ОБ ОДНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ НЕПРАВИЛЬНО ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В МНОГОСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ

А. О. Бабаян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 29, №2, 1994

В статье рассмотрена граничная задача типа Дирихле для эллиптического уравнения

$$\frac{\partial^{m+n} u}{\partial \bar{z}^m \partial z^n} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial u}{\partial z} \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

в многосвязной области. Задача приводится к задаче Дирихле для n-гармонического уравнения. Доказана теорема существования.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть D есть $(p+1)$-связная, ограниченная область комплексной плоскости $\mathbf{C}$, обладающая достаточно гладкой границей Γ. Не умаляя общности, будем предполагать, что $0 \in D$. Исследуем однородное эллиптическое уравнение

$$\frac{\partial^{m+n} u}{\partial \bar{z}^m \partial z^n} = 0, \quad (x, y) \in D, \tag{1}$$

где $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial u}{\partial z} \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

m, n – целые, неотрицательные числа, такие что $m \geq n$ (при $m < n$ получаем уравнение (1) относительно $\bar{u}$). Это уравнение неправильно эллиптическое (определение см в [1]), следовательно, для него классические граничные задачи (Дирихле, Неймана, Пуанкаре) не являются ни фредгольмовыми, ни нетеровыми (см. [2]).

В настоящей статье рассмотрены следующие граничные условия :

$$\left.\frac{\partial^k u}{\partial N^k}\right|_\Gamma = f_k(x,y), \quad (x,y)\in\Gamma, \quad k=0,1,...,n-1, \tag{2}$$

$$\operatorname{Re}\left.\frac{\partial^k u}{\partial N^k}\right|_\Gamma = f_k(x,y), \quad (x,y)\in\Gamma, \quad k=n,...,m-1. \tag{3}$$

Здесь N – внешняя нормаль к границе Γ в точке $(x,y)\in\Gamma$, $f_0,...,f_{n-1}$ – комплекснозначные, а $f_n,...,f_{m-1}$ – вещественнозначные, достаточно гладкие функции на Γ. При $n=0$ условия (2) отсутствуют.

Мы ищем регулярное решение задачи (1) – (3), то есть функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую уравнению (1) в области D и граничным условиям (2), (3) на Γ в классическом смысле. Определенная таким образом граничная задача для односвязных областей была исследована в [3]. Если в (2), (3) $f_k\equiv 0$, $k=0,...,m-1$, то задача (1) – (3) называется *однородной*. Основным результатом статьи является следующая

Теорема. *Однородная задача (1) – (3) имеет $(m-n)^2$ линейно независимых над полем действительных чисел решений, а для разрешимости неоднородного уравнения необходимо и достаточно выполнение $(m-n)^2p$ условий.*

§2. ДВА ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ УТВЕРЖДЕНИЯ

Использование нижеследующих двух лемм существенно для доказательства теоремы.

Лемма 1. *Общее решение уравнения (1) представимо в виде*

$$u=\sum_{k=0}^{m-1}\bar z^k\varphi_k(z)+\sum_{j=0}^{n-1}z^j\overline{\psi_j(z)}+\sum_{r=0}^{m-1}\sum_{q=0}^{n-1}\sum_{s=1}^{p}c_{rqs}\bar z^r z^q\log|z-z_s|, \tag{4}$$

где φ_k,ψ_j произвольные аналитические в D функции, z_s – фиксированная точка из s-ой ограниченной компоненты дополнения D, а постоянные c_{rqs} однозначно определены по функции u.

Доказательство. Представим уравнение (1) в виде

$$\Delta^n\left(\frac{\partial^{m-n}u}{\partial\bar z^{m-n}}\right)=0, \tag{5}$$

где $\Delta = 4\partial^2/\partial\bar{z}\partial z$ – оператор Лапласа. В [4] доказано, что общее решение n-гармонического уравнения допускает представление

$$w = \sum_{k=0}^{n-1} \bar{z}^k \varphi_k(z) + \sum_{j=0}^{n-1} z^j \overline{\psi_j(z)} + \sum_{q,r=0}^{n-1} \sum_{s=1}^{p} c_{rqs} \bar{z}^r z^q \log|z - z_s|, \tag{6}$$

где φ_k, ψ_j – аналитические в D функции, z_s – фиксированная точка s-ой ограниченной компоненты дополнения D, а c_{rqs} – постоянные, однозначно определяемые по функции w. Следовательно, по (5)

$$\frac{\partial^{m-n} u}{\partial \bar{z}^{m-n}} = \sum_{k=0}^{n-1} \bar{z}^k \varphi_k(z) + \sum_{j=0}^{n-1} z^j \overline{\psi_j(z)} + \sum_{q,r=0}^{n-1} \sum_{s=1}^{p} a_{rqs} \bar{z}^r z^q \log|z - z_s|. \tag{7}$$

Соединим теперь компоненты границы Γ гладкими дугами l_k, $k = 1, ..., p$ ($l_k \subset D$ и $l_k \cap l_j = \emptyset$ при $k \neq j$), так, чтобы $D \setminus (l_1 \cup \cdots \cup l_p)$ превратилось в односвязную область. Тогда в $D \setminus (l_1 \cup \cdots \cup l_p)$ можно выделить непрерывную ветвь $\log(z - z_s)$. Следовательно, (7) можно переписать в виде

$$\frac{\partial^{m-n} u}{\partial \bar{z}^{m-n}} = \sum_{k=0}^{n-1} \bar{z}^k \varphi_k(z) + \sum_{j=0}^{n-1} z^j \overline{\psi_j(z)} + \sum_{q,r=0}^{n-1} \sum_{s=1}^{p} a_{rqs} \bar{z}^r z^q [\log(z - z_s) + \log(\bar{z} - \bar{z}_s)],$$
$$(x, y) \in D \setminus (l_1 \cup \cdots \cup l_p).$$

Проинтегрировав обе части этого равенства по $\bar{z}$ в $D \setminus (l_1 \cup \cdots \cup l_p)$, получим

$$\frac{\partial^{m-n-1} u}{\partial \bar{z}^{m-n-1}} = \sum_{k=1}^{n} \bar{z}^k \phi_k(z) + \phi_0(z) + \sum_{j=0}^{n-1} z^j \overline{\Psi_j(z)} + \sum_{s=1}^{p} \sum_{j=0}^{n-1} c_{js} z^j \log(\bar{z} - \bar{z}_s) +$$
$$+ \sum_{j=0}^{n-1} z^j \omega_j(z) + \sum_{q,r=0}^{n-1} \sum_{s=1}^{p} b_{rqs} \bar{z}^{r+1} z^q [\log(z - z_s) + \log(\bar{z} - \bar{z}_s)], \tag{8}$$

где $\phi_k(z), \Psi_j(z), \omega_j(z)$ аналитические в $D \setminus (l_1 \cup \cdots \cup l_p)$ функции, а c_{js}, b_{rqs} – постоянные. Учитывая, что левая часть (8) есть непрерывная в D функция, а $\phi_k(z), \Psi_j(z)$ допускают аналитическое продолжение в D, заключаем, что

$$\sum_{j=0}^{n-1} z^j \omega_j(z) \equiv \sum_{s=1}^{p} \sum_{j=0}^{n-1} c_{js} z^j \log(z - z_s) + \rho(z),$$

где $\rho(z)$ допускает аналитическое продолжение в D. Суммируя изложенное, приходим к представлению

$$\frac{\partial^{m-n-1} u}{\partial \bar{z}^{m-n-1}} = \sum_{k=0}^{n} \bar{z}^k \varphi_k(z) + \sum_{j=0}^{n-1} z^j \overline{\psi_j(z)} + \sum_{s=1}^{p} \sum_{q=0}^{n} \sum_{r=0}^{n-1} c_{rqs} \bar{z}^q z^r \log|z - z_s|.$$

Продолжая этот процесс, аналогично получим представление (4). Теперь покажем, что постоянные c_{qrs} определяются однозначно. Для этого отметим, что в представлении (4) мы можем предполагать

$$\varphi_k(0) = \varphi_k'(0) = \cdots = \varphi_k^{(n-1)}(0) = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1 \tag{9}$$

(при необходимости изменяем ψ_j во втором слагаемом в (4)). Далее

$$\begin{aligned}\frac{\partial^n u}{\partial z^n} &= \sum_{k=0}^{m-1} \bar{z}^k \varphi_k^{(n)}(z) + \sum_{s=1}^{p} \sum_{r=0}^{m-1} \frac{(n-1)! c_{r,n-1,s}}{z - z_s} \bar{z}^r = \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} \bar{z}^k \left[\varphi_k^{(n)}(z) + \sum_{s=1}^{p} \frac{(n-1)! c_{k,n-1,s}}{z - z_s}\right],\end{aligned} \tag{10}$$

откуда

$$\frac{\partial^{m+n-1} u}{\partial \bar{z}^{m-1} \partial z^n} = (m-1)! \left[\varphi_{m-1}^{(n)}(z) + \sum_{s=1}^{p} \frac{(n-1)!\, c_{m-1,n-1,s}}{z - z_s}\right]. \tag{11}$$

Следовательно

$$c_{m-1,n-1,s} = \frac{1}{(m-1)!\,(n-1)!\,2\pi i} \int_{\gamma_s} \frac{\partial^{m+n-1} u}{\partial \bar{z}^{m-1} \partial z^n}\, dz, \quad s = 1, \ldots, p,$$

где γ_s – простая замкнутая кривая такая, что $\gamma_s \subset D$ и $\mathrm{int}\gamma_s \cap D^c$ совпадает с s-ой ограниченной компонентой дополнения D. Из (11) находим $\varphi_{m-1}^{(n)}$ и, после интегрирования, учитывая (9) однозначно определяем $\varphi_{m-1}(z)$. Теперь $\varphi_{m-2}(z)$ и постоянные $c_{m-2,n-1,s}$ могут быть найдены из соотношения

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{m-2}}{\partial \bar{z}^{m-2}} &\left[\frac{\partial^n u}{\partial z^n} - \bar{z}^{m-1}\left(\varphi_{m-1}^{(n)}(z) + \sum_{s=1}^{p} \frac{(n-1)!\, c_{m-1,n-1,s}}{z - z_s}\right)\right] = \\ &= (m-2)! \left[\varphi_{m-2}^{(n)}(z) + \sum_{s=1}^{p} \frac{(n-1)!\, c_{m-2,n-1,s}}{z - z_s}\right].\end{aligned}$$

В общем случае функция φ_{m-r} и постоянные $c_{m-r,n-1,s}$ могут быть найдены из соотношения

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{m-r}}{\partial \bar{z}^{m-r}} &\left[\frac{\partial^n u}{\partial z^n} - \sum_{k=m-r+1}^{m-1} \bar{z}^k \left(\varphi_k^{(n)}(z) + (n-1)! \sum_{s=1}^{p} \frac{c_{k,n-1,s}}{z - z_s}\right)\right] = \\ &= (m-r)! \left[\varphi_{m-r}^{(n)}(z) + (n-1)! \sum_{s=1}^{p} \frac{c_{m-r,n-1,s}}{z - z_s}\right],\end{aligned}$$

если $\varphi_j(z)$ и $c_{j,n-1,s}$ уже определены ($j = m-r+1, ..., m-1$). Итак, $\varphi_j(z)$ и $c_{j,n-1,s}$ при $j = 0, 1, ..., m-1$ однозначно определяются по функции u. Тем самым, из (4) следует, что

$$v = \sum_{j=0}^{n-1} z^j \overline{\psi_j(z)} + \sum_{r=0}^{m-1} \sum_{q=0}^{n-2} \sum_{s=1}^{p} c_{rqs} \overline{z}^r z^q \log|z - z_s|, \tag{12}$$

где v уже определенная функция –

$$v = u - \sum_{j=0}^{m-1} \overline{z}^j \varphi_j(z) - \sum_{r=0}^{m-1} \sum_{s=1}^{p} c_{r,n-1,s} \overline{z}^r z^{n-1} \log|z - z_s|.$$

Дифференцируя формулу (12) по $\overline{z}$ приходим к равенству

$$\frac{\partial^m v}{\partial \overline{z}^m} = \sum_{j=0}^{n-1} z^j \overline{\psi_j^{(m)}(z)} + (m-1)! \sum_{q=0}^{n-2} \sum_{s=1}^{p} \frac{c_{m-1,q,s} z^q}{\overline{z} - \overline{z}_s}, \tag{13}$$

пользуясь которым находим $\overline{\psi_{n-1}^{(m)}(z)}$:

$$\frac{\partial^{n+m-1} v}{\partial \overline{z}^m \partial z^{n-1}} = (n-1)! \overline{\psi_{n-1}^{(m)}(z)}. \tag{14}$$

Записав (13) в виде

$$\frac{\partial^m v}{\partial \overline{z}^m} - z^{n-1} \overline{\psi_{n-1}^{(m)}(z)} = \sum_{q=0}^{n-2} z^q \left[\overline{\psi_q^{(m)}(z)} + (m-1)! \sum_{s=1}^{p} \frac{c_{m-1,q,s}}{\overline{z} - \overline{z}_s} \right],$$

получаем равенство, аналогичное (10), из которого последовательно находим функции $\psi_q^{(m)}(z)$ и постоянные $c_{m-1,q,s}$ ($q = 0, 1, ..., n-2$). Затем, как и ранее, перенесем уже определенные функции в левую часть (12) и получим

$$v_1 = \sum_{j=0}^{n-1} z^j \overline{\psi_j(z)} + \sum_{r=0}^{m-2} \sum_{q=0}^{n-2} \sum_{s=1}^{p} c_{rqs} \overline{z}^r z^q \log|z - z_s|, \tag{15}$$

где

$$v_1 = v - \sum_{q=0}^{n-2} \sum_{s=1}^{p} c_{m-1,q,s} \overline{z}^{m-1} z^q \log|z - z_s|.$$

Дифференцируя (15) по $\overline{z}$ приходим к равенству, аналогичному (13) :

$$\frac{\partial^{m-1} v_1}{\partial \overline{z}^{m-1}} = \sum_{q=0}^{n-1} z^q \overline{\psi_q^{(m-1)}(z)} + (m-2)! \sum_{q=0}^{n-2} \sum_{s=1}^{p} \frac{c_{m-2,q,s} z^q}{\overline{z} - \overline{z}_s}.$$

Отсюда аналогично определяются постоянные $c_{m-2,q,s}$ и функции $\psi_q^{(m-1)}(z)$. Продолжение аналогичных рассуждений приводит к определению всех постоянных c_{rqs}. Лемма 1 доказана.

Замечание. Если на функции φ_k из (4) наложить условия (9), то функции φ_k и ψ_j из (4) тоже окажутся однозначно определенными по функции u. Для случая односвязной области D представление (4) было получено в [1].

Лемма 2. *Пусть функция u допускает представление (4) в D и*

$$Re\, u(x,y) \equiv 0, \qquad (x,y) \in D.$$

Тогда справедливо соотношение

$$u = \sum_{j,k=n}^{m-1} G_{jk}\chi_{jk} + iv(x,y), \tag{16}$$

где G_{jk} – произвольные вещественные постоянные, $v(x,y)$ произвольное вещественное решение n-гармонического уравнения

$$\Delta^n v = 0, \qquad (x,y) \in D, \tag{17}$$

а χ_{jk} – линейно независимые, чисто мнимые функции, введенные в [3] :

$$\chi_{jk} = \begin{cases} i(\overline{z}^j z^k + z^j \overline{z}^k), & j \leq k; \\ \overline{z}^j z^k - z^j \overline{z}^k, & j > k. \end{cases} \tag{18}$$

Доказательство. Полагая, что для функций φ_k выполнены условия (9), представим (4) в виде

$$u = \sum_{k=0}^{n-1} \overline{z}^k \varphi_k(z) + \overline{\sum_{k=0}^{n-1} \overline{z}^k \psi_k(z)} + \sum_{k=n}^{m-1} z^m \overline{z}^k \gamma_k(z) + \sum_{j,k=n}^{m-1} b_{jk} z^j \overline{z}^k +$$

$$+ \sum_{q,r=0}^{n-1} \sum_{s=1}^{p} c_{rqs} \overline{z}^r z^q \log|z - z_s| + \sum_{q=0}^{n-1} \sum_{r=n}^{m-1} \sum_{s=1}^{p} c_{rqs} \overline{z}^r z^q \log|z - z_s|. \tag{19}$$

Здесь

$$\varphi_k(z) = \sum_{j=n}^{m-1} b_{kj} z^j + z^m \gamma_k(z), \quad k = n, ..., m-1,$$

где $\gamma_k(z)$ – аналитические в D функции. Тогда

$$\overline{u} = \overline{\sum_{k=0}^{n-1} \overline{z}^k \varphi_k(z)} + \sum_{k=0}^{n-1} \overline{z}^k \psi_k(z) + \sum_{k=n}^{m-1} z^k \overline{z}^m \overline{\gamma_k(z)} + \sum_{j,k=n}^{m-1} \overline{b}_{kj} z^j \overline{z}^k +$$

$$+\sum_{q,r=0}^{n-1}\sum_{s=1}^{p}\overline{c}_{qrs}\overline{z}^r z^q\log|z-z_s|+\sum_{q=0}^{n-1}\sum_{r=n}^{m-1}\sum_{s=1}^{p}\overline{c}_{rqs}\overline{z}^q z^r\log|z-z_s|,$$

и, следовательно

$$\operatorname{Re} u = \operatorname{Re}\sum_{k=0}^{n-1}\overline{z}^k[\varphi_k(z)+\psi_k(z)]+\frac{1}{2}\sum_{j,k=n}^{m-1}(b_{jk}+\overline{b}_{kj})z^j\overline{z}^k+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{q,r=0}^{n-1}\sum_{s=1}^{p}(c_{rqs}+\overline{c}_{qrs})\overline{z}^r z^q\log|z-z_s|+\frac{1}{2}\sum_{k=n}^{m-1}z^k\overline{z}^m\overline{\gamma_k(z)}+\frac{1}{2}\sum_{k=n}^{m-1}z^m\overline{z}^k\gamma_k(z)+ \quad (20)$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{q=0}^{n-1}\sum_{r=n}^{m-1}\sum_{s=1}^{p}c_{rqs}\overline{z}^r z^q\log|z-z_s|+\frac{1}{2}\sum_{q=0}^{n-1}\sum_{r=n}^{m-1}\sum_{s=1}^{p}\overline{c}_{rqs}\overline{z}^q z^r\log|z-z_s|.$$

Из этого равенства, учитывая линейную независимость функций $\overline{z}^k z^j$ и $\overline{z}^r z^q\log|z-z_s|$ и то, что левая сторона (20) тождественно равняется нулю при $(x,y)\in D$, получим

$$\varphi_k(z)+\psi_k(z)\equiv 0,\quad k=0,1,...,n-1,\quad z\in D; \qquad (21)$$

$$b_{jk}=-\overline{b}_{kj},\qquad j,k=n,...,m-1; \qquad (22)$$

$$c_{rqs}=-\overline{c}_{qrs},\quad r,q=0,1,...,n-1,\quad s=1,...,p; \qquad (23)$$

$$\gamma_k(z)\equiv 0,\quad k=n,...,m-1,\quad z\in D; \qquad (24)$$

$$c_{rqs}=0,\quad r=n,...,m-1,\quad q=0,1,...,n-1,\quad s=1,...,p. \qquad (25)$$

Подставив эти соотношения в (19), получим

$$u=\sum_{k=0}^{n-1}\overline{z}^k\varphi_k(z)-\overline{\sum_{k=0}^{n-1}\overline{z}^k\varphi_k(z)}+\sum_{j,k=n}^{m-1}b_{jk}z^j\overline{z}^k+\sum_{q,r=0}^{n-1}\sum_{s=1}^{p}c_{rqs}\overline{z}^r z^q\log|z-z_s|,$$

где b_{jk} и c_{rqs} удовлетворяют, соответственно, (22) и (23). Окончательно, вводя функции χ_{jk} и обозначая

$$\Phi_k(z)=-\frac{1}{2}i\varphi_k(z),\quad k=0,1,...,n-1,$$

$$d_{rqs}=-ic_{rqs},\quad r,q=0,1,...,n-1,\quad s=1,...,p,$$

приходим к соотношению

$$u=\sum_{j,k=n}^{m-1} G_{jk}\chi_{jk}+i\left[\operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\overline{z}^k\Phi_k(z)\right)+\sum_{q,r=0}^{n-1}\sum_{s=1}^{p}d_{rqs}\overline{z}^r z^q\log|z-z_s|\right],$$

и для окончания доказательства остается заметить, что формула

$$v(x,y)=\operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\overline{z}^k\Phi_k(z)\right)+\sum_{q,r=0}^{n-1}\sum_{s=1}^{p}d_{rqs}\overline{z}^r z^q\log|z-z_s|$$

определяет произвольное действительное решение уравнения (17) (см. [4]).

§3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ

1. Найдем условие разрешимости неоднородной задачи (1) (3). Для этого рассмотрим вспомогательную граничную задачу : найти регулярное в D решение уравнения (1), удовлетворяющее граничным условиям

$$\operatorname{Re}\left.\frac{\partial^k u}{\partial N^k}\right|_\Gamma=g_k(x,y),\quad (x,y)\in\Gamma,\quad k=0,1,...,m-1,\tag{26}$$

где

$$g_k(x,y)=\begin{cases}\operatorname{Re} f_k(x,y), & k=0,1,...,n-1\\ f_k(x,y), & k=n,...,m-1,\end{cases}\tag{27}$$

а N, f_k те же, что в условиях (2), (3). Легко видеть, что если функция u является решением (1), то $\overline{u}$ - решение уравнения

$$\frac{\partial^{m+n}u}{\partial z^m\partial\overline{z}^n}=0.$$

Следовательно, функция $w=\operatorname{Re} u$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta^m w=0.\tag{28}$$

Итак, если u является решением задачи (1) - (3), то решением задачи (1), (26) является также u. Поэтому функция $w=\operatorname{Re} u$, являющаяся решением (28), удовлетворяет граничным условиям

$$\left.\frac{\partial^k w}{\partial N^k}\right|_\Gamma=g_k(x,y),\quad (x,y)\in\Gamma,\quad k=0,1,...,m-1.\tag{29}$$

Как было показано в монографии [4], задача (28), (29) однозначно разрешима, и ее решение имеет вид

$$w = \operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^{m-1} \bar{z}^k \beta_k(z)\right) + \sum_{q,r=0}^{m-1} \sum_{s=1}^{p} A_{rqs} \bar{z}^r z^q \log|z - z_s|, \tag{30}$$

где $\beta_k(z)$ - аналитические в D функции, а $A_{rqs} = \overline{A}_{qrs}$ - однозначно определяемые постоянные. С другой стороны, $w = \operatorname{Re} u$, где u есть решение (1) и, следовательно, w представимо в виде (4). Таким образом, в (30) выполнены условия

$$A_{rqs} = 0, \quad r, q = n, \ldots, m-1, \quad r \geq q, \quad s = 1, \ldots, p. \tag{31}$$

Ограничения на g_k, вытекающие из этих условий (постоянные A_{rqs} однозначно определяются по w, а w однозначно определяется по g_k), являются независимыми. Действительно, если

$$g_k = 2 \operatorname{Re} \left.\frac{\partial^k(\bar{z}^r z^q \log|z - z_s|)}{\partial N^k}\right|_\Gamma, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1,$$

то единственным решением задачи (28), (29) является функция

$$w_{rqs} = (\bar{z}^r z^q + z^r \bar{z}^q) \log|z - z_s|,$$

для которой

$$A_{rqs} = 1, \quad A_{ljk} = 0, \quad (l-r)^2 + (j-q)^2 + (k-s)^2 \neq 0, \quad l \geq j.$$

Итак, $p(m-n)^2$ условий (31) необходимы для разрешимости задачи (1) - (3).

Пусть теперь условия (31) выполнены для функции w, являющейся решением задачи (28), (29) и представимой в виде (30). Введем вспомогательную функцию

$$u_1 = \sum_{k=0}^{m-1} \bar{z}^k \beta_k(z) + \sum_{r=0}^{m-1} \sum_{q=0}^{n-1} \sum_{s=1}^{p} A_{rqs} \bar{z}^r z^q \log|z - z_s|, \tag{32}$$

для которой $\operatorname{Re} u_1 = w$. Очевидно, что (32) является частным случаем представления (4). Тем самым, функция u_1 - решение уравнения (1), и поскольку

$\text{Re}\, u_1 = w$, то оно удовлетворяет граничным условиям (26). Далее, обозначим через v_1 единственное решение (17), удовлетворяющее граничным условиям

$$\left.\frac{\partial^k v_1}{\partial N^k}\right|_\Gamma = \text{Im}\, f_k - \text{Im}\left.\frac{\partial^k u_1}{\partial N^k}\right|_\Gamma, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{33}$$

Тогда функция $u = u_1 + iv_1$ является уже решением задачи (1) - (3). Действительно, эта функция удовлетворяет уравнению (1), и при $k = n, \ldots, m-1$

$$\text{Re}\left.\frac{\partial^k u}{\partial N^k}\right|_\Gamma = \text{Re}\left.\frac{\partial^k (u_1 + iv_1)}{\partial N^k}\right|_\Gamma = \text{Re}\left.\frac{\partial^k u_1}{\partial N^k}\right|_\Gamma = f_k,$$

так как v_1 вещественнозначна, а для u_1 выполнено (26). Пусть теперь $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Тогда

$$\left.\frac{\partial^k u}{\partial N^k}\right|_\Gamma = \left.\frac{\partial^k u_1}{\partial N^k}\right|_\Gamma + i\left.\frac{\partial^k v_1}{\partial N^k}\right|_\Gamma = \text{Re}\, f_k + i\,\text{Im}\left.\frac{\partial^k u_1}{\partial N^k}\right|_\Gamma + i\left(\text{Im}\, f_k - \text{Im}\left.\frac{\partial^k u_1}{\partial N^k}\right|_\Gamma\right) =$$

$$= \text{Re}\, f_k + i\,\text{Im}\, f_k = f_k,$$

т. е. функция u удовлетворяет также условиям (3). Таким образом, условия (31) также необходимы для разрешимости задачи (1) - (3).

2. Перейдем к изучению однородной задачи (1) - (3). Поскольку в этом случае функции f_k тождественно равны нулю при $k = 0, 1, \ldots, m-1$, функции $g_k(x, y)$ из (26) тоже равняются нулю всюду на Г. Рассуждая аналогично случаю неоднородной задачи, заключаем, что если функция u является решением однородной задачи (1) - (3), то $w = \text{Re}\, u$ - решение однородной задачи (28), (29) с $g_k(x, y) \equiv 0$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$. Так как задача (28), (29) имеет единственное (нулевое в рассматриваемом случае) решение, то $\text{Re}\, u \equiv 0$ в D. Согласно лемме 2 u, как решение (1), допускает представление (4). Итак, для любого решения однородной задачи (1) - (3) справедливо соотношение (16). Далее, обозначим через v_{kr} решение уравнения (17), удовлетворяющее граничным условиям

$$\left.\frac{\partial^j v_{kr}}{\partial N^j}\right|_\Gamma = i\left.\frac{\partial^j \chi_{kr}}{\partial N^j}\right|_\Gamma, \quad j = 0, 1, \ldots, n-1, \quad k, r = n, \ldots, m-1, \tag{34}$$

где χ_{kr} функции, определенные в (18). Тогда функции

$$u_{kr} = \chi_{kr} + iv_{kr}, \quad k, r = n, \dots, m-1 \tag{35}$$

являются решениями однородной задачи (1) – (3). Действительно, u_{kr} удовлетворяет уравнению (1) и граничному условию (3) (т. к. u_{kr} чисто мнимая функция). Из (33) следует, что при $j = 0, 1, \dots, n-1$ имеем

$$\left.\frac{\partial^j u_{kr}}{\partial N^j}\right|_\Gamma = \left.\frac{\partial^j \chi_{kr}}{\partial N^j}\right|_\Gamma + i\left.\frac{\partial^j v_{kr}}{\partial N^j}\right|_\Gamma = 0,$$

т. е. однородное условие (2) также выполнено. Ввиду линейной независимости χ_{kr}, функции u_{kr} тоже линейно независимы.

Для завершения доказательства остается проверить, что любое решение однородной задачи (1) – (3) является линейной комбинацией функций u_{kr} с действительными коэффициентами. Пусть u – какое-либо решение этой задачи. Как было показано выше, u допускает представление (16). Подставляя это представление в граничные условия (2), получаем

$$\left.\frac{\partial^k u}{\partial N^k}\right|_\Gamma = \frac{\partial^k}{\partial N^k}\left.\left(\sum_{j=n}^{m-1}\sum_{r=n}^{m-1} G_{jr}\chi_{jr} + iv\right)\right|_\Gamma =$$

$$= \sum_{j=n}^{m-1}\sum_{r=n}^{m-1} G_{jr}\left.\frac{\partial^k \chi_{jr}}{\partial N^k}\right|_\Gamma + i\left.\frac{\partial^k v}{\partial N^k}\right|_\Gamma = 0, \qquad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

И ввиду (34)

$$-i\sum_{j=n}^{m-1}\sum_{r=n}^{m-1} G_{jr}\left.\frac{\partial^k v_{jr}}{\partial N^k}\right|_\Gamma + i\left.\frac{\partial^k v}{\partial N^k}\right|_\Gamma = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Окончательно получаем

$$\frac{\partial^k}{\partial N^k}\left.\left(v - \sum_{j,r=n}^{m-1} G_{jr}v_{jr}\right)\right|_\Gamma = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \tag{36}$$

Функции v и v_{kr} удовлетворяют уравнению (17). Воспользовавшись снова единственностью решения задачи Дирихле для n-гармонического уравнения, из (36) находим

$$v \equiv \sum_{j=n}^{m-1}\sum_{r=n}^{m-1} G_{jr}v_{jr}. \tag{37}$$

Подставляя (37) в (16) и учитывая (35), получим

$$u=\sum_{j=n}^{m-1}\sum_{r=n}^{m-1}G_{jr}\chi_{jr}+i\sum_{j=n}^{m-1}\sum_{r=n}^{m-1}G_{jr}v_{jr}=\sum_{j=n}^{m-1}\sum_{r=n}^{m-1}G_{jr}(\chi_{jr}+iv_{jr})=\sum_{j=n}^{m-1}\sum_{r=n}^{m-1}G_{jr}u_{jr},$$

что завершает доказательство теоремы.

ABSTRACT. The paper considers a Dirichlet type boundary value problem for elliptic equation

$$\frac{\partial^{m+n}u}{\partial\bar{z}^m\partial z^n}=0,\quad \frac{\partial u}{\partial\bar{z}}\equiv\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial u}{\partial y}\right),\quad \frac{\partial u}{\partial z}\equiv\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

in a multiply connected domain. The problem is reduced to a Dirichlet problem for n-harmonic equation. An existence theorem is proved.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Е. Товмасян, "Общая граничная задача для эллиптических систем второго порядка с постоянными коэффициентами", Диф. уравнения, т. 2, №. 1/2, 1966.
2. А. В. Бицадзе, Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка, М. Наука, 1966.
3. Н. Е. Товмасян, "Задача типа Дирихле для одного класса неправильно эллиптических уравнений высшего порядка", Известия АН Армении, Математика, т. 27, №. 1, стр. 75 – 85, 1992.
4. И. Н. Векуа, Новые методы решения эллиптических уравнений, М. Гостехиздат, 1948.

8 марта 1994

Государственный инженерный университет Армении