О НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ СУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

А. М. Джрбашян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 29, №1, 1994

В статье рассмотрены некоторые классы субгармонических функций, обладающих неотрицательными гармоническими мажорантами в полуплоскости после применения оператора дробного интегрирования Вейля. Найдены представления типа Рисса и полное описание роста этих функций, которые, по существу, описывают все субгармонические функции, чьи вейлевские первообразные имеют неотрицательные гармонические мажоранты в полуплоскости.

§0. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей статье методы [1] использованы для нахождения полного описания роста, а также представлений некоторых классов субгармонических функций, имеющих неотрицательные гармонические мажоранты в нижней полуплоскости $G^{(-)} = \{z:\ \operatorname{Im} z < 0\}$ после применения оператора дробного интегрирования Вейля

$$W^{-\alpha} u(z) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{y} (y-t)^{\alpha-1} u(x+it)\, dt, \quad z = x+iy, \quad \alpha > 0.$$

Выбор рассмотренных классов субгармонических функций обусловлен удобством применения этого оператора и его обращения. Необходимо наложить ограничение на поведение $|u(z)|$ на бесконечности, чтобы обеспечить субгармоничность $W^{-\alpha} u(z)$ в $G^{(-)}$, если субгармонична в $G^{(-)}$ функция $u(z)$. В этом смысле описание роста и представления типа Рисса, данные в этой статье, по существу полностью описывают все субгармонические функции, чьи вейлевские первообразные имеют неотрицательные гармонические мажоранты в полуплоскости. С другой стороны, в статье содержатся усиления и распространения результатов [2 – 4] на субгармонические функции, а также указан путь, по которому все утверждения теории факторизации и граничных свойств классов голоморфных функций обобщенно-ограниченного вида в полуплоскости, построенной в [2 – 12], могут быть распространены на субгармонические функции.

§1. ПОТЕНЦИАЛЫ ТИПА ГРИНА ДЛЯ ПОЛУПЛОСКОСТИ

В представлениях типа Рисса для субгармонических функций, установленных в дальнейшем, использованы потенциалы типа Грина для полуплоскости, сходящиеся для широких классов борелевских мер, ассоциированных с субгармоническими функциями. Ниже мы вводим эти потенциалы и исследуем некоторые их свойства.

1.1 Предварительно приведем некоторые определения и утверждения.

Определение. Пусть $u(z)$ – функция, измеримая на любом луче $\{z = x - i\sigma:\ -\infty < x < +\infty, 0 < \sigma < +\infty\}$. Тогда $u(z) \in M_\beta$ $(0 < \beta < +\infty)$, если существует угловая область $\Lambda(\delta_0, R_0) = \{z:\ |\arg z + \frac{\pi}{2}| < \delta_0, |z| < R_0\}$ $(0 < \delta_0 < \frac{\pi}{2}, R_0 > 0)$ такая, что

$$\sup_{z \in K} \int_1^{+\infty} \sigma^{\beta-1} |u(z - i\sigma)| \, d\sigma < +\infty \tag{1.1}$$

для любого компакта $K \subset \Lambda(\delta_0, R_0)$.

Ограничение $u(z) \in M_\beta$, по существу, представляет из себя условие убывания $|u(z)|$ на бесконечности, удобное для применения оператора Вейля (см. также [7, 13]. В частности, вводя в рассмотрение обратный оператор

$$W^\alpha u(z) \equiv \frac{\partial^p}{\partial y^p} W^{-(p-\alpha)} u(z), \quad z = x + iy, \quad 0 \le p - 1 < \alpha \le p,$$

можно доказать следующую лемму.

Лемма 1.1. *Пусть $u(z)$ субгармонична в $G^{(-)}$, и пусть $u(z) \in M_p$ для какого-либо натурального p. Тогда для любого $\alpha \in (0, p]$:*

1°. *$W^{-\alpha} u(z)$ непрерывна и субгармонична в $G^{(-)}$,*

2°. $W^\alpha W^{-\alpha} u(z) = u(z),\ z \in G^{(-)}$. *(1.2)*

Доказательство. 1°. Поскольку $u(z) \in M_p$, то интеграл $W^{-\alpha} u(z)$ абсолютно сходится при любом $z \in G^{(-)}$. По той же причине, для фиксированной точки $z_0 = x_0 + iy_0 \in G^{(-)}$ интеграл

$$\int_M^{+\infty} \sigma^{\alpha-1} |u(z - i\sigma)| \, d\sigma, \quad |z - z_0| < \frac{|y_0|}{2},$$

сколь угодно мал, если $M > 0$ достаточно велико. С другой стороны, можно убедиться в том, что для любого конечного $M > 0$ интеграл

$$\int_0^M \sigma^{\alpha-1}\,|u(z-i\sigma)|\,d\sigma$$

является непрерывной функцией в точке $z = z_0$. С этой целью можно использовать, например, риссовское представление $u(z)$ в произвольном круге, содержащемся в $G^{(-)}$ и содержащем прямоугольник $\{z-i\sigma:\ |z-z_0| < |y_0|/2\},\ 0 < \sigma < M$. Отсюда следует, что $W^{-\alpha}u(z)$ непрерывна в $G^{(-)}$. Неравенство между $W^{-\alpha}u(z)$ и его средним значением легко получается изменением порядка интегрирования. 2° следует из результатов работы [7] (см. Замечание после Леммы 1.2).

1.2. Рассмотренные ниже потенциалы типа Грина построены с применением произведений типа Бляшке для $G^{(-)}$, введенных и исследованных в [2,4]. Элементарные факторы такого произведения были определены по формуле

$$b_\alpha(z,\zeta) = \exp\left\{-\int_{-|\eta|}^{|\eta|}\frac{(|\eta|-|t|)^\alpha\,dt}{[i(z-\xi)-t]^{1+\alpha}}\right\},\quad \alpha > -1. \tag{1.3}$$

При этом оказывается, что $b_\alpha\ \left(b_0(z,\zeta) = \dfrac{(z-\zeta)}{(z-\bar\zeta)}\right)$ голоморфна в $G^{(-)}$ и обращается в нуль только в точке $\zeta = \xi + i\eta \in G^{(-)}$, где имеет нуль первого порядка. Кроме того, при любых $z,\zeta \in G^{(-)}$

$$-W^{-\alpha}\log|b_\alpha(z,\zeta)| = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\operatorname{Re}\int_{-|\eta|}^{|\eta|}\frac{(|\eta|-|t|)^\alpha}{i(z-\xi)-t}\,dt,\quad \alpha > -1, \tag{1.4}$$

и этот интеграл неотрицателен при $\alpha \geq 0$.

Лемма 1.2. *Пусть $\nu(\zeta)$ – неотрицательная борелевская мера в $G^{(-)}$, удовлетворяющая при некотором $\alpha > 0$ условию*

$$\iint_{G^{(-)}} |\eta|^{1+\alpha}\,d\nu(\zeta) < +\infty \quad (\zeta = \xi + i\eta). \tag{1.5}$$

Тогда потенциал типа Грина

$$I_\alpha(z) = -\iint_{G^{(-)}} \log|b_\alpha(z,\zeta)|\,d\nu(\zeta) \tag{1.6}$$

является функцией, супергармонической в $G^{(-)}$.

Доказательство. Пусть $\rho_0 < 0$ любое число, и пусть $z \in G^{(-)}_{\rho_0} = \{z:\ \operatorname{Im} z <$

$<\rho_0\}$. Тогда, применяя (1.4), легко можно проверить, что для любого $\zeta \in G^{(-)}\setminus$ $\setminus G^{(-)}_{\rho_0/2}$ имеем $|\log|b_\alpha(z,\zeta)|| \leq C_{\alpha,\rho_0}|\eta|^{1+\alpha}$, где $C_{\alpha,\rho_0}>0$– константа, зависящая только от α и ρ_0. Отсюда следует, что

$$I_{\alpha,\rho_0}(z) = -\iint_{G^{(-)}\setminus G^{(-)}_{\rho_0/2}} \log|b_\alpha(z,\zeta)|\,d\nu(\zeta)$$

является гармонической в $G^{(-)}_{\rho_0}$ функцией. Для рассмотрения оставшейся части $I_\alpha(z)$, напомним (см. [1]), что функция

$$U_\alpha(z,\zeta) = \log|b_\alpha(z,\zeta)| - \log|b_0(z,\zeta)| \tag{1.7}$$

гармонична в $G^{(-)}$ и представима в виде

$$U_\alpha(z,\zeta) = C_\alpha + \mathrm{Re}\int_{|\eta|}^{+\infty}\left[\frac{\tau^\alpha}{(iz-i\zeta+\tau)^{1+\alpha}} - \frac{1}{iz-i\zeta+\tau}\right]d\tau -$$
$$- \mathrm{Re}\int_0^{|\eta|}\frac{\tau^\alpha\,d\tau}{(iz-i\bar\zeta-\tau)^{1+\alpha}} + \mathrm{Re}\int_0^{|\eta|}\frac{d\tau}{iz-i\bar\zeta-\tau},\quad z,\zeta\in G^{(-)}, \tag{1.8}$$

где

$$C_\alpha = \int_0^{+\infty}\left[1-\left(\frac{\sigma}{1+\sigma}\right)^\alpha\right]\frac{d\sigma}{1+\sigma} > 0$$

есть постоянная, а другие слагаемые - суть гармонические в $G^{(-)}$ функции. Легко проверить, что при любых $z\in\overline{G^{(-)}_{\rho_0}}$ и $\zeta\in G^{(-)}_{\rho_0/2}$

$$\left|C_\alpha - \int_0^{|\eta|}\frac{\tau^\alpha\,d\tau}{(iz-i\bar\zeta-\tau)^{1+\alpha}} + \int_0^{|\eta|}\frac{d\tau}{iz-i\bar\zeta-\tau}\right| \leq C'_{\alpha,\rho_0}|\eta|^{1+\alpha}, \tag{1.9}$$

где $C'_{\alpha,\rho_0}>0$ – постоянная, зависящая только от α и ρ_0. Для оценки оставшегося слагаемого из (1.8) обозначим

$$J = \int_{|\eta|}^{+\infty}\left|\frac{\tau^\alpha}{(iz-i\zeta+\tau)^{1+\alpha}} - \frac{1}{iz-i\zeta+\tau}\right|d\tau =$$
$$= \int_0^{+\infty}\left|1-\left(\frac{\sigma+\left|\frac{\eta}{y}\right|}{i\frac{x-\xi}{|y|}+1+\sigma}\right)^\alpha\right|\frac{d\sigma}{\left|i\frac{x-\xi}{|y|}+1+\sigma\right|},\quad z=x+iy, \tag{1.10}$$

и рассмотрим в отдельности случаи $|\eta|>2|y|$ и $|\eta|\leq 2|y|$ $(\zeta=\xi+i\eta\in G^{(-)}_{\rho_0/2}$, $z=x+iy\in\overline{G^{(-)}_{\rho_0}})$. Если $|\eta|>2|y|$, то

$$J = \left(\int_0^{\left|\frac{\eta}{y}\right|-2} + \int_{\left|\frac{\eta}{y}\right|-2}^{+\infty}\right)\left|1-\left(\frac{\sigma+\left|\frac{\eta}{y}\right|}{i\frac{x-\xi}{|y|}+1+\sigma}\right)^\alpha\right|\frac{d\sigma}{\left|i\frac{x-\xi}{|y|}+1+\sigma\right|} \equiv J_1+J_2, \tag{1.11}$$

где, очевидно

$$J_1 < 2^\alpha \left|\frac{\eta}{y}\right|^\alpha \int_0^{+\infty} \frac{d\sigma}{(1+\sigma)^{1+\alpha}} + \log\left|\frac{\eta}{y}\right| < C''_{\alpha,\rho_0} |\eta|^{1+\alpha}. \tag{1.12}$$

С другой стороны, обозначая

$$\frac{\sigma + \left|\frac{\eta}{y}\right|}{i\frac{x-\xi}{|y|} + 1 + \sigma} = 1 - \omega, \quad \omega = \frac{i\frac{x-\xi}{|y|} + 1 - \left|\frac{\eta}{y}\right|}{i\frac{x-\xi}{|y|} + 1 + \sigma},$$

имеем $|\omega| < 1$ тогда и только тогда, когда $\sigma > \left|\frac{\eta}{y}\right| - 2$. К тому же, если $|\omega| < 1$, то $|(1-\omega)^\alpha - 1|/|\omega| \le M_\alpha < +\infty$. Поэтому

$$J_2 \le 2M_\alpha \left(\left|\frac{x-\xi}{y}\right| + \left|\frac{\eta}{y}\right| - 1\right) \int_{\left|\frac{\eta}{y}\right|-2}^{+\infty} \left(\left|\frac{x-\xi}{y}\right| + 1 + \sigma\right)^{-2} d\sigma <$$

$$< 2M_\alpha \le C'''_{\alpha,\rho_0} |\eta|^{1+\alpha}. \tag{1.13}$$

Если $|\rho_0|/2 < |\eta| \le 2|y|$, то $|\omega| < 1$ при любом $\sigma > 0$. Тем самым

$$J \le 2M_\alpha \left(\left|\frac{x-\xi}{y}\right| + \left|1 - \left|\frac{\eta}{y}\right|\right|\right) \int_0^{+\infty} \left(\left|\frac{x-\xi}{y}\right| + 1 + \sigma\right)^{-2} d\sigma \le$$

$$\le 2M_\alpha \le C'''_{\alpha,\rho_0} |\eta|^{1+\alpha}.$$

Используя (1.8) - (1.13) и последнюю оценку, получаем

$$|U_\alpha(z\zeta)| \le C^*_{\alpha,\rho_0} |\eta|^{1+\alpha}, \quad z \in \overline{G^{(-)}_{\rho_0}}, \zeta \in G^{(-)}_{\rho_0/2},$$

где $C^*_{\alpha,\rho_0} > 0$ - постоянная, зависящая только от α и ρ_0. Следовательно, из (1.7) и (1.5) имеем

$$I^*_{\alpha,\rho_0} = -\iint_{G^{(-)}_{\rho_0/2}} \log|b_\alpha(z,\zeta)|\, d\nu(\zeta) =$$

$$= -\iint_{G^{(-)}_{\rho_0/2}} \log|b_0(z,\zeta)|\, d\nu(\zeta) - \iint_{G^{(-)}_{\rho_0/2}} U_\alpha(z,\zeta)\, d\nu(\zeta),$$

где последний интеграл абсолютно и равномерно сходится в $G^{(-)}_{\rho_0}$, а $I^*_{\alpha,\rho_0}(z)$ супергармонична в $G^{(-)}_{\rho_0}$, поскольку является суммой обычного потенциала Грина и функции, гармонической в $G^{(-)}_{\rho_0}$. Отсюда следует нужное утверждение, так как $I_\alpha(z) = I_{\alpha,\rho_0}(z) + I^*_{\alpha,\rho_0}(z)$ при любом $\rho_0 < 0$.

Лемма 1.3. *Пусть $\nu(\zeta)$ – неотрицательная борелевская мера в $G^{(-)}$, удовлетворяющая условию (1.5) при некотором $\alpha > 0$. Тогда потенциал типа Грина (1.6) имеет следующие свойства :*

1°. $I_\alpha(z) \in M_\beta$ *при любом* $\beta \in (0, 1+\alpha)$.

2°. $W^{-\alpha} I_\alpha(z)$ *непрерывная супергармоническая функция в* $G^{(-)}$

$$W^{-\alpha} I_\alpha(z) = -\iint_{G^{(-)}} W^{-\alpha} \log|b_\alpha(z,\zeta)|\, d\nu(\zeta) \geq 0, \quad z \in G^{(-)}, \tag{1.14}$$

где интеграл равномерно сходится в любой полуплоскости $G_\rho^{(-)}$ ($\rho < 0$) *и*

$$\int_{J_1}^{+\infty} W^{-\alpha} I_\alpha(-it)\, \frac{dt}{t} < +\infty. \tag{1.15}$$

3°. $W^{-\alpha} I_\alpha(z)$ *представима в виде обычного потенциала Грина :*

$$W^{-\alpha} I_\alpha(z) = -\iint_{G^{(-)}} \log|b_0(z,\zeta)|\, d\nu_\alpha(\zeta), \quad z \in G^{(-)}, \tag{1.16}$$

где $\nu_\alpha(\zeta)$ *– неотрицательная борелевская мера, удовлетворяющая (1.5) при* $\alpha = 0$.

Доказательство. 1°. Пусть $\rho_0 < 0$ и $z = x + iy \in \overline{G_{\rho_0}^{(-)}}$. Полагая, что $\alpha \leq \beta < 1 + \alpha$, обозначим

$$I = \int_0^{+\infty} \sigma^{\beta-1}\, d\sigma \iint_{G^{(-)}} |\log|b_\alpha(z - i\sigma, \zeta)||\, d\nu(\zeta) = \left(\iint_{G^{(-)}\setminus G_y^{(-)}} + \iint_{G_y^{(-)}}\right) \times$$
$$\times \left(\int_0^{+\infty} \sigma^{\beta-1} |\log|b_\alpha(z - i\sigma, \zeta)||\, d\sigma\right) d\nu(\zeta) \equiv I_1 + I_2 \tag{1.17}$$

и оценим I_1 и I_2 по отдельности. Применяя (1.3), получим

$$I_1 \leq \iint_{G^{(-)}\setminus G_y^{(-)}} d\nu(\zeta) \int_{-|\eta|}^{|\eta|} (|\eta| - |t|)^\alpha\, dt \int_0^{+\infty} \frac{\sigma^{\beta-1}\, d\sigma}{(|y| - t + \sigma)^{1+\alpha}} =$$
$$= \int_0^{+\infty} \frac{\sigma^{\beta-1}\, d\sigma}{(1+\sigma)^{1+\alpha}} \iint_{G^{(-)}\setminus G_y^{(-)}} |\eta|^\beta\, d\nu(\zeta) \int_{-1}^{1} \frac{(1 - |t|)^\alpha\, dt}{\left(\left|\frac{y}{\eta}\right| - t\right)^{1+\alpha-\beta}} \leq$$
$$\leq C(\alpha, \beta, \rho_0) \iint_{G^{(-)}\setminus G_y^{(-)}} |\eta|^{1+\alpha}\, d\nu(\zeta), \tag{1.18}$$

где $C(\alpha, \beta, \rho_0) > 0$ – постоянная, зависящая только от α, β и ρ_0.

Далее, положив

$$I_2 = \iint_{G_y^{(-)}} d\nu(\zeta) \int_{|\eta|}^{+\infty} \sigma^{\beta-1} |\log|b_\alpha(z - i\sigma, \zeta)||\, d\sigma +$$
$$+ \iint_{G_y^{(-)}} d\nu(\zeta) \int_0^{|\eta|} \sigma^{\beta-1} |\log|b_\alpha(z - i\sigma, \zeta)||\, d\sigma \equiv J_1 + J_2 \tag{1.19}$$

и снова применив (1.3), получим

$$J_1 \le \iint_{G_y^{(-)}} d\nu(\zeta) \int_{-|\eta|}^{|\eta|} (|\eta| - |t|)^\alpha \, dt \int_{|\eta|}^{+\infty} \frac{\sigma^{\beta-1}\, d\sigma}{(|y| - t + \sigma)^{1+\alpha}} \le$$
$$\le C'(\alpha, \beta, \rho_0) \iint_{G_y^{(-)}} |\eta|^{1+\alpha} \, d\nu(\zeta). \tag{1.20}$$

Для оценки J_2 воспользуемся представлением

$$\log|b_\alpha(z,\zeta)| = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{\alpha-k} \left(\frac{|\eta|}{i(z-\xi)}\right)^{\alpha-k} - \mathrm{Re} \int_0^{|\eta|} \frac{\tau^{\alpha-p}\, d\tau}{(iz - i\zeta + \tau)^{1+\alpha-p}} -$$
$$- \mathrm{Re} \int_0^{|\eta|} \frac{\tau^\alpha \, d\tau}{(iz - i\bar{\zeta} - \tau)^{1+\alpha}} \, (\alpha \le p < 1 + \alpha),$$

полученным из (1.3) интегрированием по частям. Имеем

$$J_2 \le \iint_{G_y^{(-)}} d\nu(\zeta) \int_0^{|\eta|} \left(\sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{\alpha-k} \left(\frac{|\eta|}{|y|+\sigma}\right)^{\alpha-k} + \int_0^{|\eta|} \frac{\tau^{\alpha-p}\, d\tau}{\left||y| - |\eta| + \sigma + \tau\right|^{1+\alpha-p}} + \right.$$
$$\left. + \int_0^{|\eta|} \frac{\tau^\alpha \, d\tau}{\left(|y| + |\eta| - \tau + \sigma\right)^{1+\alpha}} \right) \sigma^{\beta-1} \, d\sigma \equiv K_1 + K_2 + K_3. \tag{1.21}$$

При любом $\gamma \in (0, \alpha]$

$$|\eta|^\gamma \int_0^{|\eta|} \frac{\sigma^{\beta-1}\, d\sigma}{(|y|+\sigma)^\gamma} \le C''(\gamma, \beta, \rho_0)\, |\eta|^{1+\alpha}$$

Отсюда заключаем, что

$$K_1 \le \sum_{k=0}^{p-1} \frac{C''(\alpha-k, \beta, \rho_0)}{\alpha-k} \iint_{G_y^{(-)}} |\eta|^{1+\alpha} \, d\nu(\zeta). \tag{1.22}$$

С другой стороны

$$K_3 \le C'''(\alpha, \beta, \rho_0) \iint_{G_y^{(-)}} |\eta|^{1+\alpha} \, d\nu(\zeta). \tag{1.23}$$

Теперь заметим, что $K_2 = \iint_{G_y^{(-)}} |\eta|^\beta \, L(\eta)\, d\nu(\zeta)$, где

$$L(\eta) = \int_0^1 \sigma^{\beta-1}\, d\sigma \int_0^1 \frac{\tau^{\alpha-p}\, d\tau}{\left(\left|\frac{y}{\eta}\right| - 1 + \sigma + \tau\right|^{1+\alpha-p}}$$

и $\left||y/\eta| - 1 + \sigma\right| < 1$. Нетрудно видеть, что $L(\eta) \le C^{IV}(\alpha, \beta) < +\infty$, и для K_2 имеет место оценка типа (1.22) - (1.23). Следовательно, по (1.21), $J_2 \le$

$\leq C^{\vee}(\alpha,\beta,\rho_0) \iint_{G^{(-)}_y} |\eta|^{1+\alpha}\, d\nu(\zeta)$. В силу (1.5) и (1.17) (1.20), мы имеем

$$I \leq C^{*}(\alpha,\beta,\rho_0) \iint_{G^{(-)}} |\eta|^{1+\alpha}\, d\nu(\zeta) < +\infty,$$

где $C^{*}(\alpha,\beta,\rho_0) > 0$ постоянная, зависящая только от α, β и ρ_0. Это очевидным образом доказывает включение $I_\alpha(z) \in M_\beta$ $(\alpha \leq \beta < 1+\alpha)$ и равенство в (1.14), где интеграл абсолютно и равномерно сходится в $G^{(-)}_\rho$. Далее, доказанное включение верно также для любых $\beta \in (0, 1+\alpha)$, поскольку, очевидно, что $M_{\beta_1} \subset M_{\beta_2}$ для любых $\beta_1 > \beta_2$. Неравенство в (1.14) справедливо, так как интеграл в (1.4) неотрицателен. Согласно Лемме 1.1 $W^{-\alpha} I_\alpha(z)$ непрерывна и супергармонична в $G^{(-)}$, поскольку $I_\alpha(z) \in M_p$ $(\alpha \leq p < 1+\alpha)$. Для доказательства представления (1.16) заметим, что в силу (1.14)

$$\begin{aligned}
\varphi(y) &= \Gamma(1+\alpha) \int_{-\infty}^{+\infty} \left|W^{-\alpha} I_\alpha(x+iy)\right| dx = \\
&= \pi \iint_{G^{(-)}} d\nu(\zeta) \int_{-|\eta|}^{|\eta|} (|\eta|-|t|)^\alpha\, dt\, \frac{|y|-t}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x-\xi)^2+(|y|-t)^2} = \\
&= \pi \iint_{G^{(-)}} d\nu(\zeta) \int_{-|\eta|}^{|\eta|} (|\eta|-|t|)^\alpha \operatorname{sign}(|y|-t)\, dt < \\
&< \frac{2\pi}{1+\alpha} \iint_{G^{(-)}} |\eta|^{1+\alpha}\, d\nu(\zeta) < +\infty
\end{aligned}$$

при любом $y < 0$. С другой стороны, $\varphi(y) \to 0$ при $y \to -0$. Поэтому, используя результаты [1, 14], приходим к представлению (1.16), а последнее влечет (1.15).

Замечание 1. Соотношение

$$W^{-\alpha} \log|b_\alpha(z,\zeta)| = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{|\eta|} \tau^{\alpha-1} \log|b_0(z,\zeta+i\tau)|\, d\tau, \quad z,\zeta \in G^{(-)}, \quad \alpha > 0,$$

является простым следствием (1.4). Используя его, в некоторых специальных случаях можно найти явные представления для меры $\nu_\alpha(\zeta)$ из (1.16). Можно доказать также аналогичную теорему для факторов типа Бляшке М. М. Джрбашяна [15, гл. IX]. Применяя формулы (3.4), (3.9), (3.10) и (3.28), приходим к равенству

$$|z|^{-\alpha} D^{-\alpha} \log|A_\alpha(z,\zeta)| = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{|\eta|}^{1} (1-x)^{\alpha-1} \log\left|A_\alpha\left(z, \frac{\zeta}{x}\right)\right| dx,$$

которое справедливо для всех $\alpha > 0$ и $\zeta, z \in \mathbf{D} = \{z: |z| < 1\}$.

§2. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ СУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ С НЕПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ ВЕЙЛЕВСКИМИ ПЕРВООБРАЗНЫМИ

Рассмотренные ниже классы субгармонических функций являются обобщениями исследованных в [3] классов голоморфных функций обобщенно-ограниченного вида в полуплоскости.

Определение. Обозначим через s_α $(0 \le \alpha < +\infty)$ класс субгармонических в $G^{(-)}$ функций $u(z)$, удовлетворяющих условиям

(I) $u(z) \in M_p$ для целого $p \in [\alpha, 1+\alpha)$,

(II) $W^{-\alpha} u(z) \le 0$, $z \in G^{(-)}$,

(III) ассоциированная мера $u(z)$ обращается в нуль в окрестности бесконечности,

(IV) если $\alpha = p \ge 0$ – целое число, то

$$\int_1^{+\infty} W^{-\alpha} u(-it)\, \frac{dt}{t} > -\infty.$$

2.1. Нашей целью является нахождение представлений типа Рисса для функций этих классов.

Лемма 2.1. *Если $u(z) \in s_\alpha$ $(0 \le \alpha < +\infty)$, то ассоциированная мера $\nu(\zeta)$ этой функции удовлетворяет условию (1.5) и*

$$u(z) = \iint_{G^{(-)}} \log |b_\alpha(z,\zeta)|\, d\nu(\zeta) + u_*(z), \quad z \in G^{(-)}, \tag{2.1}$$

где $u_*(z)$ – гармоническая функция из s_α.

Доказательство. Пусть $\alpha > 0$, и пусть D ограниченная область такая, что $\overline{D} \subset G^{(-)}$. Тогда функция

$$u_D(z) = u(z) - \iint_D \log |b_\alpha(z,\zeta)|\, d\nu(\zeta)$$

является субгармонической в $G^{(-)}$ и гармонической в D, и по Лемме 1.3 $u_D(z) \in M_p$. Отсюда и из Леммы 1.2 имеем

$$W^{-\alpha} u_D(z) = W^{-\alpha} u(z) - \iint_D W^{-\alpha} \log |b_\alpha(z,\zeta)|\, d\nu(\zeta), \quad z \in G^{(-)}, \tag{2.2}$$

и, следовательно

$$W^{-\alpha}u_D(z) \le -\iint_D W^{-\alpha}\log|b_\alpha(z,\zeta)|\,d\nu(\zeta) = V_D(z),$$

где, в силу Леммы 1.3, $V_D(z)$ неотрицательная супергармоническая функция. Используя представление (1.16), получаем

$$\sup_{y<0}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[W^{-\alpha}u_D(x+iy)\right]^+ dx \le 2\pi\iint_{G^{(-)}}|\eta|\,d\nu_\alpha(\zeta) < +\infty.$$

Тем же путем легко показать, что

$$\lim_{y\to+0}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[W^{-\alpha}u_D(x+iy)\right]^+ dx = 0.$$

Следовательно, по Теореме 1 из [1] $W^{-\alpha}u_D(z) \le 0$ в $G^{(-)}$ (см. также замечание к этой теореме). Применяя (2.2), получаем $V_D(z) \le -W^{-\alpha}u(z)$, $z \in G^{(-)}$. Однако, мера $\nu(\zeta)$ исчезает при достаточно больших $|\zeta|$, т.е. при $|\zeta| > R_*$. Поэтому, используя (1.4), получаем

$$+\infty > -W^{-\alpha}u(-2iR_*) \ge \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\iint_D d\nu(\zeta)\int_{-|\eta|}^{|\eta|}\frac{(|\eta|-|t|)^\alpha(2R_*-t)}{(2R_*-t)^2+\xi^2}\,dt \ge$$
$$\ge \frac{1}{5R_*\Gamma(2+\alpha)}\iint_D|\eta|^{1+\alpha}\,d\nu(\zeta).$$

Исчерпывая $G^{(-)}$ конечными областями D, приходим к (1.5). Далее, определяя $u_*(z)$ по формуле (2.1) и используя Лемму 1.3, получаем, что $u_*(z) \in s_\alpha$. Для завершения доказательства остается заметить, что наши утверждения очевидны при $\alpha = 0$.

2.2. Перейдем теперь к доказательству основной теоремы о параметрических представлениях классов s_α.

Теорема 2.1. *Класс s_α $(0 \le \alpha < +\infty)$ совпадает с множеством функций, представимых в виде*

$$u(z) = \iint_{G^{(-)}}\log|b_\alpha(z,\zeta)|\,d\nu(\zeta) -$$
$$-\operatorname{Re}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\pi}\exp\left(-i\frac{\pi}{2}(1+\alpha)\right)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\mu(t)}{(z-t)^{1+\alpha}}, \qquad (2.3)$$

где $z \in G^{(-)}$, $\nu(\zeta)$ – неотрицательная борелевская мера в $G^{(-)}$, обращающаяся в нуль в окрестности ∞ и такая, что

$$\iint_{G^{(-)}} |Im\zeta|^{1+\alpha}\, d\nu(\zeta) < +\infty, \tag{2.4}$$

а $\mu(t)$ – неубывающая функция такая, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mu(t)}{1+|t|^{1+\alpha-p}} < +\infty. \tag{2.5}$$

Доказательство. Пусть $u(z) \in s_\alpha$ $(0 \le \alpha < +\infty)$. По Лемме 2.1 ассоциированная мера $u(z)$ удовлетворяет условию (2.4) и $u(z)$ представима в виде (2.1), где $u_*(z) \in s_\alpha$ – гармоническая функция. По Теореме 4 из [13], $u_*(z)$ может быть записана в виде последнего интеграла (2.3), где $\mu(t)$ удовлетворяет необходимым условиям. Обратно, пусть $u(z)$ представима в виде (2.3) – (2.5). Тогда по Теореме 4 из [13] последний интеграл в (2.3) – гармоническая функция класса s_α. В то же время, по Лемме 1.3 первое слагаемое правой части (2.3) является также функцией из s_α. Отсюда, $u(z) \in s_\alpha$.

Замечание 2. Воспользовавшись Леммой 1.3 и формулой (11) из [13], заключаем, что, если $u(z) \in s_\alpha$ $(0 \le \alpha < +\infty)$, $z = x + iy \in G^{(-)}$, то

$$W^{-\alpha} u(z) = \iint_{G^{(-)}} W^{-\alpha} \log|b_\alpha(z,\zeta)|\, d\nu(\zeta) + \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mu(t)}{(x-t)^2+y^2}, \tag{2.6}$$

где $\nu(\zeta)$ и $\mu(t)$ – меры из представлений (2.3) – (2.5). В силу (1.16)

$$W^{-\alpha} u(z) = \iint_{G^{(-)}} \log|b_0(z,\zeta)|\, d\nu_\alpha(\zeta) + \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mu(t)}{(x-t)^2+y^2}, \tag{2.7}$$

где $z = x + iy \in G^{(-)}$, $\nu_\alpha(\zeta)$ – некоторая неотрицательная борелевская мера в $G^{(-)}$, удовлетворяющая (2.4) при $\alpha = 0$.

Замечание 3. Введем класс S_α $(0 \le \alpha < +\infty)$ как множество тех функций, субгармонических в $G^{(-)}$, которые представимы в виде разности двух функций из s_α. Очевидно, S_α совпадает с множеством тех функций $u(z)$, субгармонических в $G^{(-)}$, чьи вейлевские α-первообразные представимы в виде (2.7), с мерами $\nu_\alpha(\zeta)$ из определенных классов, а $\mu(t)$ – суть разность любых двух неубывающих функций, удовлетворяющих (2.5). Это представление, очевидно, описывает подкласс функций, субгармонических и имеющих неотрицательные гармонические мажоранты в $G^{(-)}$.

§3. РОСТ ФУНКЦИЙ КЛАССА S_α

3.1. В этом пункте нашей целью является доказательство следующей теоремы.

Теорема 3.1. 1°. *Класс S_α $(0 \le \alpha < +\infty)$ совпадает с множеством тех функций $u(z) \in M_p$ $(\alpha \le p < 1 + \alpha)$, субгармонических в $G^{(-)}$, которые удовлетворяют условиям*

$$\liminf_{R\to+\infty} \frac{1}{R} \int_0^\pi \left|W^{-\alpha}u(Re^{-i\theta})\right| \sin\theta \, d\theta = 0, \tag{3.1}$$

$$\liminf_{R\to+\infty} \liminf_{y\to-0} \int_{-R}^{R} \left|W^{-\alpha}u(x+iy)\right| \frac{dx}{1+|x|^{1+\alpha-p}} < +\infty \tag{3.2}$$

и ассоциированные меры которых обращаются в нуль в окрестности ∞.

2°. *Если $u(z) \in S_\alpha$ $(0 \le \alpha < +\infty)$, то существует*

$$\lim_{R\to+\infty} \frac{1}{R} \int_0^\pi \left|W^{-\alpha}u(Re^{-i\theta})\right| \sin\theta \, d\theta = 0. \tag{3.3}$$

Функция $\mu(t)$ в представлениях (2.3) (2.4) и (2.6) - (2.7) может быть найдена из соотношений

$$\mu_\pm(t) = \lim_{y\to-0} \int_0^t \left[W^{-\alpha}u(x+iy)\right]^\pm dx, \quad -\mu(t) = \mu_+(t) - \mu_-(t), \tag{3.4}$$

где $\mu_\pm(t)$ неубывающие функции, удовлетворяющие условию (2.5). Если $\mu_\pm(t)$ найдены из (3.4), то для любого сегмента $[a,b] \subset (-\infty, +\infty)$ и для любой функции $g(x)$, непрерывной в $[a,b]$

$$\lim_{y\to-0} \int_a^b \left[W^{-\alpha}u(x+iy)\right]^\pm g(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,d\mu_\pm(x). \tag{3.5}$$

Кроме того

$$\lim_{y\to-0} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[W^{-\alpha}u(x+iy)\right]^\pm \frac{dx}{1+|x|^{1+\alpha-p}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mu_\pm(x)}{1+|x|^{1+\alpha-p}}. \tag{3.6}$$

Замечание 4. Очевидно, что, если $u(z) \in S_\alpha$ $(0 \le \alpha < +\infty)$, то $u(z) \in s_\alpha$ тогда и только тогда, когда по какому - либо из соотношений (3.4) - (3.6) $\mu_-(t) \equiv 0$ $(-\infty < t < +\infty)$. Если $\mu_\pm(t) \equiv 0$, то $u(z)$ является потенциалом типа Грина.

3.2. Для доказательства Теоремы 3.1 мы используем следующую лемму.

Лемма 3.1. *Пусть $\alpha \ge 0$ – любое число и $u(z) \in M_p$ $(\alpha \le p < 1+\alpha)$ – функция, субгармоническая в $G^{(-)}$ и удовлетворяющая условиям (3.1), (3.2). Если ассоциированная мера $\nu(\zeta)$ функции $u(z)$ обращается в нуль при $|\zeta| > R_*$, то $\nu(\zeta)$ подчинена условию (2.4).*

Доказательство. Пусть $\rho < 0$ любое число. Тогда функция

$$U_\rho(z) = u(z) - \iint_{G^{(-)}} \log|b_\alpha(z,s)|\, d\nu(s)$$

гармонична в $G_\rho^{(-)}$, $U_\rho(z) \in M_\rho$ и

$$W^{-\alpha}U_\rho(z) = W^{-\alpha}u(z) - \iint_{G_\rho^{(-)}} W^{-\alpha}\log|b_\alpha(z,s)|\, d\nu(s)$$

также гармонична в $G_\rho^{(-)}$ (по Лемме 1.3). Составив разность двух пуассоновских представлений $W^{-\alpha}U_\rho(z)$ для $G_\rho^{(-)}(R_0) = \{z \in G_\rho^{(-)} : |z| < R_0\}$ и $G_\rho^{(-)}(R)$ $(R > R_0 > R_*)$, приходим к равенству

$$\iint_{G_\rho^{(-)}} [I_{\rho,R}(z,s) - I_{\rho,R_0}(z,s)]\, d\nu(s) = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial G_\rho^{(-)}(R)} W^{-\alpha}u(\zeta)\,\frac{\partial g_{\rho,R}(\zeta,z)}{\partial n}\,|d\zeta| -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{\partial G_\rho^{(-)}(R_0)} W^{-\alpha}u(\zeta)\,\frac{\partial g_{\rho,R_0}(\zeta,z)}{\partial n}\,|d\zeta|, \quad z \in G_\rho^{(-)}(R_0), \tag{3.7}$$

где

$$I_{\rho,R}(z,s) = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial G_\rho^{(-)}(R)} W^{-\alpha}\log|b_\alpha(\zeta,s)|\,\frac{\partial g_{\rho,R}(\zeta,z)}{\partial n}\,|d\zeta| \quad (R = R_0, R)$$

и g_{ρ,R_0}, $g_{\rho,R}$ - функции Грина $G_\rho^{(-)}(R_0)$ и $G_\rho^{(-)}(R)$. Отсюда заключаем, что $I_{\rho,R}(z,s) - I_{\rho,R_0}(z,s) \ge 0$ при $z \in G_\rho^{(-)}(R_0)$ и $s \in G_\rho^{(-)}$, поскольку $W^{-\alpha}\log|b_\alpha(\zeta,s)|$ субгармонична в $G^{(-)}$ при любом фиксированном $s \in G^{(-)}$. Предположим теперь, что R и R_0 $(R > R_0 > R_*)$ таковы, что

$$\int_0^\pi |W^{-\alpha}u(Re^{-i\theta})|\sin\theta\, d\theta < +\infty \quad (R = R_0, R).$$

В силу Лемм 2.1 и 2.2 из [1], правая часть (3.7) ограничена на некоторой последовательности $\rho = \rho_n \uparrow 0$. Следовательно, по Лемме Фату

$$\iint_{G_{\rho_n}^{(-)}} \liminf_{\rho\to -0}[I_{\rho,R}(z,s) - I_{\rho,R_0}(z,s)]\, d\nu(s) \le M(z) < +\infty,$$

где $M(z) > 0$ – постоянная, зависящая только от z, R_0 и R, а $\rho_0 < 0$ имеет достаточно малый модуль. Устремляя $\rho_0 \to -0$, получим

$$\iint_{G^{(-)}} \liminf_{\rho\to -0} [I_{\rho,R}(z,s) - I_{\rho,R_0}(z,s)]\, d\nu(s) \le M(z) < +\infty. \tag{3.8}$$

Однако, при любом $R > 0$ существует

$$\lim_{\rho\to -0} I_{\rho,R}(z,s) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G^{(-)}(R)} W^{-\alpha} \log|b_\alpha(\zeta,s)| \left[\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - \bar z} - \right.$$
$$\left. - \frac{z}{R^2 - \zeta z} + \frac{\bar z}{R^2 - \zeta \bar z}\right] d\zeta = -\operatorname{Im} \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_{-|\operatorname{Im} s|}^{|\operatorname{Im} s|} (|\operatorname{Im} s| - |t|)^\alpha\, J_R(t,z)\, dt,$$

где (см. (1.4))

$$J_R(t,z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G^{(-)}(R)} \frac{1}{\zeta - (\operatorname{Re} s + it)} \left[\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - \bar z} - \frac{z}{R^2 - \zeta z} + \frac{\bar z}{R^2 - \zeta \bar z}\right] d\zeta.$$

Вычислив этот интеграл и возвратившись к (3.8), приходим к оценке

$$\frac{2}{\Gamma(1+\alpha)} \iint_{G^{(-)}(R_*)} \left\{ \int_0^{|\operatorname{Im} s|} (|\operatorname{Im} s| - t)^\alpha \left[\frac{\frac{R_0^2}{|y_0|} + t}{\left(\frac{R_0^2}{|y_0|} + t\right)^2 + (\operatorname{Re} s)^2} - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{\frac{R^2}{|y_0|} + t}{\left(\frac{R^2}{|y_0|} + t\right)^2 + (\operatorname{Re} s)^2}\right] dt \right\} d\nu(s) \le M(-iy_0) < +\infty,$$

где $M(-iy_0) > 0$ зависит только от y_0 ($-R_* < y_0 < 0$) и R, R_0. Взяв R достаточно большим, получаем, что $\nu(\zeta)$ удовлетворяет условию (2.4).

3.3. Доказательство Теоремы 3.1. Пусть $u(z) \in M_p$ – субгармоническая функция в $G^{(-)}$, удовлетворяющая условиям (3.1), (3.2) при некотором $\alpha \in [p-1, p]$, и пусть ассоциированная мера $\nu(\zeta)$ обращается в нуль в окрестности бесконечности. Тогда $\nu(\zeta)$ удовлетворяет условию (2.4) согласно Лемме 3.1. Поэтому функция

$$u_*(z) = u(z) - \iint_{G^{(-)}} \log|b_\alpha(z,\zeta)|\, d\nu(\zeta) \tag{3.9}$$

гармонична в $G^{(-)}$. В силу Леммы 1.3, $u_*(z) \in M_p$ и

$$W^{-\alpha} u_*(z) = W^{-\alpha} u(z) - \iint_{G^{(-)}} W^{-\alpha} \log|b_\alpha(z,\zeta)|\, d\nu(\zeta)$$

является гармонической функцией в $G^{(-)}$. Эта функция удовлетворяет условиям (3.1) и (3.2), поскольку легко проверить, что

$$W^{-\alpha}I_\alpha(z) = -\iint_{G^{(-)}} W^{-\alpha}\log|b_\alpha(z,\zeta)|\, d\nu(\zeta)$$

удовлетворяет этим условиям. Более того, пользуясь представлением (1.16), можно показать, что

$$\lim_{R\to+\infty}\frac{1}{R}\int_0^\pi W^{-\alpha}I_\alpha(Re^{-i\theta})\sin\theta\, d\theta = 0 \tag{3.10}$$

и

$$\lim_{y\to-0}\int_{-\infty}^{+\infty} W^{-\alpha}I_\alpha(x+iy)\, dx = 0. \tag{3.11}$$

Тем самым, по Теореме 1 из [1]

$$W^{-\alpha}u_*(z) = \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\mu(t)}{(x-t)^2+y^2}, \quad z = x+iy \in G^{(-)}, \tag{3.12}$$

где $\mu(t)$ мера, определенная из соотношений (3.4) и удовлетворяющая условиям (3.5), (3.6). Вдобавок, очевидно, что справедливо (3.3). Применяя к (3.12) оператор W^α и используя результаты из [13], получаем представление вида (2.3). Из Теоремы 1.1 заключаем, что $u(z) \in S_\alpha$. По Замечанию 2, $W^{-\alpha}u(z)$ для любого $u(z) \in S_\alpha$ представимо в виде (2.6). Отсюда следуют соотношения (3.3) и (3.6), если использовать (3.10), (3.11) и Теорему 1 из [1].

ABSTRACT. The paper considers some classes of subharmonic functions possessing nonnegative harmonic majorants in a half–plane after the application of Weyl's fractional integration operator. Representations and complete characterization of the growth are found. In some natural sense, the growth characterization and the Riesz type representations which are found, completely describe all subharmonic functions Weyl primitives of which have nonnegative harmonic majorants in a half plane.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. М. Джрбашян, "О некоторых классах субгармонических функций, имеющих неотрицательные гармонические мажоранты в полуплоскости", Изв. НАН Армении, Математика, т. 28, №4, стр. 42 - 61, 35 – 51, 1993.
2. А. М. Джрбашян, "Функции типа Бляшке для полуплоскости", ДАН СССР, т. 246, №6, стр. 1295 1298, 1979.
3. А. М. Джрбашян, "Факторизация некоторых общих классов функций, мероморфных в полуплоскости", ДАН СССР, т. 257, №1, стр. 21 25, 1981.

4. А. М. Джрбашян, "Функции типа Бляшке для полуплоскости", Изв. АН Арм.ССР, Математика, т. 18, №6, стр. 409 - 440, 1983.
5. А. М. Джрбашян, Г. В. Микаелян, "Построение и основные свойства одного семейства функций типа Бляшке для полуплоскости", Изв. АН Арм.ССР, Математика, т. 15, №6, стр. 461 - 474, 1980.
6. А. М. Джрбашян, Г. В. Микаелян, "Асимптотическое поведение функций типа Бляшке для полуплоскости", Изв. АН Арм.ССР, Математика, т. 21, №2, стр. 142 - 146, 1986.
7. А. М. Джрбашян, "Соотношения равновесия и факторизационные теоремы для функций, мероморфных в полуплоскости", Изв. АН Арм.ССР, Математика, т. 21, №3, стр. 213 - 279, 1986.
8. А. М. Джрбашян, "Параметрические представления классов мероморфных функций с неограниченными характеристиками Цудзи", Изв. АН Арм.ССР, Математика, т. 22, №5, стр. 451 - 477, 1987.
9. А. М. Джрбашян, "О равномерной аппроксимации функций обобщенно-ограниченного вида в полуплоскости и аналоге теоремы Акутовича", Изв. АН Арм.ССР, Математика, т. 25, №3, стр. 293 - 302, 1990.
10. А. М. Джрбашян, "Об одном представлении произведений типа Бляшке для полуплоскости", Изв. АН Арм.ССР, Математика, т. 24, №5, стр. 466 - 479, 1989.
11. А. М. Джрбашян, "О граничных свойствах функций обобщенно-ограниченного вида, Изв. АН Арм.ССР, Математика, т. 26, №3, стр. 187 - 209, 1991.
12. А. М. Джрбашян, Г. В. Микаелян, "О граничных свойствах произведений типа Бляшке", Изв. АН Арм.ССР, Математика, т. 26, №5, стр. 435 - 442, 1991.
13. А. М. Джрбашян, "Теоремы типа Герглотца Рисса", Мат. заметки, т. 45, №4, стр. 19 - 26, 1989.
14. Е. Д. Соломенцев, "О классах функций, субгармонических в полупространстве", Вестник МГУ, серия матем., т. 5, стр. 73 - 91, 1959.
15. М. М. Джрбашян, Интегральные Преобразования и Представления Функций в Комплексной Области", Москва, Наука, 1966.

1 Октября 1993

Институт математики
НАН Армении