О НУЛЬ-РЯДАХ ПО ДВОЙНОЙ СИСТЕМЕ УОЛША

К. А. Навасардян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
Том 29, №1, 1994

В работе доказано, что для положительных чисел ε_{mn}, удовлетворяющих условиям $\varepsilon_{m+1,n} \le \varepsilon_{mn} \le \varepsilon_{m,n-1}$, $\sum_{m,n=0}^{\infty} \varepsilon_{mn}^2 = +\infty$, существует нуль-ряд по системе Уолша $\sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn} W_m(x) W_n(y)$, с коэффициентами $|a_{mn}| \le \varepsilon_{mn}$. Если $\sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_{mo}^2 < +\infty$ и $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_{on}^2 < +\infty$, то существует множество $E \subset [0,1]^2$ меры нуль, удовлетворяющее условиям :

1. Существует ряд $\sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn} W_m(x) W_n(y)$, сходящийся к нулю вне E, с коэффициентами $|a_{mn}| \le \varepsilon_{mn}$ и $a_{oo} \ne 0$;

2. Если ряд $\sum_{m,n=0}^{\infty} b_{mn} W_m(x) W_n(y)$ сходится к нулю вне E и $b_{mn} = o(\varepsilon_{mn})$, то $b_{mn} = 0$ для всех m и n.

Пусть $\{\varphi_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ - произвольная ортонормированная система. Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(t)$ называется нуль-рядом по этой системе, если $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(t) = 0$ почти всюду и $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| > 0$.

Первый пример тригонометрического нуль-ряда был построен Д. Е. Меньшовым в 1916 (см. [1]). В работах разных авторов (см. [2] – [9]) была исследована скорость стремления к нулю коэффициентов тригонометрических нуль-рядов. Наиболее сильным результатом является следующая (см. [2], [3], [7])

Теорема А. *Пусть* $c_n \downarrow 0$ *и* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 = +\infty$. *Тогда существует ряд* $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{int}$, *сходящийся к нулю почти всюду так, что* $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |a_n| > 0$ *и* $|a_n| \le c_{|n|}$.

Эта теорема дает положительный ответ на соответствующую проблему, поставленную П. Л. Ульяновым (см. [10]). Подобные вопросы для систем Хаара и Уолша были рассмотрены в работах [11] – [13]. В [3] Ф. Г. Арутюняном отмечено, что результат, аналогичный Теореме А, можно получить для системы

Уолша. В связи с вышесказанным Г. Г. Геворкян рассмотрел следующую задачу (см. [14]) : Для заданной последовательности $\varepsilon_n \downarrow 0$, удовлетворяющей условию $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n^2 = +\infty$, построить множество $E \subset [0, 2\pi]$, $\mu E = 0$ (μ – лебегова мера) со следующими свойствами :

1. Существует ряд $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{int}$, который сходится к нулю всюду вне E, а его коэффициенты удовлетворяют условиям $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |a_n| > 0$ и $|a_n| \le \varepsilon_{|n|}$;

2. Если $b_n = o(\varepsilon_{|n|})$ и $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n e^{int} = 0$ всюду вне E, то $b_{mn} = 0$ для всех n.

В том случае, когда последовательность $\{\varepsilon_n\}$ удовлетворяет условию $\limsup_{n\to\infty} \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{2n}} < \sqrt{2}$, решение этой задачи получено в [14]. Для системы Уолша $\{W_n(t)\}$ доказан следующий результат (см. [14]).

Теорема В. *Пусть* $\varepsilon_n \downarrow 0$ *и* $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n^2 = +\infty$. *Тогда существует множество* $E \subset [0, 1]$, $\mu E = 0$, *такое, что :*

1. Существует ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n W_n(t)$ *с коэффициентами* $|a_n| \le \varepsilon_{|n|}$, $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| > 0$, *сходящийся к нулю всюду вне* E *;*

2. Если $b_n = o(\varepsilon_n)$ *и ряд* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n W_n(t)$ *сходится к нулю всюду вне* E, *за исключением некоторого счетного множества, то* $b_n = 0$ *для всех* n.

В настоящей работе рассматривается тот же вопрос для двойных рядов Уолша и доказан полный аналог Теоремы А :

Теорема 1. *Пусть* $\{\varepsilon_{mn}\}$ *– двойная последовательность, удовлетворяющая следующим условиям :* $0 \le \varepsilon_{m+1,n} \le \varepsilon_{mn} \le \varepsilon_{m,n-1}$ *и* $\sum_{m,n=0}^{\infty} \varepsilon_{mn}^2 = +\infty$. *Тогда существует двойной ряд по системе Уолша с коэффициентами* $|a_{mn}| \le \varepsilon_{mn}$, $\sum_{m,n=0}^{\infty} |a_n| > 0$, *который сходится к нулю почти всюду.*

Здесь и ниже под сходимостью двойных рядов мы понимаем сходимость прямоугольных частичных сумм : скажем, что двойной ряд $\sum_{m,n=0}^{\infty} \alpha_{mn}$ сходится к числу A, если для любого положительного $\varepsilon > 0$ существует натуральное M такое, что из $\min\{p, q\} > M$ следует, что $|\sum_{m=0}^{p} \sum_{n=0}^{q} \alpha_{mn} - A| < \varepsilon$. Обозначение $b_{mn} = o(\varepsilon_{mn})$ означает, что для любого $\epsilon > 0$ существует натуральное M такое, что из $\min\{p, q\} > M$ следует $|b_{mn}| \le \varepsilon \cdot \varepsilon_{mn}$.

При некоторых дополнительных условиях на последовательность $\{\varepsilon_{mn}\}$ можно доказать аналог Теоремы В.

Теорема 2. *Пусть $\{\varepsilon_{mn}\}$ – двойная последовательность, удовлетворяющая условиям* $0 < \varepsilon_{m+1,n} \leq \varepsilon_{mn} \leq \varepsilon_{m,n-1}$, $\sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_{m0}^2 < +\infty$, $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_{0n}^2 < +\infty$, $\sum_{m,n=0}^{\infty} \varepsilon_{mn}^2 = +\infty$ *и* $2^{m+n}\varepsilon_{2^m 2^n}^2 \to 0$. *Тогда существует множество* $E \subset [0,1]^2$, $\mu E = 0$, *такое, что :*

1. Существует двойной ряд по системе Уолша с коэффициентами $|a_{mn}| \leq \leq \varepsilon_{mn}$, $\sum_{m,n=0}^{\infty} |a_{mn}| > 0$, *который сходится к нулю всюду вне* E.

2. Если $b_{mn} = o(\varepsilon_{mn})$, *и существуют последовательности натуральных чисел* $\{g_k\}_{k=0}^{\infty}$ *и* $\{h_k\}_{k=0}^{\infty}$, *стремящиеся к бесконечности, такие, что суммы*

$$\sum_{m=0}^{M}\sum_{n=0}^{N} b_{mn} W_m(x) W_n(y), \quad M = 2^{g_k} - 1, \quad N = 2^{h_k} - 1$$

сходятся к нулю вне E, *за исключением некоторого счетного множества отрезков, параллельных координатным осям. Тогда* $b_{nm} = 0$ *для всех* m *и* n.

При доказательстве этих теорем мы пользуемся также системой Хаара. Напомним, что функции Хаара определяются следующим образом : $\chi_0^{(0)}(t) \equiv 1$, а для $n = 0, 1, \ldots,\ k = 1, 2, \ldots, 2^n$

$$\chi_n^{(k)}(t) = \begin{cases} 2^{\frac{n}{2}}, & \text{если } t \in \left(\frac{k-1}{2^n}, \frac{2k-1}{2^{n+1}}\right) \\ -2^{\frac{n}{2}}, & \text{если } t \in \left(\frac{2k-1}{2^{n+1}}, \frac{k}{2^n}\right) \\ 0, & \text{если } t \notin \left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right]. \end{cases}$$

В остальных точках функции Хаара определяются как полусумма левосторонних и правосторонних пределов.

Функции системы Уолша выражаются функциями системы Хаара следующим образом (см. [15]) : $W_0^{(0)}(t) = \chi_0^{(0)}(t)$, и для $n = 0, 1, 2, \ldots$ и $1 \leq m \leq 2^n$

$$W_n^{(m)}(t) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}} \sum_{k=1}^{2^n} \varepsilon_{k,m}^{(n)} \cdot \chi_n^{(k)}(t),$$

где $\varepsilon_{k,m}^{(n)} = \pm 1$. Числа $\varepsilon_{k,m}^{(n)}$ можно определить по индукции. Положим $\varepsilon_{1,1}^{(0)} = 1$ и допустим, что числа $\{\varepsilon_{k,m}^{(n)}\}_{k,m=1}^{2^n}$ уже определены. Положим

$$\varepsilon_{2k-1,m}^{(n+1)} = \varepsilon_{k,m}^{(n)}, \quad \varepsilon_{2k-1,2^n+m}^{(n+1)} = \varepsilon_{k,m}^{(n)}, \quad k, m = 1, 2, \ldots, 2^n, \tag{1}$$

$$\varepsilon_{2k,m}^{(n+1)} = \varepsilon_{k,m}^{(n)}, \quad \varepsilon_{2k,2^n+m}^{(n+1)} = -\varepsilon_{k,m}^{(n)}, \quad k, m = 1, 2, \ldots, 2^n. \tag{2}$$

Матрица $K_n = ||\varepsilon_{k,m}^{(n)}||_{k,m=1}^{2^n}$ называется матрицей Качмажа. Известно, что матрица K_n симметрична и ортогональна и

$$\chi_n^{(k)}(t) = \frac{1}{2^{n/2}} \sum_{m=1}^{2^n} \varepsilon_{k,m}^{(n)} W_n^{(m)}(t). \tag{3}$$

Систему Уолша принято нумеровать одним индексом. Если $n = 2^k + m - 1$, $k = 0, 1, \ldots, 1 \le m \le 2^k$, то $W_n(t) = W_k^{(m)}(t)$. В этих обозначениях $W_{n \dot{+} m}(t) = W_n(t) \cdot W_m(t)$, за исключением некоторого конечного числа точек (определение операции $\dot{+}$ можно найти, например, в [16]). Отметим некоторые свойства матрицы Качмажа, которыми мы будем пользоваться.

Свойство 1. Для фиксированного j, $1 \le j \le 2^n$, обозначим через $\varepsilon_j^{(n)}$ j-ую строку матрицы K_n. Записав строку $\varepsilon_{k,m}^{(\nu)} \cdot \varepsilon_j^{(n)}$ вместо элемента $\varepsilon_{k,m}^{(\nu)}$ матрицы K_ν, получим $2^\nu \times 2^{n+\nu}$ -мерную матрицу $K_{n,\nu}^{(j)}$. Запишем матрицы $K_{n,\nu}^{(j)}$ одну под другой ($K_{n,\nu}^{(j+1)}$ под $K_{n,\nu}^{(j)}$). В итоге получится матрица $K_{n+\nu}$. Иначе говоря

$$\varepsilon_{k,m}^{(\nu)} \cdot \varepsilon_{p,q}^{(n)} = \varepsilon_{(p-1)2^\nu+k,(m-1)2^n+q}^{(n+\nu)}. \tag{4}$$

Свойство 2. Пусть $x \in (\frac{j-1}{2^{n+1}}, \frac{j}{2^{n+1}})$, $j = 1, 2, \ldots, 2^{n+1}$. Тогда

$$W_k^{(m)}(x) = W_{2^k+m-1}(x) = \varepsilon_{2^k+m,j}^{(n+1)}, \quad 0 \le k \le n, \quad 1 \le m \le 2^k. \tag{5}$$

Верна следующая (см. [14], Лемма 1 или [17], Лемма 1).

Лемма 1. *Пусть $\{\varepsilon_{k,m}^{(2n)}\}$ - элементы матрицы Качмажа. Тогда существуют числа $\varepsilon_k = \pm 1$ такие, что*

$$\sum_{k=1}^{2^{2n}} \varepsilon_k \varepsilon_{k,m}^{(2n)} = \pm 2^n, \quad m = 1, 2, \ldots, 2^{2n}.$$

В [14] и [17] последовательность $\{\varepsilon_k\}$ была построена следующим образом :

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\varepsilon_4 = 1, \quad \varepsilon_{4k-j} = \varepsilon_k \varepsilon_{4-j}, \quad j = 0, 1, 2, 3. \tag{6}$$

Нетрудно убедиться, что, если $m = \theta_p 4^p + \theta_{p+1} 4^{p+1} + \cdots + \theta_q 4^q$, где $\theta_p \ne 0$, $\theta_i = 0, 1, 2, 3$ при $p \le i \le q$, $1 \le m \le 2^{2n}$, то

$$\varepsilon_{j 2^{2n}+m} = (-1)^p \varepsilon_{\theta_p} \varepsilon_{\theta_{p+1}+1} \cdots \varepsilon_{\theta_q+1} \varepsilon_{j+1}, \quad j = 0, 1, 2, 3. \tag{7}$$

Применяя несколько раз (6), получаем

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_{j2^{2n}+m} = \varepsilon_{j4^n+\theta_p 4^p+\cdots+\theta_q 4^q} = \varepsilon_{4^p(j4^{n-p}+\theta_q 4^{q-p}+\cdots+\theta_p)} = \\
&= (-1)^p \varepsilon_{j4^{n-p}+\theta_q 4^{q-p}+\cdots+\theta_p} = (-1)^p \varepsilon_{4(j4^{n-p-1}+\theta_q 4^{q-p-1}+\cdots+\theta_{p+1}+1)-(4-\theta_p)} = \\
&= (-1)^p \varepsilon_{\theta_p} \varepsilon_{4(j4^{n-p-2}+\theta_q 4^{q-p-2}+\cdots+\theta_{p+2}+1)-(4-\theta_{p+1}-1)} = \cdots \\
&\cdots = (-1)^p \varepsilon_{\theta_p} \varepsilon_{\theta_{p+1}+1} \cdots \varepsilon_{\theta_q+1} \varepsilon_{j4^{n-q-1}+1} = (-1)^p \varepsilon_{\theta_p} \varepsilon_{\theta_{p+1}+1} \cdots \varepsilon_{\theta_q+1} \varepsilon_{j+1}.
\end{aligned}$$

Из (6) и (7) следует, что

$$\varepsilon_m = \varepsilon_{2^{2n}+m} = \varepsilon_{2\,2^{2n}+m} = -\varepsilon_{3\,2^{2n}+m}, \quad 1 \le m \le 2^{2n}. \tag{8}$$

Учитывая (8) и используя те же рассуждения, что и в доказательстве Леммы 1, можно получить следующее утверждение.

Лемма 1$'$. *Пусть $\{\varepsilon_{k,m}^{(2n)}\}$ – элементы матрицы Качмажа. Тогда для последовательности $\{\varepsilon_k\}$, определенной по (6), имеем*

$$\sum_{k=1}^{2^{2n}} \varepsilon_k \varepsilon_{k,m}^{(2n)} = \varepsilon_m 2^n, \quad 1 \le m \le 2^{2n}.$$

В [17] была доказана следующая (см. [17], Лемма 1)

Лемма 2. *Для любых n и p выполняется неравенство*

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} \varepsilon_k W_k(t) \right| \le M\sqrt{p},$$

где M константа, а $\{\varepsilon_k\}$ определяются по (6).

Учитывая свойство 2 матриц Качмажа, Лемму 2 можно переформулировать следующим образом.

Лемма 2$'$. *Для любой матрицы Качмажа K_ν и для любых n и p выполняется неравенство*

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} \varepsilon_k \varepsilon_{k,m}^{(\nu)} \right| \le M\sqrt{p}, \quad 1 \le m \le 2^\nu,$$

где M – константа, а $\{\varepsilon_k\}$ определяются по (6).

Лемма 3. *Для любого интервала $I = [\frac{i}{2^\sigma}, \frac{i+1}{2^\sigma}]$, $\sigma \in N$, $0 \le i \le 2^\sigma - 1$ и для любого натурального $n > \sigma + 1$ существует полином $\sum_{k=1}^{2^n} a_n^{(k)} W_n^{(k)}(x)$ такой, что*

1. $|a_n^{(k)}| \le 2\cdot 2^{-\frac{n+\sigma}{2}}, \quad 1 \le k \le 2^n,$
2. $|\sum_{k=1}^{N} a_n^{(k)} W_n^{(k)}(x)| \le 2\cdot 2^{-\frac{n-\sigma-1}{2}}$, *если* $x \notin I$, $1 \le N \le 2^n$,
3. $|\sum_{k=1}^{N} a_n^{(k)} W_n^{(k)}(x)| \le M + 2\cdot 2^{-\frac{n-\sigma-1}{2}}$, *если* $x \in I$, $1 \le N \le 2^n$,
4. $\sum_{k=1}^{2^n} a_n^{(k)} W_n^{(k)}(x) = 1$, *если* $x \in E_1 \subset I$, $\mu E_1 = \frac{1}{2}\mu I = 2^{-\sigma-1}$,
5. $\sum_{k=1}^{2^n} a_n^{(k)} W_n^{(k)}(x) = -1$, *если* $x \in E_2 \subset I$, $\mu E_2 = \frac{1}{2}\mu I = 2^{-\sigma-1}$,
6. $\sum_{k=1}^{2^n} a_n^{(k)} W_n^{(k)}(x) = 0$, *если* $x \notin I$,

причем множества E_1 *и* E_2 *являются конечными объединениями интервалов типа Хаара, а* M *– постоянная.*

Доказательство. Пусть $n-\sigma$ четное число. Полином $\sum_{k=1}^{2^n} a_n^{(k)} W_n^{(k)}(x)$ будем искать среди функций вида

$$\frac{1}{2^{n/2}} \sum_{k=i2^{n-\sigma}+1}^{(i+1)2^{n-\sigma}} \delta_k \chi_n^{(k)}(x), \quad \text{где} \quad \delta_k = \pm 1. \tag{9}$$

Ясно, что при любом выборе чисел δ_k функции вида (9) удовлетворяют условиям 4. – 6.

Из (3) имеем (отметим, что числа δ_k не фиксированы)

$$\frac{1}{2^{n/2}} \sum_{k=i2^{n-\sigma}+1}^{(i+1)2^{n-\sigma}} \delta_k \chi_n^{(k)}(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=i2^{n-\sigma}+1}^{(i+1)2^{n-\sigma}} \delta_k \sum_{m=1}^{2^n} \varepsilon_{k,m}^{(n)} W_n^{(m)}(x) =$$

$$= \frac{1}{2^n} \sum_{m=1}^{2^n} \left(\sum_{k=i2^{n-\sigma}+1}^{(i+1)2^{n-\sigma}} \delta_k \varepsilon_{k,m}^{(n)} \right) W_n^{(m)}(x).$$

Напомним (см. (4)), что для фиксированного j, $1 \le j \le 2^\sigma$ матрицы

$$\left(\varepsilon_{k,m}^{(n)}\right)_{k=i2^{n-\sigma}+1,\dots,(i+1)2^{n-\sigma}}^{m=q2^\sigma+j,\ q=0,1,\dots,2^{n-\sigma}-1}$$

являются матрицами Качмажа порядка $2^{n-\sigma}$, умноженными на $\varepsilon_{i+1,j}^{(\sigma)}$. Взяв $\delta_k = \varepsilon_{k-i2^{n-\sigma}}$ (где $\{\varepsilon_k\}$ определяются по (6)) и применив Лемму 1′ для $m = q2^\sigma + j$, $q = 0, 1, \dots, 2^{n-\sigma}-1$, $j = 1, 2, \dots, 2^\sigma$, получим

$$\sum_{k=i2^{n-\sigma}+1}^{(i+1)2^{n-\sigma}} \delta_k \varepsilon_{k,m}^{(n)} = \sum_{k=1}^{2^{n-\sigma}} \varepsilon_k \varepsilon_{k,q+1}^{(n-\sigma)} \varepsilon_{i+1,j}^{(\sigma)} = \varepsilon_{q+1} \varepsilon_{i+1,j}^{(\sigma)} 2^{\frac{n-\sigma}{2}}. \tag{10}$$

Обозначим

$$a_n^{(m)} = \frac{1}{2^n} \sum_{k=i2^{n-\sigma}+1}^{(i+1)2^{n-\sigma}} \delta_k \varepsilon_{k,m}^{(n)}, \quad m = 1, 2, \ldots, 2^n. \tag{11}$$

Из (10) и (11) следует, что

$$a_n^{(q2^\sigma+j)} = 2^{-\frac{n+\sigma}{2}} \varepsilon_{q+1} \varepsilon_{i+1,j}^{(\sigma)}, \quad q = 0, 1, \ldots, 2^{n-\sigma} - 1, \quad j = 1, 2, \ldots, 2^\sigma, \tag{12}$$

и

$$|a_n^{(m)}| = 2^{-\frac{n+\sigma}{2}}, \quad m = 1, 2, \ldots, 2^n. \tag{13}$$

Пусть $x \in \left(\frac{\alpha 2^{n-\sigma+1}+\beta-1}{2^{n+1}}, \frac{\alpha 2^{n-\sigma+1}+\beta}{2^{n+1}}\right)$, $\alpha = 0, 1, \ldots, 2^\sigma - 1$, $1 \le \beta \le 2^{n-\sigma+1}$ и $m = q2^\sigma + j$, $q = 0, 1, \ldots, 2^{n-\sigma} - 1$, $j = 1, 2, \ldots, 2^\sigma$. Из (4) и (5) получим

$$\begin{aligned} W_n^{(m)}(x) = \varepsilon_{2^n+q2^\sigma+j,\alpha 2^{n-\sigma+1}+\beta}^{(n+1)} &= \varepsilon_{j,\alpha+1}^{(\sigma)} \varepsilon_{2^{n-\sigma}+q+1,\beta}^{(n-\sigma+1)} = \\ &= \varepsilon_{\alpha+1,j}^{(\sigma)} \varepsilon_{q+1,[\frac{\beta+1}{2}]}^{(n-\sigma)} (-1)^{\beta+1}. \end{aligned} \tag{14}$$

Следовательно, учитывая (12) и (14), имеем

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{N} a_n^{(m)} W_n^{(m)}(x) &= \sum_{m=1}^{2^\sigma[\frac{N}{2^\sigma}]} a_n^{(m)} W_n^{(m)}(x) + \sum_{m=2^\sigma[\frac{N}{2^\sigma}]+1}^{N} a_n^{(m)} W_n^{(m)}(x) = \\ &= (-1)^{\beta+1} 2^{-\frac{n+\sigma}{2}} \sum_{q=0}^{[\frac{N}{2^\sigma}]-1} \sum_{j=1}^{2^\sigma} \varepsilon_{q+1} \varepsilon_{i+1,j}^{(\sigma)} \varepsilon_{\alpha+1,j}^{(\sigma)} \varepsilon_{q+1,[\frac{\beta+1}{2}]}^{(n-\sigma)} + \\ &\quad + \sum_{m=2^\sigma[\frac{N}{2^\sigma}]+1}^{N} a_n^{(m)} W_n^{(m)}(x). \end{aligned} \tag{15}$$

Если $x \notin I$ (т.е. $\alpha \ne i$), то из ортогональности матриц Качмажа имеем $\sum_{j=1}^{2^\sigma} \varepsilon_{i+1,j}^{(\sigma)} \varepsilon_{\alpha+1,j}^{(\sigma)} = 0$. Поэтому из (13) и (15) следует

$$\left|\sum_{m=1}^{N} a_n^{(m)} W_n^{(m)}(x)\right| = \left|\sum_{m=2^\sigma[\frac{N}{2^\sigma}]+1}^{N} a_n^{(m)} W_n^{(m)}(x)\right| \le 2^\sigma 2^{-\frac{n+\sigma}{2}} = 2^{-\frac{n-\sigma}{2}}.$$

Если $x \in I$ (i.e. $\alpha = i$), то

$$\sum_{j=1}^{2^\sigma} \varepsilon_{i+1,j}^{(\sigma)} \varepsilon_{\alpha+1,j}^{(\sigma)} = 2^\sigma.$$

В силу Леммы 2′ и с учетом (13) и (15) получим

$$\left|\sum_{m=1}^{N} a_n^{(m)} W_n^{(m)}(x)\right| \le 2^{-\frac{n+\sigma}{2}} 2^\sigma \left|\sum_{q=0}^{[\frac{N}{2^\sigma}]-1} \varepsilon_{q+1} \varepsilon_{q+1,[\frac{\beta+1}{2}]}^{(n-\sigma)}\right| +$$

$$+2^{-\frac{n-\sigma}{2}} \le 2^{-\frac{n-\sigma}{2}} M\sqrt{\left[\frac{N}{2^\sigma}\right]} + 2^{-\frac{n-\sigma}{2}} \le M + 2^{-\frac{n-\sigma}{2}}.$$

Таким образом, в случае четного $n-\sigma$ лемма доказана.

Пусть теперь $n-\sigma$ нечетное. Разделим интервал I на две части : I_1 и I_2, причем $\mu I_1 = \mu I_2 = \frac{1}{2}\mu I = 2^{-(\sigma+1)}$. Ясно, что $n-(\sigma+1)$ – четное и $n > \sigma + 1$. Как мы уже доказали, в таком случае существуют полиномы $\sum_{m=1}^{2^n} b_n^{(m)} W_n^{(m)}(x)$ и $\sum_{m=1}^{2^n} c_n^{(m)} W_n^{(m)}(x)$ (соответствующие интервалам I_1 и I_2), которые удовлетворяют требованиям леммы, где вместо σ взято $\sigma+1$, а вместо I рассмотрены I_1 и I_2 соответственно.

Обозначим

$$\sum_{m=1}^{2^n} a_n^{(m)} W_n^{(m)}(x) = \sum_{m=1}^{2^n} (b_n^{(m)} + c_n^{(m)}) W_n^{(m)}(x).$$

Тогда, очевидно, будем иметь

1. $|a_n^{(m)}| \le |b_n^{(m)}| + |c_n^{(m)}| \le 2 \cdot 2^{-\frac{n+\sigma}{2}}$, если $1 \le m \le 2^n$,
2. $|\sum_{m=1}^{N} a_n^{(m)} W_n^{(m)}(x)| \le 2 \cdot 2^{-\frac{n-\sigma-1}{2}}$, если $x \notin I$, $1 \le N \le 2^n$,
3. $|\sum_{m=1}^{N} a_n^{(m)} W_n^{(m)}(x)| \le M + 2 \cdot 2^{-\frac{n-\sigma-1}{2}}$, если $x \in I$, $1 \le N \le 2^n$,
4. $\sum_{m=1}^{2^n} a_n^{(m)} W_n^{(m)}(x) = 1$, если $x \in E_1 \subset I$, $\mu E_1 = \frac{1}{2}\mu I = 2^{-\sigma-1}$,
5. $\sum_{m=1}^{2^n} a_n^{(m)} W_n^{(m)}(x) = -1$, если $x \in E_2 \subset I$, $\mu E_2 = \frac{1}{2}\mu I = 2^{-\sigma-1}$,
6. $\sum_{m=1}^{2^n} a_n^{(m)} W_n^{(m)}(x) = 0$, если $x \notin I$,

причем множества E_1 и E_2 являются конечными объединениями интервалов типа Хаара, а M – постоянная. Этим завершается доказательство Леммы 3.

Доказательство Теоремы 1. Пусть $\sum_{m,n=0}^{\infty} \varepsilon_{mn}^2 = +\infty$. В том случае, когда один из рядов $\sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_{mo}^2$ и $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_{on}^2$ расходится, то Теорема 1 является одномерным аналогом Теоремы А для системы Уолша. Пусть

$$\sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_{mo}^2 < +\infty \quad \text{и} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_{on}^2 < +\infty. \tag{16}$$

Очевидно, что ряд $\sum_{m,n=0}^{\infty} 2^m 2^n \varepsilon_{2^m 2^n}^2$ расходится. Поэтому по крайней мере один из рядов

$$\sum_{m,n=0,\ m\ge n}^{\infty} 2^m 2^n \varepsilon_{2^m 2^n}^2 \quad \text{и} \quad \sum_{m,n=0,\ m\le n}^{\infty} 2^m 2^n \varepsilon_{2^m 2^n}^2$$

расходится. Для определенности предположим, что

$$\sum_{m,n=0,\ m\le n}^{\infty} 2^m 2^n \varepsilon^2_{2^m 2^n} = +\infty. \qquad (17)$$

Обозначим

$$G = \{(m,n):\ m \le n,\ \varepsilon_{2^m 2^n} < 4\varepsilon_{2^{m+1}2^{n+1}}\}$$

и покажем, что

$$\sum_{(m,n)\in G} 2^m 2^n \varepsilon^2_{2^m 2^n} = +\infty. \qquad (18)$$

Для фиксированного n пусть h есть наименьшее число, удовлетворяющее условию $(h, n+h) \in G$ (если нет такого числа, то положим $h = +\infty$). Имеем

$$\sum_{p=0}^{h-1} 2^p 2^{n+p} \varepsilon^2_{2^p 2^{n+p}} \le \sum_{p=0}^{h-1} 2^p 2^{n+p} \left(\frac{\varepsilon_{1,2^n}}{4^p}\right)^2 \le 2\cdot 2^n \varepsilon^2_{1,2^n}, \qquad (19)$$

Пусть $(m, n+m) \in G$, и пусть l есть наименьшее число, удовлетворяющее условиям $(l, n+l) \in G$ и $l > m$ (если нет такого числа, положим $l = +\infty$). Тогда

$$\sum_{p=m}^{l-1} 2^p 2^{n+p} \varepsilon^2_{2^p 2^{n+p}} \le \sum_{p=m}^{l-1} 2^p 2^{n+p} \left(\frac{\varepsilon_{2^m 2^{n+m}}}{4^{p-m}}\right)^2 \le 2\cdot 2^m 2^{n+m} \varepsilon^2_{2^m 2^{n+m}}. \qquad (20)$$

Из (19), (20) и условия $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \varepsilon^2_{1,2^n} = A < +\infty$ получаем

$$\sum_{m,n=0,\ m\le n}^{\infty} 2^m 2^n \varepsilon^2_{2^m 2^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} 2^m 2^{n+m} \varepsilon^2_{2^m 2^{n+m}} \le \sum_{n=0}^{\infty} 2\, 2^n \varepsilon^2_{1,2^n} +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{(m,m+n)\in G} 2\, 2^m 2^{m+n} \varepsilon^2_{2^m 2^{m+n}} = 2A + 2 \sum_{(m,n)\in G} 2^m 2^n \varepsilon^2_{2^m 2^n}. \qquad (21)$$

Из (17) и (21) следует (18).

Существуют натуральные числа p_{mn} такие, что $\frac{1}{2}\varepsilon_{2^m 2^n} < 2^{2-p_{mn}} \le \varepsilon_{2^m 2^n}$, причем $p_{mn} \to +\infty$. Без ограничения общности можно считать, что $\varepsilon_{00} = 1$, $\varepsilon_{2^m 2^n} = 4\cdot 2^{-p_{mn}}$, $m \ge 0$, $n \ge 0$. Также можно считать, что

$$\varepsilon_{pq} = \varepsilon_{2^m 2^n} = 4\cdot 2^{-p_{mn}} \qquad (22)$$

для $(m,n) \in G$, $2^m \le p < 2^{m+1}$, $2^n \le q < 2^{n+1}$. Итак, имеем

$$\sum_{(m,n)\in G} 2^m 2^n (2^{-p_{mn}})^2 = +\infty. \qquad (23)$$

Обозначим через B подмножество тех элементов из G, для которых $m+n > \frac{3}{2}p_{mn}$. Легко видеть, что

$$\sum_{(m,n)\in G\setminus B} 2^m 2^n (2^{-p_{mn}})^2 \le \sum_{(m,n)\in G\setminus B} 2^m 2^n 2^{-\frac{4}{3}(m+n)} \le$$
$$\le \sum_{m,n=0}^{\infty} 2^{-\frac{1}{3}(m+n)} < +\infty. \qquad (24)$$

Из (16), (23) и (24) следует, что для любого M

$$\sum_{(m,n)\in B,\ m\ge M} 2^m 2^n (2^{-p_{mn}})^2 = +\infty. \qquad (25)$$

Можно выбрать натуральные числа γ_{mn}, удовлетворяющими условиям

$$\sum_{(m,n)\in B,\ m\ge M} 2^m 2^n 2^{-\gamma_{mn}} (2^{-p_{mn}})^2 = +\infty \quad \text{для любого } M, \qquad (26)$$

$$\lim_{\substack{m,n\to\infty,\\ (m,n)\in B}} (m+n-\gamma_{mn}-2p_{mn}) = -\infty, \qquad (27)$$

$$m+n-\gamma_{mn}-2p_{mn} > -\frac{1}{2}p_{mn} \quad \text{при } (m,n)\in B. \qquad (28)$$

Из (28) и определения множества B следует, что

$$\lim_{\substack{m,n\to\infty,\\ (m,n)\in H}} (m+2n-\gamma_{mn}-2p_{mn}) = +\infty. \qquad (29)$$

Согласно (26) и (27) для любых k и l существует конечное подмножество D множества B такое, что

$$\sum_{(m,n)\in D} 2^m 2^n 2^{-\gamma_{mn}} (2^{-p_{mn}})^2 = 2^{-l}$$

и $\min\{m:\ (m,n)\in D\} \ge k$.

Для $\{p_{mn}\}$, $\{\gamma_{mn}\}$ и B, определенных выше, справедлива

Лемма 4. *Для любых неотрицательных целых чисел i, M, для любого $\delta > 0$ и для любого квадрата типа Хаара Δ, $\mu\Delta = 2^{-2\gamma}$, существуют конечное подмножество $D \subset B$ и полином*

$$\sum_{m,n=M}^{N} c_{mn} W_m(x) W_n(y) = \sum_{(m,n)\in D} \sum_{k=1}^{2^m} \sum_{l=1}^{2^n} a_{mn}^{(k)} b_{mn}^{(l)} W_m^{(k)}(x) W_n^{(l)}(y)$$

такие, что

1. $|c_{mn}| \le 2^{-i}\varepsilon_{mn}, \quad M \le m,n \le N,$
2. $\sum\limits_{m,n=M}^{N} c_{mn}W_m(x)W_n(y) = 1, \quad$ если $\quad (x,y) \in E_1 \subset \Delta, \ \mu E_1 = \frac{1}{2}\mu\Delta,$
3. $\sum\limits_{m,n=M}^{N} c_{mn}W_m(x)W_n(y) = -1, \quad$ если $\quad (x,y) \in E_2 \subset \Delta, \ \mu E_2 = \frac{1}{2}\mu\Delta,$
4. $\sum\limits_{m,n=M}^{N} c_{mn}W_m(x)W_n(y) = 0, \quad$ если $\quad (x,y) \notin \Delta,$
5. $|\sum\limits_{m=M}^{P}\sum\limits_{n=M}^{Q} c_{mn}W_m(x)W_n(y)| \le C, \quad$ если $\quad (x,y) \in \Delta, \ P,Q \ge M,$
6. $|\sum\limits_{m=M}^{P}\sum\limits_{n=M}^{Q} c_{mn}W_m(x)W_n(y)| \le \delta, \quad$ если $\quad (x,y) \notin \Delta, \ P,Q \ge M,$
7. $\sum\limits_{(m,n)\in D} 2^m 2^n 2^{-\gamma_{mn}}(2^{-p_{mn}-i})^2 = \mu\Delta = 2^{-2\gamma},$

причем множества E_1 и E_2 являются конечными объединениями квадратов типа Хаара, а C – абсолютная постоянная.

Доказательство. Из (29) следует, что существует M_o такое, что

$$m + 2n - \gamma_{mn} - 2(p_{mn} + i) - 1 > 0, \quad \text{при } (m,n) \in B, \ m > M_o. \tag{30}$$

Выберем M_o таким, чтобы выполнялись следующие условия

$$n2^{-\frac{n}{2}}2^{\frac{2i-\gamma+1}{2}} < \frac{\delta}{8C}, \quad \text{при } (m,n) \in B, \ m > M_o \tag{31}$$

$$2^{-\frac{m-\gamma-1}{2}} < \frac{\delta}{8C}, \quad \text{при } (m,n) \in B, \ m > M_o, \tag{32}$$

где C – постоянная из Леммы 3.

Выберем такое конечное подмножество $D \subset B$, что

$$\sum_{(m,n)\in D} 2^m 2^n 2^{-\gamma_{mn}}(2^{-p_{mn}-i})^2 = \mu\Delta = 2^{-2\gamma} \tag{33}$$

и

$$\min\{m : (m,n) \in D\} > \max\{\gamma + 1, \log_2 M, M_o\}. \tag{34}$$

Из (33) следует, что квадрат Δ можно представить в виде объединения прямоугольников типа Хаара, т.е.

$$\Delta = \cup_{(m,n)\in D} I_{mn} = \cup_{(m,n)\in D}(I^{(1)}_{mn} \times I^{(2)}_{mn}),$$

где $\mu I_{mn}^{(1)} = 2^{-\gamma}$ и $\mu I_{mn}^{(2)} = 2^m 2^n 2^{-\gamma_{mn}} (2^{-p_{mn}-i})^2 2^{\gamma}$ ($I_{mn}^{(1)}$ и $I_{mn}^{(2)}$ - интервалы типа Хаара).

Пусть $(m,n) \in D$ фиксировано. В силу Леммы 3 для интервала $I_{mn}^{(1)}$ и числа m, а также для интервала $I_{mn}^{(2)}$ и числа n, существуют полиномы $\sum_{k=1}^{2^m} a_{mn}^{(k)} W_m^{(k)}(x)$ и $\sum_{l=1}^{2^n} a_{mn}^{(l)} W_n^{(l)}(y)$, соответственно, удовлетворяющие условиям

a) $|a_{mn}^{(k)}| \leq 2 \cdot 2^{-\frac{m+\gamma}{2}}, \quad (m,n) \in D, \quad k = 1,2,\ldots,2^m,$

b) $|\sum_{k=1}^{P} a_{mn}^{(k)} W_m^{(k)}(x)| \leq 2 \cdot 2^{-\frac{m-\gamma-1}{2}}, \quad$ для $\quad x \notin I_{mn}^{(1)}, \quad 1 \leq P \leq 2^m,$

c) $|\sum_{k=1}^{P} a_{mn}^{(k)} W_m^{(k)}(x)| \leq C, \quad$ для $\quad x \in I_{mn}^{(1)}, \quad 1 \leq P \leq 2^m,$

d) $\sum_{k=1}^{2^m} a_{mn}^{(k)} W_m^{(k)}(x) = 1, \quad$ для $\quad x \in E'_{mn} \subset I_{mn}^{(1)}, \quad \mu E'_{mn} = \frac{1}{2}\mu I_{mn}^{(1)},$

e) $\sum_{k=1}^{2^m} a_{mn}^{(k)} W_m^{(k)}(x) = -1, \quad$ для $\quad x \in E''_{mn} \subset I_{mn}^{(1)}, \quad \mu E''_{mn} = \frac{1}{2}\mu I_{mn}^{(1)},$

f) $\sum_{k=1}^{2^m} a_{mn}^{(k)} W_m^{(k)}(x) = 0, \quad$ для $\quad x \notin I_{mn}^{(1)},$

a′) $|b_{mn}^{(l)}| \leq 2 \cdot 2^{-\frac{-m+\gamma_{mn}+2(p_{mn}+i)-\gamma}{2}}, \quad (m,n) \in D, \quad l = 1,2,\ldots,2^n,$

b′) $|\sum_{l=1}^{Q} b_{mn}^{(l)} W_n^{(l)}(y)| \leq 2 \cdot 2^{-\frac{m+2n-\gamma_{mn}-2(p_{mn}+i)+\gamma-1}{2}}, \quad$ для $\quad y \notin I_{mn}^{(2)},$

c′) $|\sum_{l=1}^{Q} b_{mn}^{(l)} W_n^{(l)}(y)| \leq C, \quad$ для $\quad y \in I_{mn}^{(2)}, \quad 1 \leq Q \leq 2^n,$

d′) $\sum_{l=1}^{2^n} b_{mn}^{(l)} W_n^{(l)}(y) = 1, \quad$ для $\quad y \in F'_{mn} \subset I_{mn}^{(2)}, \quad \mu F'_{mn} = \frac{1}{2}\mu I_{mn}^{(2)},$

e′) $\sum_{l=1}^{2^n} b_{mn}^{(l)} W_n^{(l)}(y) = -1, \quad$ для $\quad y \in F''_{mn} \subset I_{mn}^{(2)}, \quad \mu F''_{mn} = \frac{1}{2}\mu I_{mn}^{(2)},$

f′) $\sum_{l=1}^{2^n} b_{mn}^{(l)} W_n^{(l)}(y) = 0, \quad$ для $\quad y \notin I_{mn}^{(2)},$

где E'_{mn}, E''_{mn}, F'_{mn}, F''_{mn} являются объединениями интервалов типа Хаара, а $C > 2$ константа.

Имеем

$$\sum_{m,n=M}^{N} c_{mn} W_m(x) W_n(y) = \sum_{(m,n)\in D} \sum_{k=1}^{2^m} \sum_{l=1}^{2^n} a_{mn}^{(k)} b_{mn}^{(l)} W_m^{(k)}(x) W_n^{(l)}(y). \tag{35}$$

Из (22), (35), a) и a′) следут, что $|c_{mn}| \leq 2^{-i}\varepsilon_{mn}$. Из d) - f), d′) - f′) и (35) получим

$$\sum_{m,n=M}^{N} c_{mn} W_m(x) W_n(y) = \begin{cases} 1, & \text{если } (x,y) \in E_1 \subset \Delta \\ -1, & \text{если } (x,y) \in E_2 \subset \Delta \\ 0, & \text{если } (x,y) \notin \Delta, \end{cases}$$

где $\mu E_1 = \mu E_2 = \frac{1}{2}\mu\Delta$.

Для $P, Q \geq M$ имеем

$$S_{PQ}(x,y) =$$

$$= \sum_{m=M}^{P} \sum_{n=M}^{Q} c_{mn} W_m(x) W_n(y) = \sum_{\substack{(m,n)\in D, \\ 2^{m+1} \leq P,\, 2^{n+1} \leq Q}} \sum_{k=1}^{2^m} \sum_{l=1}^{2^n} a_{mn}^{(k)} b_{mn}^{(l)} W_m^{(k)}(x) W_n^{(l)}(y) +$$

$$+ \sum_{\substack{(m,n)\in D, \\ 2^m \leq P < 2^{m+1},\, 2^{n+1} \leq Q}} \sum_{k=1}^{P-2^m+1} \sum_{l=1}^{2^n} + \sum_{\substack{(m,n)\in D, \\ 2^{m+1} \leq P,\, 2^n \leq Q < 2^{n+1}}} \sum_{k=1}^{2^m} \sum_{l=1}^{Q-2^n+1} +$$

$$+ \sum_{\substack{(m,n)\in D, \\ 2^m \leq P < 2^{m+1},\, 2^n \leq Q < 2^{n+1}}} \sum_{k=1}^{P-2^m+1} \sum_{l=1}^{Q-2^n+1} = \sum_{k=1}^{4} J_k(x,y).$$

Если $(x,y) \in \Delta$, то из d) - f) и d′) - f′) следует, что

$$|J_1(x,y)| = 1 \quad \text{или} \quad J_1(x,y) = 0. \tag{36}$$

Поскольку y может принадлежать только одному интервалу $I_{mn}^{(2)}$, то из c) и d′) - f′) получаем

$$|J_2(x,y)| \leq C. \tag{37}$$

Из d), c), b′) и c′) следует, что

$$|J_3(x,y)| \leq C + \sum_{\substack{(m,n)\in D, \\ 2^{m+1} \leq P,\, 2^n \leq Q < 2^{n+1}}} 2 \cdot 2^{-\frac{m+2n-p_{mn}-2(p_{mn}+i)+\gamma-1}{2}} \tag{38}$$

Так как $m \leq n$, то количество слагаемых в (38) не превосходит n. Учитывая, что $p_{mn} < \frac{2}{3}(m+n) \leq \frac{4}{3}n$, для $(m,n) \in D$ из (28), (31), (34) и (38) получаем

$$|J_3(x,y)| \leq C + n\, 2 \cdot 2^{-\frac{n - \frac{2p_{mn}}{3} + \gamma - 2i - 1}{2}} \leq C + 2n\, 2^{-\frac{n}{3}}\, 2^{\frac{2i-\gamma+1}{2}} \leq C_1. \tag{39}$$

Нетрудно заметить, что для любых P и Q в $J_4(x,y)$ входит либо одна двойная сумма, либо вообще нет слагаемых. Поэтому, ввиду b′), c′), b) и c), имеем

$$|J_4(x,y)| \leq C^2. \tag{40}$$

Следовательно (см. (36), (37), (39) и (40)), $|S_{PQ}(x,y)| \le C_2$, где C_2 – постоянная. Пусть $(x,y) \notin \Delta$. Тогда из d) - f) и d′) - f′) следует

$$J_1(x,y) = 0. \tag{41}$$

Поскольку y может принадлежать I^2_{mn} по крайней мере для одной пары $(m,n) \in \in D$, то из b), d′) - f′), (32) и (34) получаем

$$|J_2(x,y)| \le 2 \cdot 2^{-\frac{m-\gamma-1}{2}} \le \frac{\delta}{4C}. \tag{42}$$

Точно так же, как это было сделапо в случас $(x,y) \in D$, получаем

$$|J_3(x,y)| \le 2n\, 2^{-\frac{n}{2}}\, 2^{\frac{2i-\gamma+1}{2}} \le \frac{\delta}{4C}. \tag{43}$$

Из b), c), b′), c′), (31), (32) и (34) слелуст, что

$$|J_4(x,y)| \le C\, 2 \cdot 2^{-\frac{m-\gamma-1}{2}} + C\, 2 \cdot 2^{-\frac{m+2n-\gamma mn-2(pmn+i)+\gamma-1}{2}} \le$$

$$\le 2C(2^{-\frac{m-\gamma-1}{2}} + 2^{-\frac{n}{2}} 2^{\frac{2i-\gamma+1}{2}}) \le 2C(\frac{\delta}{8C} + \frac{\delta}{8C}) = \frac{\delta}{2}. \tag{44}$$

Учитывая (41) - (44), имсем

$$|S_{PQ}(x,y)| \le \frac{\delta}{4C} + \frac{\delta}{4C} + \frac{\delta}{2} < \delta.$$

Лсмма 4 доказана.

Продолжим доказательство Теоремы 1. Положим $f_o(x,y) = a_{oo} = 1$. Взяв $i = 0$, $M = M_1 = 1$, $\delta = 1$, $\Delta = E_o = [0,1]^2$ и, применив Лемму 4, получим полином

$$f_1(x,y) = \sum_{m,n=M_1}^{N_1} c_{mn} W_m(x) W_n(y) = \sum_{(m,n)\in D_1} \sum_{k=1}^{2^m} \sum_{l=1}^{2^n} a^{(k)}_{mn} b^{(l)}_{mn} W^{(k)}_m(x) W^{(l)}_n(y),$$

обладающий следующими свойствами :

1. $|c_{mn}| \le \varepsilon_{mn}$, $M_1 \le m,n \le N_1$,
2. $f_1(x,y) = 1$, если $(x,y) \in E_1 \subset E_o$, $\mu E_1 = \frac{1}{2}\mu E_o = 2^{-1}$,
3. $f_1(x,y) = -1$, если $(x,y) \in E'_1 \subset E_o$, $\mu E'_1 = \frac{1}{2}\mu E_o = 2^{-1}$,
4. Прямоугольные частичные суммы ряда Фурье функции $f_1(x,y)$ меньше, чем C,

5. $\sum_{(m,n)\in D_1} 2^m 2^n 2^{-\gamma_{mn}}(2^{-p_{mn}})^2 = \mu E_o = 1$,

причем множества E_1 и E_1' являются объединениями квадратов типа Хаара.

Пусть $E_1 = \cup_{q=1}^{\alpha_1}\Delta_1^{(q)}$, где $\Delta_1^{(q)}$ квадрат типа Хаара. Для каждого q, $q = 1,2,\ldots,\alpha_1$, для $\Delta = \Delta_1^{(q)}$, $i = 1$, $\delta = \frac{1}{\alpha_1}2^{-2i}$ и $M = M_2^{(q)}$, где $M_2^{(q)} > N_2^{(q-1)}$, $N_2^{(o)} = N_1$, применив Лемму 4, получаем конечные подмножества $D_2^{(q)}$, $q = 1,2,\ldots,\alpha_1$ множества B и полиномы

$$f_2^{(q)}(x,y) = \sum_{m,n=M_2^{(q)}}^{N_2^{(q)}} c_{mn}W_m(x)W_n(y) = \sum_{(m,n)\in D_2^{(q)}}\sum_{k=1}^{2^m}\sum_{l=1}^{2^n} a_{mn}^{(k)}b_{mn}^{(l)}W_m^{(k)}(x)W_n^{(l)}(y),$$
$$q = 1,2,\ldots,\alpha_1,$$

удовлетворяющие условиям

1'. $|c_{mn}| \le 2^{-1}\varepsilon_{mn}$, $M_2^{(q)} \le m,n \le N_2^{(q)}$,

2'. $f_2^{(q)}(x,y) = 1$, если $(x,y)\in E_2^{(q)} \subset \Delta_1^{(q)}$, $\mu E_2^{(q)} = \frac{1}{2}\mu\Delta_1^{(q)}$,

3'. $f_2^{(q)}(x,y) = -1$, если $(x,y)\in F_2^{(q)} \subset \Delta_1^{(q)}$, $\mu F_2^{(q)} = \frac{1}{2}\mu\Delta_1^{(q)}$,

4'. $f_2^{(q)}(x,y) = 0$, если $(x,y)\notin \Delta_1^{(q)}$,

5'. Частичные суммы ряда Фурье функции $f_2^{(q)}(x,y)$ вне $\Delta_1^{(q)}$ по модулю меньше, чем $\frac{1}{\alpha_1}2^{-2i}$, а на $\Delta_1^{(q)}$ - меньше, чем C.

6'. $\sum_{(m,n)\in D_2^{(q)}} 2^m 2^n 2^{-\gamma_{mn}}(2^{-p_{mn}-1})^2 = \mu\Delta_1^{(q)}$,

причем множества $E_2^{(q)}$ и $F_2^{(q)}$ являются конечными объединениями квадратов типа Хаара.

Положим $M_2 = M_2^{(1)}$, $N_2 = N_2^{(\alpha_1)}$, $D_2 = \cup_{q=1}^{\alpha_1} D_2^{(q)}$, $E_2 = \cup_{q=1}^{\alpha_1} E_2^{(q)}$, $E_2' = \cup_{q=1}^{\alpha_1} F_2^{(q)}$,

$$f_2(x,y) = \sum_{q=1}^{\alpha_1} f_2^{(q)}(x,y) = \sum_{m,n=M_2}^{N_2} c_{mn}W_m(x)W_n(y).$$

Из условий 1' - 6' и в силу выбора чисел $M_2^{(q)}$ и $N_2^{(q)}$ получим

1''. $|c_{mn}| \le 2^{-1}\varepsilon_{mn}$, $M_2 \le m,n \le N_2$,

2''. $f_2(x,y) = 1$, если $(x,y)\in E_2 \subset E_1$, $\mu E_2 = \frac{1}{2}\mu E_1 = 2^{-2}$,

3''. $f_2(x,y) = -1$, если $(x,y)\in E_2' \subset E_1$, $\mu E_2' = \frac{1}{2}\mu E_1 = 2^{-2}$,

4''. $f_2(x,y) = 0$, если $(x,y)\notin E_1$,

5''. Частичные суммы ряда Фурье функции $f_2(x,y)$ вне E_1 меньше, чем 2^{-2} и меньше, чем $C + 2^{-2}$ на E_1,

$$6''.\quad \sum_{(m,n)\in D_2} 2^m 2^n 2^{-\gamma_{mn}}(2^{-p_{mn}})^2 = 2^2 \mu E_1,$$

$$7''.\quad \max\{n:\ (m,n)\in D_1\} < \min\{m:\ (m,n)\in D_2\},$$

причем множества E_2 и E_2' являются конечными объединениями квадратов типа Хаара.

Продолжая этот процесс, на j-ом шаге получим множества $D_j \subset B$, $E_j \subset E_{j-1}$ и полином

$$f_j(x,y) = \sum_{m,n=M_j}^{N_j} c_{mn} W_m(x) W_n(y) =$$

$$= \sum_{(m,n)\in D_j} \sum_{k=1}^{2^m} \sum_{l=1}^{2^n} a_{mn}^{(k)} b_{mn}^{(l)} W_m^{(k)}(x) W_n^{(l)}(y), \tag{45}$$

удовлетворяющие следующим условиям :

A) $|c_{mn}| \le 2^{-(j-1)} \varepsilon_{mn}$, $M_j \le m, n \le N_j$,

B) $f_j(x,y) = 1$, если $(x,y) \in E_j \subset E_{j-1}$, $\mu E_j = \frac{1}{2}\mu E_{j-1} = 2^{-j}$,

C) $f_j(x,y) = -1$, если $(x,y) \in E_j' \subset E_{j-1}$, $\mu E_j' = \frac{1}{2}\mu E_{j-1} = 2^{-j}$,

D) $f_j(x,y) = 0$, если $(x,y) \notin E_{j-1}$,

E) Частичные суммы ряда Фурье функции $f_j(x,y)$ вне E_{j-1} по модулю меньше $2^{-2(j-1)}$, а на E_{j-1} - меньше, чем $C + 2^{-2(j-1)}$.

F) $$\sum_{(m,n)\in D_j} 2^m 2^n 2^{-\gamma_{mn}}(2^{-p_{mn}})^2 = 2^{2(j-1)} \mu E_{j-1} = 2^{j-1},$$

G) $\max\{n:\ (m,n)\in D_{j-1}\} < \min\{m:\ (m,n)\in D_j\}$,

причем E_j и E_j' являются конечными объединениями квадратов типа Хаара.

Обозначим $E = \bigcap_{j=0}^{\infty} E_j$ и докажем, что E удовлетворяет требованиям Теоремы 1. Очевидно, что $\mu E = 0$. Рассмотрим ряд

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn} W_m(x) W_n(y) = f_0(x,y) + \sum_{j=1}^{\infty} 2^{j-1} f_j(x,y). \tag{46}$$

Из (45), (46) и A) следует, что $|a_{mn}| \le \varepsilon_{mn}$. Пусть $(x,y) \notin E$. Тогда, начиная с некоторого j_0, имеем $(x,y) \notin E_j$ при $j > j_0$. Если $N_j < \min\{P,Q\} \le N_{j+1}$ при $j > j_0$, то из (46) и B) - E) получим

$$\left|\sum_{m=0}^{P}\sum_{n=0}^{Q} a_{mn} W_m(x) W_n(y)\right| = \left|\sum_{m=M_{j+1}}^{P} \sum_{n=M_{j+1}}^{Q} 2^j c_{mn} W_m(x) W_n(y)\right| \le 2^j 2^{-2j} = 2^{-j},$$

Отсюда следует, что ряд (46) сходится к нулю вне E. Теорема 1 доказана.

Прежде чем перейти к доказательству Теоремы 2, докажем следующую лемму.

Лемма 5. *Пусть* $\varphi(x,y) = \sum\limits_{p,q=0}^{2^n-1} a_{pq}W_p(x)W_q(y)$ *– произвольный полином, и пусть* $\sum\limits_{m,n=0}^{\infty} b_{mn}W_m(x)W_n(y)$ *– двойной ряд по системе Уолша. Для двоично иррациональных чисел* x *и* y *и для любых натуральных чисел* k *и* l *имеет место*

$$\varphi(x,y)\sum_{m=0}^{k2^n-1}\sum_{n=0}^{l2^n-1} b_{mn}W_m(x)W_n(y) = \sum_{m=0}^{k2^n-1}\sum_{n=0}^{l2^n-1} c_{mn}W_m(x)W_n(y),$$

где

$$c_{mn} = \sum_{p,q=0}^{2^n-1} a_{pq}b_{m\dotplus p,n\dotplus q}, \quad m,n \geq 0.$$

Доказательство. Для любых натуральных чисел i и j имеем

$$\varphi(x,y)\sum_{m=(i-1)2^n}^{i2^n-1}\ \sum_{n=(j-1)2^n}^{j2^n-1} b_{mn}W_m(x)W_n(y) =$$

$$= \sum_{p,q=0}^{2^n-1} a_{pq}\sum_{m=(i-1)2^n}^{i2^n-1}\ \sum_{n=(j-1)2^n}^{j2^n-1} b_{mn}W_{m\dotplus p}(x)W_{n\dotplus q}(y) =$$

$$= \sum_{m=(i-1)2^n}^{i2^n-1}\ \sum_{n=(j-1)2^n}^{j2^n-1}\left(\sum_{p,q=0}^{2^n-1} a_{pq}b_{m\dotplus p,n\dotplus q}\right)W_m(x)W_n(y) =$$

$$= \sum_{m=(i-1)2^n}^{i2^n-1}\ \sum_{n=(j-1)2^n}^{j2^n-1} c_{mn}W_m(x)W_n(y).$$

Отсюда следует, что

$$\varphi(x,y)\sum_{m=0}^{k2^n-1}\sum_{n=0}^{l2^n-1} b_{mn}W_m(x)W_n(y) = \sum_{m=0}^{k2^n-1}\sum_{n=0}^{l2^n-1} c_{mn}W_m(x)W_n(y).$$

Лемма 5 доказана.

Следующий результат получен в доказательствах Теорем 1 и 2 работы [18].

Теорема C. *Пусть* $\sum\limits_{m,n=0}^{\infty} c_{mn}W_m(x)W_n(y)$ *двойной ряд по системе Уолша, и пусть* c_{mn} *стремится к нулю и существуют подпоследовательности натуральных чисел* $\{g_k\}$ *и* $\{h_k\}$*, стремящиеся к бесконечности, такие, что частичные суммы*

$$\sum_{m=0}^{2^{g_k}-1}\sum_{n=0}^{2^{h_k}-1} c_{mn}W_m(x)W_n(y)$$

стремятся к нулю всюду, за исключением, быть может, некоторого счетного множества отрезков, параллельных координатным осям. Тогда $c_{mn} = 0$ для всех m и n.

Доказательство Теоремы 2. Заметим, что при условии $2^{m+n}\varepsilon^2_{2^m 2^n} \to 0$, в доказательстве Теоремы 1 числа γ_{mn} можно взять равными нулю. Пусть множества E_j и функции $f_j(x,y)$ те же, что и в доказательстве Теоремы 1, при условии $\gamma_{mn} = 0$. Нам остается доказать, что множество $E = \bigcap_{j=0}^{\infty} E_j$ удовлетворяет второму пункту Теоремы 2.

Пусть

$$b_{mn} = o(\varepsilon_{mn}), \tag{47}$$

и пусть существуют подпоследовательности натуральных чисел $\{g_k\}$ и $\{h_k\}$, стремящиеся к бесконечности, такие, что суммы

$$\sum_{m=0}^{2^{g_k}-1} \sum_{n=0}^{2^{h_k}-1} b_{mn} W_m(x) W_n(y)$$

сходятся к нулю всюду вне E, за исключением, быть может, некоторого счетного множества отрезков, параллельных координатным осям. Положим

$$\delta_{mn} = \sup_{\substack{2^m \le p < 2^{m+1} \\ 2^n \le q < 2^{n+1}}} |b_{pq}|. \tag{48}$$

Из (22), (47) и (48) получим

$$\lim_{\substack{m,n\to\infty \\ (m,n)\in G}} \frac{\delta_{mn}}{\varepsilon_{2^m 2^n}} = 0. \tag{49}$$

Обозначим

$$\varphi_j(x,y) = 1 - f_j(x,y). \tag{50}$$

Из (50) и В) следует, что

$$\varphi_j(x,y) = 0, \quad \text{если} \quad (x,y) \in E_j. \tag{51}$$

Пусть $c_{mn} = \sum_{p,q=0}^{\infty} \widehat{\varphi_j}(p,q) b_{m+p,n+q}$, где

$$\widehat{\varphi_j}(p,q) = \int_0^1 \int_0^1 \varphi_j(x,y) W_m(x) W_n(y)\, dx\, dy.$$

Из (51) и Леммы 5 следует, что частичные суммы

$$\sum_{m=0}^{2^{p_k}-1}\sum_{n=0}^{2^{h_k}-1} c_{mn} W_m(x) W_n(y)$$

сходятся к нулю всюду, за исключением, быть может, некоторого счетного множества отрезков, параллельных координатным осям.

Поскольку $\varphi_j(m,n) \neq 0$ лишь для конечного числа пар (m,n), а $b_{mn} \to 0$ при $\min\{m,n\} \to \infty$, то $c_{mn} \to 0$. В силу Теоремы С, $c_{mn} = 0$ для всех m и n, т.е.

$$\sum_{p,q=0}^{\infty} \varphi_j(p,q) b_{p+m,q+n} = 0 \quad \text{для всех} \quad m,n \in \mathbf{N}. \tag{52}$$

Из (50) и (52) получаем

$$b_{mn} - \sum_{p,q=0}^{\infty} f_j(p,q) b_{p+m,q+n} = 0, \quad m,n \in \mathbf{N} \tag{53}$$

Для достаточно больших p и q имеем $[\log_2 p] = [\log_2(p \dotplus m_o)]$ и $[\log_2 q] = [\log_2(q \dotplus n_o)]$. Поэтому, для достаточно больших j из (22), (45), (48), (53), A) и F) следует, что

$$|b_{m_o n_o}| =$$

$$= \Big|\sum_{p,q=0}^{\infty} f_j(p,q) b_{p\dotplus m_o, q\dotplus n_o}\Big| \le \sum_{(m,n)\in D_j} \sum_{k=1}^{2^m}\sum_{l=1}^{2^n} \Big|a_{mn}^{(k)} b_{mn}^{(l)} b_{(2^m+k-1)\dotplus m_o,(2^n+l-1)\dotplus n_o}\Big| \le$$

$$\le 4 \sum_{(m,n)\in D_j} \delta_{mn} 2^m 2^n 2^{-(p_{mn}+j-1)} \le$$

$$\le 16 \max_{(m,n)\in D_j} \frac{\delta_{mn}}{\varepsilon_{2^m 2^n}} \sum_{(m,n)\in D_j} 2^m 2^n 2^{-2p_{mn}} 2^{-(j-1)} = 16 \max_{(m,n)\in D_j} \frac{\delta_{mn}}{\varepsilon_{2^m 2^n}}.$$

Отсюда и из (49) вытекает, что $b_{m_o n_o} = 0$ для всех m_o и n_o. Теорема 2 доказана.

В заключение, выражаю благодарность Г. Г. Геворкяну за ценные советы и постоянное внимание к настоящей работе.

ABSTRACT. We prove that for positive numbers ε_{mn} satisfying the conditions $\varepsilon_{m+1,n} \le \varepsilon_{mn} \le \varepsilon_{m,n-1}$, $\sum_{m,n=0}^{\infty} \varepsilon_{mn}^2 = +\infty$, there exists a null-series by Walsh system $\sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn} W_m(x) W_n(y)$, with coefficients $|a_{mn}| \le \varepsilon_{mn}$. For $\sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_{mo}^2 < +\infty$ and $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_{on}^2 < +\infty$ there exists a set $E \subset [0,1]^2$ of measure zero satisfying the conditions

1. There exists a series $\sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn} W_m(x) W_n(y)$ converging to zero outside E with $|a_{mn}| \le \varepsilon_{mn}$ and $a_{oo} \neq 0$;

2. If a series $\sum_{m,n=0}^{\infty} b_{mn} W_m(x) W_n(y)$ converges to zero outside E and $b_{mn} = o(\varepsilon_{mn})$, then $b_{mn} = 0$ for all m and n.

ЛИТЕРАТУРА

1. D. E. Menchoff, "Sur l'unicite du developpement trigonometrique", C. R. Acad. Sci. Paris, vol. 163, pp. 433 – 436, 1916.
2. Ф. Г. Арутюнян, "Представление функций из L^p, $0 \leq p < 1$, тригонометрическими рядами с быстро убывающими коэффициентами", Изв. АН Арм.ССР, Математика, т. 19, №5, стр. 448 – 466, 1984.
3. Ф. Г. Арутюнян, "Представление измеримых функций почти всюду сходящимися рядами", Докт. дисс., Тбилиси, 1986.
4. О. С. Ивашев-Мусатов, "О коэффициентах Фурье-Стильтьеса сингулярных функций", Изв. АН СССР, Математика, т. 20, стр. 179 – 196, 1956.
5. О. С. Ивашев-Мусатов, "О коэффициентах тригонометрических нуль-рядов", Изв. АН СССР, Математика, т. 21, стр. 559 – 578, 1957.
6. J. E. Littlewood, "On the Fourier coefficients of functions of bounded variation", Qaart. J. Math., Oxford Ser. vol. 7, pp. 219 – 226, 1936.
7. Н. Б. Погосян, "О коэффициентах тригонометрических нуль-рядов", Anal. Math., vol. 11, pp. 139 – 177, 1985.
8. R. Salem, "On singular monotonic functions of Cantor type", J. Math. - Phis., vol. 21, pp. 69 – 82, 1942.
9. A. C. Schaeffer, "The Fourier- Stieltjes coefficients of a functions of bounded variation", Amer. J. Math., vol. 61, pp. 934 – 940, 1939.
10. П. Л. Ульянов, "Решенные и нерешенные проблемы теории тригонометрических и ортогональных рядов", Успехи мат. наук, т. 19, pp. 3 – 69, 1964.
11. В. А. Скворцов, "Об одном примере нуль-ряда по системе Уолша", Матем. заметки, т. 19, стр. 179 – 186, 1976.
12. В. А. Скворцов, "О h-мере M-множеств для системы Уолша", Матем. заметки, т. 21, стр. 335 – 340, 1977.
13. В. А. Скворцов, "О скорости стремления к нулю коэффициентов нуль-рядов по системам Хаара и Уолша", Изв. АН СССР, Математика, т. 41, стр. 703 – 716, 1977.
14. G. G. Gevorkian, "On coefficients of null-series and on sets of uniqueness of trigonometric and Walsh systems", Anal. Math., vol. 14, pp. 219 – 251, 1988.
15. S. Качмаж, Г. Штейнгауз, Теория Ортогональных Рядов, Физматгиз, 1958.
16. А. А. Шнейдер, "О единственности разложений по системе функций Уолша", Мат. сб., т. 24, стр. 279 – 300, 1949.
17. А. М. Олевский, "О продолжении последовательности функций до полной ортонормированной системы", Матем. заметки,, т. 6, №6, стр. 737 - 747, 1969.
18. Х. О. Мовсисян, "О единственности двойных рядов по системам Хаара и Уолша", Изв. АН Арм.ССР, Математика, т. 9, №1, стр. 40 – 61, 1974.

11 Декабря 1993

Ереванский государственный университет