ИЗОСПЕКТРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ ДИРАКА

Т. Н. Арутюнян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
том 29, №2, 1994

В статье дано описание регулярных операторов Дирака с потенциалами из определенного класса, имеющих один и тот же спектр.

§1. ВВЕДЕНИЕ И ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТОВ

Пусть $p(x)$ и $q(x)$ - действительнозначные, суммируемые на $[0,\pi]$ функции, т. е. $p,q \in L^1_{\mathbb{R}}[0,\pi]$. Рассмотрим регулярную краевую задачу для канонической ([1] - [3]) системы Дирака

$$\mathcal{L}y \equiv \left\{B\frac{d}{dx}+\Omega(x)\right\}y = \lambda y, \quad y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbf{C}, \tag{1.1}$$

$$y_1(0)\cos\alpha + y_2(0)\sin\alpha = 0, \quad \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right], \tag{1.2}$$

$$y_1(\pi) = 0, \tag{1.3}$$

где $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\Omega(x) = \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix}$. Для краткости эту задачу будем обозначать (Ω,α). Пользуясь методами [2], [3] нетрудно доказать, что при $p,q \in L^1_{\mathbb{R}}[0,\pi]$ задача (Ω,α) имеет чисто дискретный спектр, состоящий из простых, действительных собственных значений $\lambda_n = \lambda_n(\Omega,\alpha)$, $n \in \mathbb{Z}$, образующих последовательность, неограниченную как сверху, так и снизу. Примем нумерацию $\lambda_k < \lambda_{k+1}, k \in \mathbb{Z}$, $\lambda_k > 0$ при $k > 0$ и $\lambda_k < 0$ при $k < 0$, а через λ_0 обозначим ближайшее к нулю собственное значение (с. з.). Если имеются два наиболее близких к нулю с. з., то через λ_0 будем обозначать то, которое отрицательно. При этой нумерации нетрудно доказать, что асимптотика с. з. имеет вид

$$\lambda_n(\Omega,\alpha) = n - \frac{\alpha}{\pi} + o(1) \quad \text{при} \quad n \to \pm\infty. \tag{1.4}$$

Обозначим через $W^2_{k,\mathbb{R}}[0,\pi]$ $(k = 0, 1, \dots)$ множество вещественнозначных функций, определенных на $[0,\pi]$, имеющих абсолютно непрерывные производные вплоть до порядка $k-1$ и производную порядка k, интегрируемую с квадратом на $[0,\pi]$. В частности, $W^2_{0,\mathbb{R}}[0,\pi] = L^2_{\mathbb{R}}[0,\pi]$. В дальнейшем, для краткости, под $\Omega \in A$ будем понимать $p, q \in A$. Если $\Omega \in W^2_{k,\mathbb{R}}[0,\pi]$, то асимптотику (1.4) можно уточнить (см. [4], [11]) :

$$\lambda_n(\Omega,\alpha) = n - \frac{\alpha}{\pi} + \frac{\alpha_1}{n} + \frac{\alpha_2}{n^2} + \dots + \frac{\alpha_{k-1}}{n^{k-1}} + \frac{\alpha_{k,n}}{n^k}, \tag{1.5}$$

где $\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}$ - постоянные, и $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha^2_{k,n} < \infty$. В частности, при $k = 0$ имеем $\lambda_n(\Omega,\alpha) = n - \dfrac{\alpha}{\pi} + \alpha_{0,n}$. Через $\varphi(x,\lambda,\alpha)$ обозначим решение задачи Коши

$$\mathcal{L}y = \lambda y, \quad y(0) = \begin{pmatrix} \sin\alpha \\ -\cos\alpha \end{pmatrix}, \tag{1.6}$$

а через $a_n = a_n(\Omega,\alpha)$ - квадраты L^2-норм собственных функций $\varphi_n(x,\Omega) = \varphi(x,\lambda_n(\Omega,\alpha),\alpha)$:

$$a_n = ||\varphi_n||^2 = \int_0^\pi |\varphi(x,\lambda_n(\Omega,\alpha),\alpha)|^2\,dx.$$

Числа a_n называются нормировочными постоянными.

Теорема. *(Теорема единственности). Отображение*

$$(\Omega,\alpha) \in L^2_{\mathbb{R}}[0,\pi] \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longmapsto \{\lambda_n(\Omega,\alpha),\, a_n(\Omega,\alpha);\, n \in \mathbb{Z}\}$$

взаимно однозначно.

Эту теорему естественно называть теоремой Марченко, так как ее доказательство можно провести аналогично доказательству подобного утверждения в случае задачи Штурма-Лиувилля [5]. Таким образом, задача (Ω,α) однозначно определяется заданием всех с. з. и нормировочных постоянных, а только спектр, вообще говоря, не определяет задачу однозначно.

Лемма 1. *Пусть* $\Omega, \widetilde{\Omega} \in L^1_{\mathbb{R}}[0,\pi]$ *и* $\lambda_n(\Omega,\alpha) = \lambda_n(\widetilde{\Omega},\widetilde{\alpha})$ *для всех* $n \in \mathbb{Z}$, *т. е. задачи* (Ω,α) *и* $(\widetilde{\Omega},\widetilde{\alpha})$ *изоспектральны. Тогда* $\widetilde{\alpha} = \alpha$.

Доказательство легко следует из асимптотики (1.4) :

$$\frac{\alpha}{\pi} = \lim_{n\to\infty} (n - \lambda_n(\Omega,\alpha)) = \lim_{n\to\infty} \left(n - \lambda_n(\widetilde{\Omega},\widetilde{\alpha})\right) = \frac{\widetilde{\alpha}}{\pi}.$$

Таким образом, вместо "изоспектральные задачи (Ω,α) и $(\widetilde{\Omega},\widetilde{\alpha})$" мы будем говорить об "изоспектральных потенциалах" Ω и $\widetilde{\Omega}$ (и опускать в дальнейшем аргумент α, от которого зависят λ_n и a_n). Зафиксируем $\Omega \in W^2_{k,\mathbb{R}}[0,\pi]$ и рассмотрим множество

$$M^2_k(\Omega) = \left\{\widetilde{\Omega} \in W^2_{k,\mathbb{R}}[0,\pi]: \quad \lambda_n(\widetilde{\Omega}) = \lambda_n(\Omega),\ n \in \mathbb{Z}\right\}$$

всех канонических потенциалов $\widetilde{\Omega} = \begin{pmatrix} \widetilde{p} & \widetilde{q} \\ \widetilde{q} & -\widetilde{p} \end{pmatrix}$, имеющих одинаковый спектр с Ω. Наша цель – дать по возможности явное описание множеств $M^2_k(\Omega)$. Отметим, что задача описания изоспектральных краевых задач Штурма-Лиувилля решена в работах [6 – 8]. Основными результатами настоящей статьи являются приводимые ниже теоремы 1, 2 и 3.

Из теоремы единственности легко вытекает

Следствие 1. *Отображение*

$$\widetilde{\Omega} \in M^2_k(\Omega) \longmapsto \left\{a_n(\widetilde{\Omega});\ n \in \mathbb{Z}\right\}$$

взаимно однозначно.

Как известно (см. [4]), если $\Omega \in W^2_{k,\mathbb{R}}[0,\pi]$, то нормировочные постоянные имеют асимптотику

$$a_n(\Omega) = \pi + \frac{c_1}{n} + \frac{c_2}{n^2} + \ldots + \frac{c_{k-1}}{n^{k-1}} + \frac{c_{k,n}}{n^k}, \tag{1.7}$$

где $c_1, \ldots, c_{k-1}$ – постоянные, и $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c^2_{k,n} < \infty$. Поскольку $\widetilde{\Omega} \in M^2_k(\Omega)$, то аналогичную асимптотику имеют и $a_n(\widetilde{\Omega})$. Так как $a_n(\Omega)$ и $a_n(\widetilde{\Omega})$ – положительные числа, то существуют действительные числа t_n, такие что $\dfrac{a_n(\Omega)}{a_n(\tilde{\Omega})} = e^{t_n}$. Отсюда и из (1.7) следует, что

$$e^{t_n} = 1 + \frac{d_1}{n} + \frac{d_2}{n^2} + \ldots + \frac{d_{k-1}}{n^{k-1}} + \frac{d_{k,n}}{n^k}, \quad \text{где} \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_{k,n}^2 < \infty. \tag{1.8}$$

Через P_k обозначим множество всех последовательностей $\{t_n;\, n \in \mathbb{Z}\}$, $t_n \in \mathbb{R}$, имеющих асимптотику (1.8). Поскольку $a_n(\Omega)$ фиксированы, из следствия 1 и равенства $a_n(\tilde{\Omega}) = a_n(\Omega)\, e^{-t_n}$ получим

Следствие 2. *Отображение*

$$\tilde{\Omega} \in M_k^2(\Omega) \longmapsto \{t_n;\, n \in \mathbb{Z}\} \in P_k \tag{1.9}$$

взаимно однозначно.

Сначала мы дадим описание семейства изоспектральных потенциалов $\Omega(x,t)$, $t \in \mathbb{R}$, у которых лишь одна нормировочная постоянная $a_m(\Omega(\cdot,t))$ отличается от $a_m(\Omega)$ (а именно, $a_m(\Omega(\cdot,t)) = a_m(\Omega)\, e^{-t_n}$), а остальные совпадают, т. е. $a_n(\Omega(\cdot,t)) = a_n(\Omega)$ при $n \neq m$.

Введем некоторые обозначения. Через

$$h_n(x,\Omega) = \frac{\varphi_n(x,\Omega)}{\sqrt{a_n(\Omega)}} = \begin{pmatrix} h_{n,1} \\ h_{n,2} \end{pmatrix}$$

обозначим нормированные собственные функции, т. е. $||h_n(x,\Omega)|| = 1$. Положим также $l(\Omega) = \{l_n(\Omega) :\ n \in \mathbb{Z}\}$, где

$$l_n(\Omega) = \ln \frac{|h_n(\pi,\Omega)|}{|h_n(0,\Omega)|} = \ln |\varphi_{n,2}(\pi,\Omega)|, \tag{1.10}$$

и

$$\theta_n(x,t,\Omega) = 1 + (e^t - 1) \int_0^x |h_n(s,\Omega)|^2\, ds. \tag{1.11}$$

Заметим, (см. лемму 2 в §3), что при $\Omega \in W_{k,\mathbb{R}}^2[0,\pi]$ имеем $l(\Omega) \in P_k$. Норму $|A|$ квадратной матрицы $(a_{i,j})$ определяем как $|A| = \sqrt{\lambda_{\max}(A^*A)}$, где $\lambda_{\max}(A^*A)$ – наибольшее собственное значение положительной матрицы A^*A, а A^* сопряженная к A матрица [9]. В силу самосопряженности дифференциального выражения $\mathcal{L}$, компоненты $h_{n,1}$ и $h_{n,2}$ решений можно выбирать действительными.

Теорема 1 *Пусть $t \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ и*

$$\Omega(x,t) = \Omega(x) + \frac{e^t - 1}{\theta_m(x,t,\Omega)} \left\{ B h_m(x,\Omega)\, h_m^*(x,\Omega) - h_m(x,\Omega)\, h_m^*(x,\Omega) B \right\}. \quad (1.12)$$

Тогда :

1) $\lambda_n(\Omega(\cdot,t)) = \lambda_n(\Omega)$ для любого $n \in \mathbb{Z}$, $a_n(\Omega(\cdot,t)) = a_n(\Omega)$ для любого $n \in \mathbb{Z} \setminus \{m\}$, и $a_m(\Omega(\cdot,t)) = a_m(\Omega) \cdot e^{-t}$. Кроме того, нормированные собственные функции задачи $(\Omega(\cdot,t),\alpha)$ определяются по формулам :

$$h_n(x,\Omega(\cdot,t)) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\frac{t}{2}}}{\theta_m(x,t,\Omega)} h_m(x,\Omega), & \text{при } n = m \\ h_n(x,\Omega) - \dfrac{(e^t - 1)\int_0^x h_m^*(s,\Omega) h_n(s,\Omega)\, ds}{\theta_m(x,t,\Omega)} h_m(x,\Omega), & \text{при } n \neq m; \end{cases} \quad (1.13)$$

2)

$$l_n(\Omega(\cdot,t)) = \begin{cases} l_n(\Omega) - t, & \text{если} \quad n = m \\ l_n(\Omega), & \text{если} \quad n \neq m; \end{cases} \quad (1.14)$$

3)

$$\int_0^\pi |\Omega(x,t) - \Omega(x)|\, dx = |t|. \quad (1.15)$$

Теорема 1 показывает, что возможно изменить ровно одну нормировочную постоянную (или ровно один элемент последовательности $l(\Omega)$), не изменяя остальных. Последовательно меняя все нормировочные постоянные $a_n(\Omega)$ на $a_n(\Omega)e^{-t_n}$, мы можем получить любой изоспектральный потенциал, соответствующий последовательности $\{t_n;\ n \in \mathbb{Z}\} \in P_k$.

Из теоремы единственности следует, что неважно в какой последовательности меняем нормировочные постоянные. Поэтому условимся их менять в удобной последовательности. Мы будем пользоваться следующими обозначениями :

$$
\begin{aligned}
&T_{-1} = \{0\},\\
&T_0 = (\dots,0,\dots,0,t_0,0,\dots,0,\dots),\\
&T_1 = (\dots,0,\dots,0,0,t_0,t_1,0,\dots,0,\dots),\\
&T_2 = (\dots,0,\dots,0,t_{-1},t_0,t_1,0,\dots,0,\dots),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&T_{2n-1} = (\dots,0,0,t_{-n+1},\dots,t_{-1},t_0,t_1,\dots,t_{n-1},t_n,0,\dots),\\
&T_{2n} = (\dots,0,t_{-n},t_{-n+1},\dots,t_{-1},t_0,t_1,\dots,t_{n-1},t_n,0,\dots),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
$$

Положим $\Omega(x,T_{-1}) \equiv \Omega(x)$ и

$$\Omega(x,T_m) = \Omega(x,T_{m-1}) + \Delta\Omega(x,T_m), \quad m = 0,1,\dots, \tag{1.16}$$

где

$$\Delta\Omega(x,T_m) = \frac{e^{t_{\tilde m}} - 1}{\theta_m(x,t_{\tilde m},\Omega(\cdot,T_{m-1}))} \left[Bh_{\tilde m}(x,\Omega(\cdot,T_{m-1}))\cdot h^*_{\tilde m}(\cdot) - h_{\tilde m}(\cdot)h^*_{\tilde m}(\cdot)B\right]. \tag{1.17}$$

В (1.17) аргументы у всех $h_{\tilde m}$ и $h^*_{\tilde m}$ такие же, как у первого из них, причем $\tilde m = \dfrac{m+1}{2}$ при нечетном m, и $\tilde m = -\dfrac{m}{2}$ при четном m.

Теорема 2. *Пусть $T = \{t_n;\ n \in \mathbb{Z}\} \in P_k$ и $\Omega \in W^2_{k,\mathbb{R}}[0,\pi]$. Тогда*

1)
$$\Omega(x,T) \equiv \Omega(x) + \sum_{m=0}^{\infty} \Delta\Omega(x,T_m) \in M^2_k(\Omega) \tag{1.18}$$

и

$$l(\Omega(\cdot,T)) = l(\Omega) - T. \tag{1.19}$$

2) *Отображение (1.18) $T \longmapsto \Omega(\cdot,T)$ взаимно однозначно, причем, если $\tilde\Omega \in$ $\in M^2_k(\Omega)$, то*

$$\tilde\Omega = \Omega(\cdot, l(\Omega) - l(\tilde\Omega)), \tag{1.20}$$

т. е. отображение $M_k^2(\Omega) \ni \tilde{\Omega} \longmapsto l(\Omega) - l(\tilde{\Omega}) \in P_k$ *есть обратное к отображению (1.18).*

Теорема 2 дает описание всех изоспектральных потенциалов в терминах нормированных собственных функций h_n потенциала Ω и последовательностей $T \in P_k$. Из теоремы 2 можно заключить, что в треореме единственности Марченко можно заменить $a_n(\Omega)$ на $l_n(\Omega)$. Тем самым, имеет место следуюшая теорема единственности.

Теорема 3. *Отображение* $\Omega \in L^2_{\mathbb{R}}[0,\pi] \longmapsto \{\lambda_n(\Omega), l_n(\Omega); n \in \mathbb{Z}\}$ *взаимно однозначно.*

Доказательство. Пусть $\lambda_n(\Omega_1) = \lambda_n(\Omega_2)$ и $l_n(\Omega_1) = l_n(\Omega_2)$ для всех $n \in \mathbb{Z}$. Отсюда следует, что $\Omega_2 \in M_0^2(\Omega_1)$. Обозначим $e^{t_n} = \dfrac{a_n(\Omega_1)}{a_n(\Omega_2)}$. Согласно (1.19) $l(\Omega_2) = l(\Omega_1) - T$ и, следовательно, $T = \{0\}$, т. е. $t_n = 0$ для всех $n \in \mathbb{Z}$. Таким образом, $a_n(\Omega_1) = a_n(\Omega_2)$, и по теореме Марченко $\Omega_1(x) = \Omega_2(x)$ почти всюду.

Замечание. В гильбертовом пространстве $L^2(0,\pi;\mathbf{C}^2)$ двукомпонентных комплекснозначных вектор-функций $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ с $||y||^2 = \int_0^\pi \left(|y_1(x)|^2 + |y_2(x)|^2\right) dx = \int_0^\pi |y(x)|^2\, dx < \infty$ рассмотрим самосопряженный оператор $L(\Omega, \alpha)$, заданный дифференциальным выражением $\mathcal{L} = B\dfrac{d}{dx} + \Omega(x)$ в области

$$D_L = \left\{ y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} : \quad y_k \in AC[0,\pi],\ (\mathcal{L}y)_k \in L^2[0,\pi],\ k = 1,2; \right.$$
$$\left. y_1(0)\cos\alpha + y_2(0)\sin\alpha = 0, \quad y_1(\pi) = 0 \right\},$$

где $AC[0,\pi]$ – множество абсолютно непрерывных функций на $[0,\pi]$. Так как собственные значения, нормировочные постоянные и другие спектральные данные оператора $L(\Omega,\alpha)$ и задачи (1.1) - (1.3) совпадают, все результаты настоящей статьи могут быть переформулированы в терминах оператора $L(\Omega,\alpha)$.

§2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Во-первых, докажем равенство (1.15). Вычислив из (1.12) элементы матрицы $\Omega(x,t)-\Omega(x)=\begin{pmatrix}\Delta p & \Delta q\\ \Delta q & -\Delta p\end{pmatrix}$, получаем :

$$\Delta p=\frac{e^t-1}{\theta_m(x,t,\Omega)}\cdot 2h_{m1}(x)\,h_{m2}(x) \quad \text{и} \quad \Delta q=\frac{e^t-1}{\theta_m(x,t,\Omega)}\cdot\left(h_{m2}^2(x)-h_{m1}^2(x)\right).$$

Отсюда следует, что

$$|\Omega(x,t)-\Omega(x)|=\sqrt{\Delta p^2+\Delta q^2}=\frac{|e^t-1|}{\theta_m(x,t,\Omega)}|h_m(x)|^2=(\operatorname{sign}t)\cdot\frac{\partial}{\partial x}\ln\theta_m(x,t,\Omega).$$

Тем самым

$$\int_0^\pi|\Omega(x,t)-\Omega(x)|\,dx=(\operatorname{sign}t)\,(\ln\theta_m(\pi,t,\Omega)-\ln\theta_m(0,t,\Omega))=(\operatorname{sign}t)\cdot t=|t|.$$

Докажем теперь, что для любых $t\in\mathbb{R}$ и $n\in\mathbb{Z}$ имеют место тождества (здесь для краткости обозначаем $h_n(x,\Omega(\cdot,t))=h_n(x,t)$) :

$$\tilde{\mathcal{L}}h_n(x,t)\equiv\lambda_n(\Omega)\,h_n(x,t), \tag{2.1}$$

$$h_{n1}(0,t)\cos\alpha+h_{n2}(0,t)\sin\alpha\equiv 0,\quad h_{n1}(\pi,t)\equiv 0, \tag{2.2}$$

где $\tilde{\mathcal{L}}=B\dfrac{d}{dx}+\Omega(x,t)$. Отсюда в частности будет следовать, что все $\lambda_n(\Omega)$, $n\in\mathbb{Z}$ являются также собственными значениями задачи $(\Omega(\cdot,t),\alpha)$. Так как из (1.15) следует, что $\Omega(\cdot,t)\in L^1_{\mathbb{R}}[0,\pi]$, то у задачи $(\Omega(\cdot,t),\alpha)$ не может быть иных собственных значений, ибо, в противном случае, была бы нарушена асимптотика (1.4). Таким образом, будет доказано, что $\Omega(\cdot,t)$ и Ω изоспектральны при любом $t\in\mathbb{R}$. Сначала докажем (2.1) при $n=m$ (для краткости $\theta_m(x,t,\Omega)=\theta$, $h_n(x,\Omega)=h_n(x)=h_n$) :

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{L}}h_m(x,t)&=\left\{B\frac{d}{dx}+\Omega(x)+\frac{e^t-1}{\theta}\left(Bh_m\cdot h_m^*-h_m\cdot h_m^*B\right)\right\}\cdot\frac{e^{\frac{t}{2}}}{\theta}h_m=\\&=\frac{e^{\frac{t}{2}}}{\theta}\left[Bh_m'+\Omega(x)h_m\right]+\\&+\frac{e^{\frac{t}{2}}}{\theta}\left[-\frac{\theta'}{\theta}Bh_m+\frac{(e^t-1)|h_m|^2}{\theta}Bh_m-\frac{(e^t-1)}{\theta}h_m\cdot h_m^*Bh_m\right].\end{aligned}$$

Из определения (1.11) следует, что $\theta' = (e^t - 1)|h_m(x)|^2$. Очевидно также, что $h_m^* B h_m = 0$. Учитывая эти равенства и то, что $Bh_m' + \Omega(x)h_m = \lambda_m(\Omega)h_m$, получаем тождество (2.1) при $n = m$. Пусть теперь $n \neq m$. Тогда

$$\tilde{\mathcal{L}}h_n(x,t) = Bh_n' + \Omega(x)h_n - \frac{(e^t-1)}{\theta}\left\{(h_m^* h_n)\cdot Bh_m - \right.$$

$$\left. - Bh_m(h_m^* \cdot h_m) + h_m h_m^* B h_n + \int_0^x h_m^* \cdot h_n \, ds (Bh_m' + \Omega(x)h_m)\right\} =$$

$$= \lambda_n(\Omega)h_n - \frac{(e^t-1)}{\theta}\left\{h_m^* B h_n + \lambda_m \int_0^x h_m^* h_n \, ds\right\} h_m.$$

Чтобы отсюда получить тождество (2.1), достаточно показать, что

$$h_m^* B h_n + \lambda_m \int_0^x h_m^*(s)h_n(s)\,ds = \lambda_n \int_0^x h_m^*(s)h_n(s)\,ds. \tag{2.3}$$

Для этого запишем

$$Bh_n'(s) + \Omega(s)h_n(s) = \lambda_n h_n(s), \tag{2.4}$$

$$(Bh_m'(s))^* + (\Omega(s)h_m(s))^* = \lambda_m h_m^*(s). \tag{2.5}$$

Умножим (2.4) слева на $h_m^*(s)$, а (2.5) – справа на $h_n(s)$ и вычтем из первого равенства второе. Учитывая, что $h_m^*\Omega h_n = (\Omega h_m)^* \cdot h_n$, получаем

$$h_m^*(s)Bh_n'(s) - (Bh_m'(s))^* \cdot h_n(s) = (\lambda_n - \lambda_m)\, h_m^*(s)h_n(s).$$

Проинтегрировав это тождество от 0 до x, получим (2.3). То, что $h_n(x, \Omega(\cdot,t))$ удовлетворяет краевым условиям (2.2), следует из (1.13). Остается проверить нормированность собственных функций (1.13). Пусть $n = m$, тогда

$$\int_0^\pi |h_m(x,\Omega(\cdot,t))|^2\,dx = e^t \int_0^\pi \frac{|h_m(x)|^2}{\left(1 + (e^t-1)\int_0^x |h_m(s)|^2\,ds\right)^2}\,dx = -\frac{e^t}{e^t-1}\times$$

$$\times \int_0^\pi \left(\frac{d}{dx}\theta^{-1}\right)dx = -\frac{e^t}{e^t-1}\left(\frac{1}{\theta(\pi,t)} - \frac{1}{\theta(0,t)}\right) = -\frac{e^t}{e^t-1}\left(\frac{1}{e^t} - 1\right) = 1.$$

Пусть теперь $n \neq m$. Обозначив $H_{mn}(x) = \int_0^x h_m^*(s)h_n(s)\,ds$ и заметив, что $H_{mn}'(x) = h_m^*(x)h_n(x)$, получим :

$$|h_n(x,\Omega(\cdot,t))|^2 = h_n^*(x,\Omega(\cdot,t))\cdot h_n(x,\Omega(\cdot,t)) = |h_n(x)|^2 - \frac{2(e^t-1)}{\theta}H_{mn}\cdot h_m^* \cdot h_n$$

$$+ \frac{(e^t-1)^2}{\theta^2}H_{mn}^2 \cdot |h_m|^2 = |h_n(x)|^2 - (e^t-1)\left(\frac{H_{mn}^2}{\theta}\right)'.$$

Так как $H_{mn}(\pi) = H_{mn}(0) = 0$, то

$$\int_0^\pi |h_n(x, \Omega(\cdot, t))|^2\, dx = \int_0^\pi |h_n(x)|^2\, dx - (e^t - 1)\left(\frac{H_{mn}^2(\pi)}{\theta(\pi, t)} - \frac{H_{mn}^2(0)}{\theta(0, t)}\right) = 1.$$

Для доказательства (1.14) заметим, что, как следует из (1.13), при $n \neq m$ имеем $h_n(\pi, \Omega(\cdot, t)) = h_n(\pi, \Omega)$ и $h_n(0, \Omega(\cdot, t)) = h_n(0, \Omega)$. Отсюда вытекает, что $l_n(\Omega(\cdot, t)) = l_n(\Omega)$, а при $n = m$ — $h_m(\pi, \Omega(\cdot, t)) = e^{-\frac{t}{2}} h_m(\pi, \Omega)$ и $h_m(0, \Omega(\cdot, t)) = e^{\frac{t}{2}} h_m(0, \Omega)$. Таким образом, получаем

$$l_m(\Omega(\cdot, t)) = \ln\left(e^{-t}\frac{|h_m(\pi, \Omega)|}{|h_m(0, \Omega)|}\right) = l_m(\Omega) - t.$$

Теорема 1 доказана.

§3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2

1) Пусть в теореме 1 $t = t_0$. Тогда, исходя из начального потенциала $\Omega(x) = \Omega(x, T_{-1})$, по формуле (1.12) получим изоспектральный потенциал $\Omega(x, T_0)$. Исходя из $\Omega(x, T_0)$, совершенно аналогично, по формуле (1.16) получим потенциал $\Omega(x, T_1)$, у которого две нормировочные постоянные, а именно $a_0(\Omega(T_1)) = a_0(\Omega(T_0)) = a_0(\Omega)e^{-t_0}$ и $a_1(\Omega(T_1)) = a_1(\Omega(T_0))e^{-t_1} = a_1(\Omega)e^{-t_1}$ отличаются от нормировочных постоянных Ω. По индукции, исходя из потенциала $\Omega(T_{m-1})$, по формулам (1.16) и (1.17) получим изоспектральный потенциал $\Omega(T_m)$, у которого уже $m+1$ нормировочных постоянных отличаются от нормировочных постоянных Ω. Продолжая этот процесс до бесконечности ($T_m \to T$ при $m \to \infty$), мы придем к потенциалу $\Omega(x, T)$ (см. (1.18)), имеющему спектральные данные $\{\lambda_n(\Omega);\ a_n(\Omega(T)) = a_n(\Omega)e^{-t_n};\ n \in \mathbb{Z}\}$. Чтобы доказать, что $\Omega(\cdot, T) \in M_k^2(\Omega)$, остается показать, что $\Omega(\cdot, T) \in W_{k,\mathbb{R}}^2[0, \pi]$. Для этого, во-первых заметим, что из $\Omega \in W_{k,\mathbb{R}}^2[0, \pi]$ следует, что $a_n(\Omega)$ имеют асимптотику (1.7), а так как $T \in P_k$, то $a_n(\Omega(T)) = a_n(\Omega)e^{-t_n}$ имеют ту же асимптотику. Во-вторых, воспользуемся следующим результатом М. Г. Гасымова и Т. Т. Джабиева.

Теорема. *([4]). Для того, чтобы последовательности* $\{\lambda_n\}_{-\infty}^{\infty}$ *и* $\{a_n\}_{-\infty}^{\infty}$ *были, соответственно, собственными значениями и нормировочными постоянными красвой задачи вида (1.1) – (1.3) с потенциалом* Ω *вида* $\begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix}$, *где* $p, q \in W_{k,\mathbb{R}}^2[0,\pi]$, *необходимо и достаточно чтобы выполнялись асимптотические формулы (1.5) и (1.7) соответственно,* $\lambda_n \neq \lambda_m$ *при* $n \neq m$, *все* $a_n > 0$, *и чтобы все производные порядка* k *элементов матрицы-функции*

$$F(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{a_n} \varphi_0(x,\lambda_n)\varphi_0^*(t,\lambda_n) - \frac{1}{\pi}\varphi_0(x,\lambda_n^0)\varphi_0^*(t,\lambda_n^0) \right\},$$

где $\varphi_0(x,\lambda) = \begin{pmatrix} \sin(\lambda x + \alpha) \\ -\cos(\lambda x + \alpha) \end{pmatrix}$, $\lambda_n^0 = n - \frac{\alpha}{\pi}$, *принадлежали* $L_{\mathbb{R}}^2([0,\pi]\times[0,\pi])$.

Так как справедливы асимтотические формулы (1.5) и (1.7), то из этой теоремы следует, что $\Omega(\cdot,T) \in W_{k,\mathbb{R}}^2[0,\pi]$ (утверждение о $F(x,t)$ проверяется так же как в [4]). Равенство $l(\Omega(\cdot,T)) = l(\Omega) - T$ доказывается по индукции, путем повторения рассуждений, приведенных при доказательстве (1.14) в теореме 1. Таким образом, первое утверждение теоремы 2 доказано.

Как известно (см. [1], [3], [10], [11]), существует оператор преобразования $I + \mathbf{K}$, представляющий решение $\varphi(x,\lambda,\alpha)$ задачи Коши (1.6) в виде

$$\varphi(x,\lambda,\alpha) = \varphi_0(x,\lambda,\alpha) + \int_0^x K(x,t)\varphi_0(t,\lambda,\alpha)\,dt,$$

через $\varphi_0(x,\lambda,\alpha) = \begin{pmatrix} \sin(\lambda x + \alpha) \\ -\cos(\lambda x + \alpha) \end{pmatrix}$ и матрицу $K(x,t)$. При этом, если $\Omega \in$ $\in L_{\mathbb{R}}^1[0,\pi]$, то $K(x,\cdot) \in L_{\mathbb{R}}^1(0,x)$, а если $\Omega \in W_{k,\mathbb{R}}^2[0,\pi]$, то $K(x,\cdot) \in W_{k,\mathbb{R}}^2(0,x)$ для любого $0 < x \leq \pi$.

Лемма 2. *Если* $\Omega \in W_{k,\mathbb{R}}^2[0,\pi]$, *то* $\{l_n(\Omega)\} \in P_k$.

Доказательство следует из представления

$$\varphi_2(\pi,\lambda_n,\alpha) = -\cos(\lambda_n\pi + \alpha) +$$
$$+ \int_0^\pi [K_{21}(\pi,t)\sin(\lambda_n t + \alpha) - K_{22}(\pi,t)\cos(\lambda_n t + \alpha)]\,dt,$$

если использовать асимптотику собственных значений (1.5) и проинтегрировать последний интеграл k раз по частям.

Докажем 2). Согласно следствию 2, каждому $\tilde{\Omega} \in M_k^2(\Omega)$ соответствует некоторая последовательность $\tilde{T} \in P_k$ такая что $a_n(\tilde{\Omega}) = a_n(\Omega)e^{-\tilde{t}_n}$. Построим по этой $\tilde{T}$, по формуле (1.18), потенциал $\Omega(\cdot, \tilde{T})$. Согласно (1.19), по лемме 2, $l(\Omega(\cdot, \tilde{T})) = l(\Omega) - \tilde{T} \in P_k$. Очевидно также, что $a_n(\Omega(\cdot, \tilde{T})) = a_n(\Omega)e^{-\tilde{t}_n} = a_n(\tilde{\Omega})$. Отсюда, по теореме единственности, $\tilde{\Omega}(x) = \Omega(x, \tilde{T})$ почти всюду. Следовательно, $l(\tilde{\Omega}) = l(\Omega(\cdot, \tilde{T})) = l(\Omega) - \tilde{T}$, и $\tilde{T} = l(\Omega) - l(\tilde{\Omega})$. Теорема 2 доказана.

ABSTRACT. The paper gives a description of all regular selfadjoint Dirac operators, which have the same spectrum.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Г. Гасымов, Б. М. Левитан, "Обратная задача для системы Дирака", ДАН СССР, т. 167, №5, стр. 967 – 970, 1966.
2. Б. М. Левитан, И. С. Саргсян, Введение в спектральную теорию, М. Наука, 1970.
3. В. А. Марченко, Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения, Киев, Наукова Думка, 1977.
4. М. Г. Гасымов, Т. Т. Джабиев, "Определение системы дифференциальных уравнений Дирака по двум спектрам", Труды летней школы по спектральной теории операторов и теории представления групп, Баку, Элм, стр. 46 – 71, 1975.
5. В. А. Марченко, "Некоторые вопросы теории одномерных линейных дифференциальных операторов второго порядка", Труды ММО, т. 1, 1951.
6. E. L. Isaacson, E. Trubowitz, "The inverse Sturm–Liouville Problem, I," Communications on Pure and Applied Math., vol. 36, no. 6, pp. 767 – 784, 1983.
7. E. L. Isaacson, H. P. McKean, E. Trubowitz, "The inverse Sturm–Liouville Problem, II," Communications on Pure and Applied Math., vol. 37, no. 1, pp. 1 12, 1984.
8. B. E. Dahlberg, E. Trubowitz, "The inverse Sturm–Liouville Problem, III," Communications on Pure and Applied Math., vol. 37, no. 2, pp. 255 – 268, 1984.
9. Ф. Р. Гантмахер, Теория матриц, М., Наука, 1967.
10. Т. В. Мисюра, "Характеристика спектров периодической и антипериодичской краевых задач, порождаемых операцией Дирака", I, Теория функций, функциональный анализ и их приложения, Вып. 30, Харьков, стр. 90 - 101, 1978.
11. Т. В. Мисюра, "Характеристика спектров периодической и антипериодической краевых задач, порождаемых операцией Дирака", II, Теория функций, функциональный анализ и их приложения, Вып. 31, Харьков, стр. 102 109, 1979.

1 Марта 1994

Ереванский государственный университет