, $\mathfrak{J}$-внутренние и удовлетворяют условию симплектичности (6), то те же свойства имеет и матрица $A(\lambda)$. Поскольку $h_0(\lambda) + h_0^*(\lambda) = 0$ при $\mathrm{Re}\,\lambda = 0$, то используя вещественность $h_0(\lambda)$ получаем, что $h_0(i\tau) + h_0'(-i\tau) \equiv 0$. Ввиду аналитичности справедливо тождество

$$h_0(\lambda) + h_0'(-\lambda) \equiv 0,$$

и, тем самым

$$f(\lambda) = \frac{h_1(\lambda) + h_1'(-\lambda)}{2}.$$

Из вещественности $h_1(\lambda)$ следует, что

$$f(i\tau) = \frac{h_1(i\tau) + h_1^*(i\tau)}{2}.$$

Таким образом, $f(i\tau)$ – рациональная по отношению $i\tau$, неотрицательная матрица-функция порядка $n = n_\alpha + n_\beta$, ее ранг равен $m = m_\alpha + m_\beta$, и $f(i\tau) = f(-i\tau)$. Матрица-функция $f(\lambda)$ обладает минором $M_m(\lambda)$ порядка m, тождественно не равным нулю. Не теряя общности можно предположить, что m_α строк и столбцов $M_m(\lambda)$ расположены в левом верхнем углу и что следующие m_β строк и столбцов расположены, начиная с $(n_\alpha + 1)$-го. В качестве рациональных вещественных решений полной размерности соответственно левой и правой факторизационных задач для $f(i\tau)$ (см. [4]) возьмем матрицы-функции

$$X(\lambda) = \left\{x_{kj}(\lambda)\right\}_{k=\overline{1,n}}^{j=\overline{1,m}} \quad \text{и} \quad Y(\lambda) = \left\{y_{kj}(\lambda)\right\}_{k=\overline{1,m}}^{j=\overline{1,n}}.$$

Представим их в блочной форме

$$X(\lambda) = \left\{X_{kj}(\lambda)\right\}_{k=\overline{1,4}}^{j=1,2} \quad \text{и} \quad Y(\lambda) = \left\{Y_{kj}(\lambda)\right\}_{k=1,2}^{j=\overline{1,4}},$$

где $X_{11}(\lambda)$ и $Y_{11}(\lambda)$ (или $X_{32}(\lambda)$ и $Y_{23}(\lambda)$) – квадратные матрицы порядка m_α (или m_β).

Перейдем теперь от матрицы $h_1(\lambda)$ к матрице-функции $h_2(\lambda) = \Im_2 h_1(\lambda)\Im_2^*$. Соответственно, мы переходим от $f(\lambda)$ к $f_2(\lambda) = \Im_2 f(\lambda)\Im_2^*$ и от $A_1(\lambda)$ к $A_2(\lambda) = \Im_4 A_1(\lambda)\Im_4^*$. Тогда матрица

$$f_2(i\tau) = \frac{h_2(i\tau) + h_2^*(i\tau)}{2},$$

и ее главный минор, расположенный в верхнем левом углу имеет порядок m и не равняется тождественно нулю. В качестве рациональных вещественных решений полного ранга левой и правой факторизационных задач для $f_2(i\lambda)$ возьмем соответственно

$$X_2(\lambda) = \begin{pmatrix} \widetilde{X}_{11}(\lambda) \\ \widetilde{X}_{21}(\lambda) \end{pmatrix} = \Im_2 X(\lambda), \quad Y_2(\lambda) = \begin{pmatrix} \widetilde{Y}_{11}(\lambda) & \widetilde{Y}_{12}(\lambda) \end{pmatrix} = Y(\lambda)\Im_2^*,$$

где $\widetilde{X}_{11}(\lambda)$ и $\widetilde{Y}_{11}(\lambda)$ – квадратные матрицы порядка m, которые не имеют особенностей за исключением, быть может, конечного числа точек. На решение $X(\lambda)$ левой факторизационной задачи для $f(\lambda)$ мы налагаем условие

$$\widetilde{X}_{11}(-\lambda) \text{ голоморфно в полуплоскости } \operatorname{Re}\lambda > 0, \tag{9}$$

которое в любом случае может быть удовлетворено (см. [2]).

Рассмотрим следующие матрицы-функции порядка n :

$$q_{X_2}(\lambda) = \begin{pmatrix} \widetilde{X}_{11}(\lambda) & 0 \\ \widetilde{X}_{21}(\lambda) & I \end{pmatrix}^{-1}, \tag{10}$$

$$p_{X_2}(\lambda) = q_{X_2}(\lambda)h_2(\lambda), \tag{11}$$

$$q_{Y_2}(\lambda) = \begin{pmatrix} \widetilde{Y}_{11}(\lambda) & \widetilde{Y}_{12}(\lambda) \\ 0 & I \end{pmatrix}^{-1}, \tag{12}$$

$$p_{Y_2}(\lambda) = h_2(\lambda)q_{Y_2}(\lambda). \tag{13}$$

Согласно теореме 1, вещественная позитивная матрица-функция $h_2(\lambda)$ допускает дробно-линейное представление

$$h_2(\lambda) = [a_2(\lambda)R_2 + b_2(\lambda)] \cdot [c_2(\lambda)R_2 + d_2(\lambda)]^{-1},$$

где (см. [2])

$$a_2(\lambda) = \frac{p_{Y_2}(\lambda) + p'_{X_2}(-\lambda)}{2} + I - R_2, \qquad R_2 = \{I_m, O_{n-m}\},$$

$$b_2(\lambda) = \frac{p_{Y_2}(\lambda) - p'_{X_2}(-\lambda)}{2}, \; c_2(\lambda) = \frac{q_{Y_2}(\lambda) - q'_{X_2}(-\lambda)}{2}, \; d_2(\lambda) = \frac{q_{Y_2}(\lambda) + q'_{X_2}(-\lambda)}{2}.$$

Из свойства J-симметричности матрицы-функции $h(\lambda)$ (следовательно и $h_1(\lambda)$) вытекает, что матрица-функция $h_2(\lambda)$ обладает свойством $\Im_3$-симметричности с $\Im_3 = \Im_2 J \Im_2^*$:

$$h_2'(\lambda) = \Im_3 h_2(\lambda) \Im_3.$$

Отсюда следует, что

$$f_2'(i\tau) = \left(\frac{h_2(i\tau) + h_2'(-i\tau)}{2}\right)' = \Im_3 f_2(i\tau) \Im_3,$$

и в качестве правого решения факторизационной задачи для $f_2(i\tau)$ можно взять

$$Y_2(\lambda) = \left\{I_{m_\alpha}, -I_{m_\beta}\right\} X_2'(\lambda) \Im_3.$$

При таком выборе $Y_2(\lambda)$ имеет место соотношение

$$q_{Y_2}(\lambda) = \Im_3 q'_{X_2}(\lambda) \Im_3, \quad p_{Y_2}(\lambda) = \Im_3 p'_{X_2}(\lambda) \Im_3,$$

откуда следует, что

$$A_2(-\lambda) = \{\Im_3, -\Im_3\} A_2(\lambda) \{\Im_3, -\Im_3\}.$$

Для матрицы-функции $A_1(\lambda) = \Im_4^* A_2(\lambda) \Im_4$ получаем

$$A_1(-\lambda) = \{\Im_2^*, \Im_2^*\}\{\Im_3, -\Im_3\} A_2(\lambda) \{\Im_3, -\Im_3\}\{\Im_2, \Im_2\},$$

или, учитывая, что $\Im_2^* \Im_3 \Im_2 = J$

$$A_1(-\lambda) = \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & -J \end{pmatrix} A_1(\lambda) \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & -J \end{pmatrix} = \Im J_2 A_1(\lambda) J_2 \Im. \qquad (14)$$

Так как $A_1(\lambda)$ вещественна и $\Im$-унитарна, по аналитичности получаем

$$A_1'(-\lambda)\ \Im\ A_1(\lambda) = \Im.$$

Следовательно, согласно (14)

$$\Im J_2 A_1'(\lambda)\ J_2 \Im\ \Im\ A_1(\lambda) = \Im$$

или

$$A_1'(\lambda)\ J_2\ A_1(\lambda) = J_2,$$

т. е. соотношение (6) выполнено и для матрицы-функции $A_1(\lambda)$. Таким образом, имеет место

Теорема 3. *Произвольная рациональная вещественная позитивная J-симметрическая матрица-функция*

$$h(\lambda) = \begin{pmatrix} h_{11}(\lambda) & h_{12}(\lambda) \\ -h_{12}'(\lambda) & h_{22}(\lambda) \end{pmatrix}$$

порядка $n = n_\alpha + n_\beta$ с матрицей $h_{11}(\lambda)$ размерности n_α представима в виде дробно-линейного преобразования

$$h(\lambda) = [a(\lambda)R + b(\lambda)] \cdot [c(\lambda)R + d(\lambda)]^{-1} \tag{15}$$

над постоянной матрицей $R = \{I_{m_\alpha}, O_{n_\alpha - m_\alpha}, I_{m_\beta}, O_{n_\beta - m_\beta}\}$, где

$$m = \ \mathrm{rank}\ [h(\lambda) + h'(-\lambda)], \quad m_\alpha = \ \mathrm{rank}\ [h_{11}(\lambda) + h_{11}'(-\lambda)], \quad m_\beta = m - m_\alpha,$$

а матрица коэффициентов $A(\lambda) = \begin{pmatrix} a(\lambda) & b(\lambda) \\ c(\lambda) & d(\lambda) \end{pmatrix}$ порядка $2n$ является вещественной, $\Im$-внутренней и, кроме того, удовлетворяет условию симплектичности (6).

§3. РЕАЛИЗАЦИЯ РАЦИОНАЛЬНЫХ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ПОЗИТИВНЫХ J-СИММЕТРИЧЕСКИХ МАТРИЦ-ФУНКЦИЙ

В аналитической теории электрических цепей произвольная рациональная позитивная вещественная функция реализуется согласно теореме Дарлингтона

[1] как полное сопротивление двухполюсника, представляющего собой четырехполюсник без потерь, нагруженный со стороны выходных зажимов на одно активное сопротивление (резистор). Аналогичная реализация осуществима для позитивных вещественных симметрических матриц-функций. Такими матрицами-функциями как известно, являются как матрица полных сопротивлений (импедансов), так и матрица полных проводимостей (адмитансов) многополюсника. Естественным обобщением этих матриц является гибридная матрица $2n$-полюсника. Гибридная матрица $h(\lambda)$ обладает свойствами вещественности, позитивности и J-симметричности (см. [6]), причем числа n_α и n_β определяются характером пар зажимов $2n$-полюсника (внешних дуг линейной структуры).

Перейдем к вопросу реализации вещественных позитивных J-симметрических матриц-функций. Рассмотрим $4n$-полюсник $\mathcal{P}_W$ $(n = n_\alpha + n_\beta)$, нагруженный $2n$-полюсником $\mathcal{P}_H$, обладающим внешним гибридным оператором (гибридной матрицей) H. Допустим, что число входных α- (β-) дуг $4n$-полюсника $\mathcal{P}_W$ равно числу его входных α- (β-) дуг. В предположении существования для $4n$-полюсника $\mathcal{P}_W$ проходной передающей матрицы

$$W = \{w_{kj}\}_{k=\overline{1,n}}^{j=\overline{1,n}} = \{W_{kj}\}_{k=\overline{1,4}}^{j=\overline{1,4}},$$

имеет место матричное уравнение (см. [6, 7])

$$\begin{pmatrix} U_1^\alpha \\ U_1^\beta \\ I_1^\alpha \\ I_1^\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} & W_{13} & W_{14} \\ W_{21} & W_{22} & W_{23} & W_{24} \\ W_{31} & W_{32} & W_{33} & W_{34} \\ W_{41} & W_{42} & W_{43} & W_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_2^\alpha \\ U_2^\beta \\ I_2^\alpha \\ I_2^\beta \end{pmatrix}$$

Отсюда находим, что

$$\psi_1 = a\psi_2 + b\varphi_2, \qquad \varphi_1 = c\psi_2 + d\varphi_2,$$

где

$$a = \begin{pmatrix} W_{11} & W_{14} \\ W_{41} & W_{44} \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} W_{13} & W_{12} \\ W_{43} & W_{42} \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} W_{31} & W_{34} \\ W_{21} & W_{24} \end{pmatrix}, d = \begin{pmatrix} W_{33} & W_{32} \\ W_{23} & W_{22} \end{pmatrix},$$

$$\varphi_k = (I_k^\alpha \; j \; U_k^\beta)', \quad \psi_k = (U_k^\alpha \; j \; I_k^\beta)', \quad k = 1, 2.$$

Так как $\psi_2 = H\varphi_2$ [6], получаем,. что

$$\psi_1 = [aH + b] \cdot [cH + d]^{-1} \varphi_1. \tag{16}$$

Теперь легко заметить, что проходная W-матрица $4n$-полюсника $\mathcal{P}_W$ совпадает с матрицей

$$W = \Im_1 \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Im_1.$$

Однако, соотношение (16) задает дробно-линейное преобразование для гибридной матрицы $h(\lambda)$ всего $2n$-полюсника :

$$h(\lambda) = [aH + b] \cdot [cH + d]^{-1} \tag{17}$$

над гибридной матрицей H $2n$-полюсника $\mathcal{P}_H$. Из свойств матрицы коэффициентов $A(\lambda)$ дробно-линейного преобразования (17) следует, что матрица-функция

$$w(\lambda) = \Im_1 \; A(\lambda) \; \Im_1$$

удовлетворяет соотношениям

1) $w^*(\lambda) \; \Im \; w(\lambda) - \Im \geq 0, \quad \mathrm{Re}\, \lambda > 0,$

2) $w^*(\lambda) \; \Im \; w(\lambda) - \Im = 0, \quad \mathrm{Re}\, \lambda = 0,$

3) $\overline{w(\lambda)} = w(\overline{\lambda}),$

4) $w'(\lambda) \; j \; \Im \; w(\lambda) \equiv j \; \Im.$

Иными словами, $w(\lambda)$ является реактансной проходной матрицей. Такие матрицы-функции $2n$-го порядка известны в теории цепей как проходные (передаточные) матрицы-функции $4n$-полюсника (см., например, [5, 7, 8, 9]). В [5] было показано, что любая рациональная реактансная матрица-функция $w(\lambda)$ порядка $2n$ является A-матрицей некоторого линейного пассивного $4n$-полюсника без потерь.

Таким образом, дробно-линейное преобразование (15) задает способ реализации вещественных позитивных J-симметрических матриц-функций порядка n посредством построения $4n$-полюсника $\mathcal{P}_W$ с проходной матрицей $w(\lambda)$, загруженной со стороны выхода $2n$-полюсником $\mathcal{P}_H$ с гибридной матрицей H. Иначе говоря утверждение теоремы 3 означает, что произвольная рациональная вещественная позитивная J-симметрическая матрица-функция $h(\lambda)$ порядка $n = n_\alpha + n_\beta$ есть гибридная матрица $2n$-полюсника, представляющего собой $4n$-полюсник без потерь, n пар выходных зажимов которого замкнуты на активные сопротивления, некоторые из которых могут оказаться нулевыми.

ABSTRACT. The paper considers rational real positive J-symmetric matrix-functions of order n. We prove that any function $h(\lambda)$ of this class can be presented by means of linear-fractional transformation $h(\lambda) = [a_{11}(\lambda)R + a_{12}(\lambda)] \cdot [a_{21}(\lambda)R + a_{22}(\lambda)]^{-1}$, where R is a constant (diagonal) matrix, and the matrix $A(\lambda) = (a_{ij}(\lambda))$ of coefficients is rational, $\mathfrak{I}$-noncontracting in the right half-plane, $\mathfrak{I}$-unitary on the imaginary axes, real and symplectic.

ЛИТЕРАТУРА

1. S. Darlington, "Synthesis of reactance 4-poles", J. Math. and Phys., vol. 18, pp. 257 - 353, 1939.
2. Е. Я. Меламуд, "Об одном обобщении теоремы Дарлингтона", Известия АН Армении, Математика, т. 7, №. 3, стр. 183 – 195, 1972.
3. Д. З. Аров, "Реализация канонической системы с диссипативным граничным условием на одном конце сегмента по коэффициенту динамической податливости", Сиб. мат. журнал, т. 16, №. 3, стр. 440 – 463, 1975.
4. Ю. Л. Розанов, Стационарные случайные процессы, Физматгиз, Москва, 1963.
5. А. В. Ефимов, В. П. Потапов, "J-растягивающие матрицы-функции и их роль в аналитической теории электрических цепей", УМН, т. 28, №. 1, стр. 63 – 130, 1973.
6. В. Л. Даллакян, "Внешний гибридный оператор линейной структуры на графе", Труды ВЦ АН Арм. ССР и ЕГУ, т. 14, стр. 87 – 101, 1985.
7. Н. И. Хигрий, "О коэффициенте прохождения передающей линейной структуры", Теория функций, функ. анализ и их прилож., Харьков, т. 23, стр. 131 – 141, 1975.
8. А. Г. Руткас, "Свойства функции рассеяния и прохождения волн в структурах с заданной геометрией", ДАН СССР, т. 230, №. 1, стр. 38 – 40, 1976.
9. Т. А. Товмасян, "Об элементарных и примарных множителях J-несжимающих вещественных матриц-функций", Уч. зап. ЕГУ, №. 1, стр. 11 – 25, 1971.

4 июня 1993

Институт информатики и проблем автоматизации
Национальной Академии Наук Армении