# О ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ, СУБГАРМОНИЧЕСКИХ В ЕДИНИЧНОМ КРУГЕ И В ПОЛУПЛОСКОСТИ

**К. Л. Аветисян**

**Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 29, №1, 1994**

**В статье установлены параметрические представления классов $Sb_\alpha(\mathbb{D})$ $(0 < \alpha < \infty)$ субгармонических в единичном круге $\mathbb{D}$ функций $u(z)$, удовлетворяющих условию $\iint\limits_{\mathbb{D}} (1 - |z|)^{\alpha-1} u^+(z)\, dm_2(z) < \infty$, а также для классов $Sb_\alpha(G^+)$ $(0 < \alpha < \infty)$ функций $u(z)$, субгармонических в верхней полуплоскости $G^+$ и удовлетворяющих условиям**

$$\iint\limits_{G^+} (\operatorname{Im} z)^{\alpha-1} |u(z)|\, dm_2(z) < \infty, \qquad \iint\limits_{G^+} (\operatorname{Im} z)^{\alpha+1}\, d\mu(z) < \infty,$$

**где $u^+ = \max\{u, 0\}$, $m_2(z)$ – мера Лебега на плоскости, $\mu$ – мера Рисса, ассоциированная с $u(z)$. Гармонические члены полученных представлений записаны с применением мер О. В. Бесова на единичной окружности и на вещественной оси.**

В статье установлены представления типа Рисса для некоторых классов субгармонических в единичном круге и верхней полуплоскости функций. Указанные классы субгармонических в круге функций являются обобщениями классов мероморфных функций $N_\alpha^*$ М. М. Джрбашяна [1, 2], а доказанная теорема – распространением на субгармонические функции одного результата Ф. А. Шамояна [3], где найденные им ранее [4, 5] параметрические представления классов $N_\alpha^*$ существенно модифицированы с применением мер О. В. Бесова на единичной окружности. Теорема, установленная в полуплоскости, является распространением на субгармонические функции одного частного случая факторизационного результата А. М. Джрбашяна [6]. При этом, здесь осуществлена аналогичная модификация с применением мер О. В. Бесова на бесконечном отрезке.

## §1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

**Определение 1.** Класс $Sb_\alpha(\mathbb{D})$ $(0 < \alpha < \infty)$ - множество субгармонических в единичном круге $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ функций $u(z)$, удовлетворяющих условию

$$\iint_{\mathbb{D}} (1-|z|)^{\alpha-1} u^+(z)\, dm_2(z) < \infty, \tag{1.1}$$

где $u^+ = \max\{u, 0\}$, $m_2(z)$ - мера Лебега на $\mathbb{D}$.

**Замечание.** Классы $Sb_\alpha(\mathbb{D})$ $(0 < \alpha < \infty)$ являются обобщениями классов $N_\alpha^*$ М. М. Джрбашяна [1, 2], ибо после замены $\alpha$ на $\alpha + 1$ и подстановки $u(z) = \log|f(z)|$, где $f(z)$ - голоморфная в $\mathbb{D}$ функция, класс $Sb_\alpha(\mathbb{D})$ совпадает с голоморфным подклассом $N_\alpha^*$.

**Теорема 1.** a) *Класс $Sb_\alpha(\mathbb{D})$ $(0 < \alpha < \infty)$ совпадает с множеством функций, представимых в виде*

$$u(z) = \iint_{\mathbb{D}} \log|A_\beta(z,\zeta)|\, d\mu(\zeta) +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\Gamma(1+\alpha)\int_{-\pi}^{\pi} Re\left[\frac{2}{(1-e^{-i\theta}z)^{\alpha+1}} - 1\right] d\psi(\theta), \quad z \in \mathbb{D}, \tag{1.2}$$

*где $\beta > \alpha$ произвольное число и*

$$A_\beta(z,\zeta) = \exp\left[-\int_{|\zeta|^2}^{1} \frac{(1-\tau)^\beta}{(1-z\zeta^{-1}\tau)^{\beta+1}}\frac{d\tau}{\tau}\right] \quad (\zeta \neq 0), \qquad A_\beta(z,0) = z, \tag{1.3}$$

*есть элементарный фактор типа Бляшке М. М. Джрбашяна [1, 2], $\mu(\zeta)$ - неотрицательная борелевская мера в $\mathbb{D}$ такая, что*

$$\iint_{\mathbb{D}} (1-|\zeta|)^{\alpha+1}\, d\mu(\zeta) < \infty, \tag{1.4}$$

*если $u(z) \not\equiv -\infty$, а $\psi(\theta)$ - вещественная функция ограниченной вариации на $[-\pi, \pi]$, удовлетворяющая условию Бесова*

$$\int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_{-\pi}^{\pi} |\psi(\theta+t) + \psi(\theta-t) - 2\psi(\theta)|\,\frac{dt}{t^2} < \infty. \tag{1.5}$$

b) *Если $u(z)$ представима в виде (1.2) - (1.5), то риссовская ассоциированная мера $u(z)$ совпадает с $\mu$.*

**Замечание.** Формула (1.2) во многом аналогична представлению типа Рисса, установленному М. М. Джрбашяном [7]. Однако в (1.2) применены иные потенциалы типа Грина, а также существенно сужен класс мер $\psi(\theta)$.

**Определение 2.** Класс $Sb_\alpha(G^+)$ $(0 < \alpha < \infty)$ – множество субгармонических в верхней полуплоскости $G^+ = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ функций $u(z)$, удовлетворяющих условиям

$$\iint\limits_{G^+} (\operatorname{Im} z)^{\alpha-1} |u(z)|\, dm_2(z) < \infty, \tag{1.6}$$

$$\iint\limits_{G^+} (\operatorname{Im} z)^{\alpha+1}\, d\mu(z) < \infty, \tag{1.7}$$

где $\mu$ – риссовская ассоциированная мера $u(z)$.

**Замечание.** Классы $Sb_\alpha(G^+)$ $(0 < \alpha < \infty)$ являются обобщениями классов $N^m_{\alpha,\beta}$ А. М. Джрбашяна [6] с $\beta = 0$, ибо после преобразования $w = -z$ и подстановки $u(w) = \log|f(w)|$, где $f(w)$ – голоморфная в нижней полуплоскости функция, класс $Sb_\alpha(G^+)$ совпадает с голоморфным подклассом $N^m_{\alpha,0}$.

**Теорема 2.** a) *Класс $Sb_\alpha(G^+)$ $(0 < \alpha < \infty)$ совпадает с множеством функций, представимых в виде*

$$u(z) = \iint\limits_{G^+} \log|a_\beta(z,\zeta)|\, d\mu(\zeta) + \frac{1}{\pi}\Gamma(1+\alpha) \int_{-\infty}^{\infty} Re \left[\frac{1}{(it - iz)^{\alpha+1}}\right] d\psi(t), \tag{1.8}$$

*где $z \in G^+$, $\beta > \alpha$ – произвольное число, а*

$$a_\beta(z,\zeta) = \exp\left[-\int_0^{2\operatorname{Im}\zeta} \frac{\tau^\beta\, d\tau}{(\tau + i(\zeta - z))^{\beta+1}}\right] \tag{1.9}$$

*есть элементарный фактор типа Бляшке, введенный А. М. Джрбашяном и Г. В. Микаеляном [8], $\mu(\zeta)$ – неотрицательная борелевская мера в $G^+$, подчиненная условию (1.7), а $\psi(t)$ – вещественная функция ограниченной вариации на* $[-\infty, +\infty]$, *удовлетворяющая условию Бесова*

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x+t) + \psi(x-t) - 2\psi(x)|\, \frac{dt}{t^2} < \infty. \tag{1.10}$$

b) *Если $u(z)$ представимо в виде (1.8) – (1.10), то риссовская ассоциированная мера $u(z)$ совпадает с $\mu$.*

**Замечание.** Формула (1.8) во многом аналогична одному представлению, установленному А. М. Джрбашяном [9]. Однако в (1.8) применены иные потенциалы типа Грина, а также существенно сужен класс мер $\psi(t)$.

## §2. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ В КРУГЕ

Начнем с установления ряда лемм, относящихся к структуре классов $Sb_\alpha(\mathbb{D})$.

**Лемма 2.1.** *Пусть $u(z) \in Sb_\alpha(\mathbb{D})$ $(0 < \alpha < \infty)$, и пусть $u(z) \not\equiv -\infty$. Тогда*

$$\iint_{\mathbb{D}} (1-|z|)^{\alpha-1} |u(z)|\, dm_2(z) < \infty, \tag{2.1}$$

*а риссовская ассоциированная мера $\mu$ функции $u(z)$ удовлетворяет условию (1.4). Если к тому же, $u(0) > -\infty$, то справедлива формула*

$$\frac{1}{2\pi}\alpha(\alpha+1)\iint_{\mathbb{D}} (1-|z|)^{\alpha-1} u(z)\, dm_2(z) =$$

$$= u(0) + \int_0^1 (1-t)^{\alpha+1}\, dn(t) + \int_0^1 \left[\int_t^1 (1-\tau)^{\alpha+1} \frac{d\tau}{\tau}\right] dn(t), \tag{2.2}$$

*где $n(t)$ – риссовская масса функции $u(z)$ в круге $|z| \le t$, т.е. $n(t) = \iint_{\mathbb{D}_t} d\mu(\zeta)$.*

**Доказательство.** Предположим, что $u(0) > -\infty$. Тогда, проинтегрировав неравенство между $u(0)$ и средним значением $u(z)$ по окружности $|z| = r$ по мере $(1-r)^{\alpha-1} r\, dr$, получим

$$-\infty < \frac{2\pi}{\alpha(\alpha+1)} u(0) \le \iint_{\mathbb{D}} (1-|z|)^{\alpha-1} u(z)\, dm_2(z),$$

откуда, ввиду (1.1), следует, что

$$\iint_{\mathbb{D}} (1-|z|)^{\alpha-1} u^-(z)\, dm_2(z) < \infty,$$

где $u^- = u^+ - u$. Тем самым, имеет место (2.1). Если же $u(0) = -\infty$, то составим субгармоническую в $\mathbb{D}$ функцию

$$v(z) = u(z) - \int\int_{|\zeta|<1/2} \log\left|\frac{\zeta - z}{1 - z\bar{\zeta}}\right| d\mu(\zeta) \equiv u(z) - I(z).$$

Очевидно, что $v(0) > -\infty$. С другой стороны, $v(z) \in Sb_\alpha(\mathbb{D})$, так как $v^+(z) \le$

$\leq u^+(z) + |I(z)|$, и функция $I(z)$ удовлетворяет условию (2.1). Действительно

$$\iint\limits_{\mathbb{D}} (1-|z|)^{\alpha-1}|I(z)|\,dm_2(z) =$$
$$= \int\!\!\int\limits_{|\zeta|<1/2} d\mu(\zeta) \int_0^1 (1-r)^{\alpha-1} r\,dr \int_{-\pi}^{\pi} \log\left|\frac{1-\bar{\zeta}re^{i\varphi}}{\zeta - re^{i\varphi}}\right| d\varphi =$$
$$= 2\pi \int\!\!\int\limits_{|\zeta|<1/2} d\mu(\zeta) \int_0^1 (1-r)^{\alpha-1} r \log(\max\{|\zeta|, r\})^{-1}\,dr \leq$$
$$\leq \frac{2\pi}{\alpha(\alpha+1)} \int\!\!\int\limits_{|\zeta|<1/2} \log\frac{1}{|\zeta|}\,d\mu(\zeta) < \infty.$$

Поэтому $v(z)$ удовлетворяет (2.1), и, поскольку $|u(z)| \leq |v(z)| + |I(z)|$, то (2.1) имеет место в любом случае. Чтобы доказать (1.4) и (2.2), снова предположим, что $u(0) > -\infty$. Тогда интегрированием по частям формулы Йенсена

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(re^{i\varphi})\,d\varphi = u(0) + \int_0^r \frac{n(t)}{t}\,dt, \qquad 0 \leq r < 1,$$

$$n(0) = \mu(0) = 0, \qquad \lim_{t\to+0} n(t)\log 1/t = 0$$

для субгармонических функций (см., например, [10], п. 3.9) получим (2.2). Отсюда, очевидно, что

$$\iint\limits_{\mathbb{D}} (1-|\zeta|)^{\alpha+1}\,d\mu(\zeta) = \int_0^1 (1-t)^{\alpha+1}\,dn(t) \leq$$
$$\leq |u(0)| + \frac{1}{2\pi}\alpha(\alpha+1) \iint\limits_{\mathbb{D}} (1-|z|)^{\alpha-1} u^+(z)\,dm_2(z),$$

и, тем самым, имеет место (1.4). Если же $u(0) = -\infty$, то заметим, что условие (1.4) справедливо по меньшей мере для ассоциированной меры $v(z)$ ($v(0) > -\infty$). Эта мера, очевидно, является сужением меры $\mu$ на кольцо $1/2 \leq |\zeta| < 1$. Поскольку $\mu$ конечно на любом компакте из $\mathbb{D}$, то отсюда следует, что (1.4) имеет место в любом случае.

**Лемма 2.2**. *Пусть $\mu(\zeta)$ неотрицательная борелевская мера в $\mathbb{D}$, подчиненная условию (1.4) при заданном $\alpha \in (-1, \infty)$. Тогда потенциал типа Грина*

$$V_\alpha(z) = \iint\limits_{\mathbb{D}} \log|A_\alpha(z,\zeta)|\,d\mu(\zeta)$$

*есть субгармоническая в $\mathbb{D}$ функция, риссовская ассоциированная мера которой совпадает с $\mu$.*

**Доказательство.** Пусть $|z| \le r_0 < \rho < 1$, где $r_0$ и $\rho$ – любые числа. Представим $V_\alpha(z) = V_\alpha^{(1)}(z) + V_\alpha^{(2)}(z)$, где

$$V_\alpha^{(1)}(z) = \iint\limits_{|\zeta|<\rho} \log|A_\alpha(z,\zeta)|\, d\mu(\zeta), \quad V_\alpha^{(2)}(z) = \iint\limits_{\rho\le|\zeta|<1} \log|A_\alpha(z,\zeta)|\, d\mu(\zeta).$$

Используя представление (1.3), легко проверить, что при $\rho \le |\zeta| < 1$ имеем

$$\big|\log|A_\alpha(z,\zeta)|\big| \le c(\alpha,\rho,r_0)(1-|\zeta|)^{\alpha+1},$$

где $c(\alpha,\rho,r_0) > 0$ - постоянная, зависящая только от $\alpha$, $\rho$ и $r_0$. Ввиду (1.4) отсюда следует, что $V_\alpha^{(2)}(z)$ гармоническая в $|z| \le r_0$ функция. Для исследования $V_\alpha^{(1)}(z)$ воспользуемся представлением (см. [2])

$$A_\alpha(z,\zeta) = \left(1-\frac{z}{\zeta}\right)\exp[-U_\alpha(z,\zeta)],$$
$$U_\alpha(z,\zeta) = \int_{|\zeta|^2}^1 \frac{(1-t)^\alpha}{t}\,dt - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(k+1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(k+1)}(z/\zeta)^k \int_0^{|\zeta|^2}(1-t)^\alpha t^{k-1}\,dt.$$

Мы имеем (см. [11], доказательство Теоремы 9.2.2)

$$U_\alpha(z,\zeta) = k_\alpha + \log\frac{1}{|\zeta|^2} + o(1), \quad \text{при } \zeta \to 0,$$

где $k_\alpha$ – постоянная, зависящая лишь от $\alpha$. Поэтому

$$V_\alpha^{(1)}(z) = \iint\limits_{|\zeta|<\rho} \log|z-\zeta|\, d\mu(\zeta) + \iint\limits_{0<|\zeta|<\rho} \log\frac{1}{|\zeta|}\, d\mu(\zeta) - \iint\limits_{0<|\zeta|<\rho} \operatorname{Re} U_\alpha(z,\zeta)\, d\mu(\zeta),$$

где второй интеграл справа есть постоянная, а последний интеграл абсолютно и равномерно сходится в $|z| \le r_0$ и представляет там гармоническую функцию. Следовательно, $V_\alpha^{(1)}(z)$, а значит, и $V_\alpha(z)$ - субгармонические в $|z| \le r_0$ функции при любом $r_0 < 1$, обладающие риссовской мерой $\mu$.

**Лемма 2.3.** а) *Пусть $\mu(\zeta)$ – неотрицательная борелевская мера в $\mathbb{D}$, удовлетворяющая условию (1.4) при заданном $\alpha \in (0,\infty)$. Тогда $V_\beta(z) \in Sb_\alpha(\mathbb{D})$ при любом $\beta > \alpha$.*

*b) При любом $\alpha > 0$ существует неотрицательная борелевская мера в $\mathbb{D}$, удовлетворяющая условию (1.4), такая, что $V_\alpha(z) \notin Sb_\alpha(\mathbb{D})$.*

*c) Пусть $\mu(\zeta)$ – неотрицательная борелевская мера в $\mathbb{D}$ и $\alpha$ $(0 < \alpha < \infty)$ – любое число. Тогда, для того чтобы $V_\alpha(z) \in Sb_\alpha(\mathbb{D})$, достаточно выполнения условия*

$$\iint\limits_{\mathbb{D}} (1-|\zeta|)^{\alpha+1} \log\frac{1}{1-|\zeta|}\, d\mu(\zeta) < \infty.$$

**Доказательство** этой леммы вполне аналогично доказательству такого же результата Ф. А. Шамояна [4, 5], установленного для произведений типа Бляшке М. М. Джрбашяна (т. е. для случая дискретной меры), и поэтому мы его не приводим.

**Доказательство Теоремы 1.** а) Пусть $u(z) \in Sb_\alpha(\mathbb{D})$ $(0 < \alpha < \infty)$, $u(z) \not\equiv -\infty$. Тогда, в силу Леммы 2.1, ассоциированная с $u(z)$ мера $\mu$ удовлетворяет условию (1.4). Следовательно, в силу Лемм 2.2 и 2.3 при любом фиксированном $\beta > \alpha$ потенциал $V_\beta(z)$ – субгармоническая в $\mathbb{D}$ функция с ассоциированной мерой $\mu$, и $V_\beta(z) \in Sb_\alpha(\mathbb{D})$. Тем самым, в силу Леммы 2.1, $h(z) = u(z) - V_\beta(z)$ – гармоническая в $\mathbb{D}$ функция, удовлетворяющая условию

$$\iint\limits_{\mathbb{D}} (1-|z|)^{\alpha-1} |h(z)|\, dm_2(z) < \infty. \tag{2.3}$$

Как легко следует из Теоремы 9.10 [11] и Теоремы 3 [3], класс таких функций совпадает с множеством функций, представимых в виде последнего интеграла формулы (1.2). В силу того же, если $u(z)$ представима в виде (1.2) – (1.5), то $h(z)$ удовлетворяет условию (2.3). Отсюда и из Леммы 2.3 следует, что $u(z) \in Sb_\alpha(\mathbb{D})$. Второе утверждение теоремы непосредственно следует из Леммы 2.2.

## §3. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ В ПОЛУПЛОСКОСТИ

Основной целью данного пункта является доказательство Теоремы 2, которому мы предпошлем три леммы, относящиеся к структуре классов $Sb_\alpha(G^+)$. Для установления аналога формулы Йенсена в полуплоскости введем функцию распределения

$$n(t) = \iint\limits_{G_t^+} d\mu(z), \quad G_t^+ = \{z : \operatorname{Im} z > t\}, \quad 0 < t < \infty,$$

для неотрицательной борелевской меры $\mu$ в $G^+$.

**Лемма 3.1.** *Пусть $u(z)$ – субгармоническая в $G^+$ функция такая, что при любом $\rho > 0$*

$$\sup_{y>\rho} \int_{-\infty}^{\infty} |u(x+iy)|\, dx < \infty.$$

*Тогда при любом $\rho > 0$ имеет место формула*

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(x+i\rho)\, dx = -2 \int_{\rho}^{\infty} (t-\rho)\, dn(t) + \lim_{R\to+\infty} Ru(iR), \tag{3.1}$$

*где $n(t)$ – функция распределения, определенная посредством ассоциированной с $u(z)$ меры $\mu$, а последний предел конечен.*

**Доказательство.** Как следует из результатов работ [12] и [13], при любом $\rho > 0$

$$u(z+i\rho) = \iint_{G^+} \log\left|\frac{z-\zeta}{z-\bar\zeta}\right| d\mu(\zeta+i\rho) + \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(t+i\rho)}{(x-t)^2+y^2}\, dt, \quad z = x+iy \in G^+,$$

где

$$\iint_{G^+} (\operatorname{Im} \zeta)\, d\mu(\zeta+i\rho) < \infty.$$

Как нетрудно убедиться, подставив здесь $z = iR$, умножив все члены на $R$ и устремив $R \to +\infty$, приходим к формуле

$$\lim_{R\to+\infty} Ru(iR) = -2 \iint_{G^+_\rho} (\operatorname{Im} \zeta - \rho)\, d\mu(\zeta) + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} u(t+i\rho)\, dt,$$

где предел слева конечен. Заметим, что последнюю формулу можно переписать в виде (3.1), поскольку в обобщенном смысле $dn(t) = -\int_{-\infty}^{\infty} d\mu(x+it)$.

**Лемма 3.2.** *Пусть $\mu(\zeta)$ – неотрицательная борелевская мера в $G^+$, подчиненная условию (1.7) при заданном $\alpha \in [0,\infty)$. Тогда при любом $\beta \geq \alpha$ потенциал типа Грина*

$$W_\beta(z) = \iint_{G^+} \log|a_\beta(z,\zeta)|\, d\mu(\zeta) \tag{3.2}$$

*есть субгармоническая в $G^+$ функция, риссовская ассоциированная мера которой совпадает с $\mu$.*

**Доказательство.** Пусть $\beta > 0$ и $z \in \overline{G^+_\rho}$, где $\rho > 0$. Представим

$$W_\beta(z) = \int\int_{0<\operatorname{Im} \zeta\leq\rho/2} \log|a_\beta(z,\zeta)|\, d\mu(\zeta) + \iint_{G^+_{\rho/2}} \log|a_\beta(z,\zeta)|\, d\mu(\zeta). \tag{3.3}$$

Используя представление (1.9), имеем

$$\left|\log|a_\beta(z,\zeta)|\right| \le c(\beta,\rho)(\operatorname{Im}\zeta)^{\beta+1}, \quad 0<\operatorname{Im}\zeta\le\rho/2,$$

где $c(\beta,\rho)>0$ – постоянная, зависящая лишь от $\beta$ и $\rho$. Ввиду условия (1.7) отсюда следует, что первый интеграл в правой части (3.3) абсолютно и равномерно сходится в $\overline{G_\rho^+}$, представляет там гармоническую функцию. Рассмотрим последний интеграл в (3.3). Очевидно, $\log|a_\beta(z,\zeta)| = \log|a_0(z,\zeta)| + \operatorname{Re} F_\beta(z,\zeta)$, где

$$F_\beta(z,\zeta)=\int_0^{2\operatorname{Im}\zeta}\left[\frac{1}{\tau+i\zeta-iz}-\frac{\tau^\beta}{(\tau+i\zeta-iz)^{\beta+1}}\right]d\tau.$$

Функция

$$\iint\limits_{G^+_{\rho/2}}\log|a_0(z,\zeta)|\,d\mu(\zeta)=\iint\limits_{G^+_{\rho/2}}\log\left|\frac{z-\zeta}{z-\bar\zeta}\right|d\mu(\zeta)$$

субгармонична в $\overline{G^+_{\rho/2}}$ как обычный потенциал Грина, поскольку

$$\iint\limits_{G^+_{\rho/2}}(\operatorname{Im}\zeta)\,d\mu(\zeta)\le(2/\rho)^\alpha\iint\limits_{G^+_{\rho/2}}(\operatorname{Im}\zeta)^{\alpha+1}\,d\mu(\zeta)<\infty.$$

Далее, представляя $F_\beta(z,\zeta)=\Phi_\beta(z,\zeta)+\Psi_\beta(z,\zeta)$, где

$$\Phi_\beta(z,\zeta)=\int_0^\infty\left[1-\left(\frac{\tau}{\tau+i\zeta-iz}\right)^\beta\right]\frac{d\tau}{\tau+i\zeta-iz},$$

$$\Psi_\beta(z,\zeta)=-\int_{2\operatorname{Im}\zeta}^\infty\left[1-\left(\frac{\tau}{\tau+i\zeta-iz}\right)^\beta\right]\frac{d\tau}{\tau+i\zeta-iz},$$

рассмотрим функцию $\Phi_\beta(z,\zeta)$ на луче $z=\zeta+ih$, $0<h<\infty$. Поскольку

$$\Phi_\beta(\zeta+ih,\zeta)=\int_0^\infty\left[1-\left(\frac{\tau}{\tau+h}\right)^\beta\right]\frac{d\tau}{\tau+h}=\int_0^\infty\left[1-\left(\frac{\sigma}{\sigma+1}\right)^\beta\right]\frac{d\sigma}{1+\sigma}=c_\beta,$$

где постоянная $c_\beta>0$ зависит лишь от $\beta$, то, в силу единственности голоморфной функции, при любом фиксированном $\zeta\in G^+_{\rho/2}$, $\Phi_\beta(z,\zeta)=c_\beta$ ($z\in G^+$). С другой стороны, при любом фиксированном $\zeta\in G^+_{\rho/2}$ функция $\Psi_\beta(z,\zeta)$ голоморфна и ограничена в $\overline{G^+_\rho}$. Действительно, после замены переменной $\tau=y\sigma+2\eta$ ($z=x+iy$, $\zeta=\xi+i\eta$) получаем оценку

$$|\Psi_\beta(z,\zeta)|\le\int_0^\infty\left|1-\left(\frac{\sigma+2\eta/y}{1+\sigma+\eta/y+i(\xi-x)/y}\right)^\beta\right|\frac{d\sigma}{|1+\sigma+\eta/y+i(\xi-x)/y|}.$$

Далее, обозначив

$$w = 1 - \frac{\sigma + 2\eta/y}{1 + \sigma + \eta/y + i(\xi - x)/y},$$

нетрудно проверить, что $|w| < 1$, и, следовательно

$$\left|\frac{1 - (1 - w)^{\beta}}{w}\right| \le M_{\beta},$$

где $M_{\beta} > 0$ постоянная, зависящая лишь от $\beta$. Поэтому

$$|\Psi_{\beta}(z, \zeta)| \le \int_0^{\infty} \frac{|1 - (1 - w)^{\beta}|}{|w|} \frac{|w|}{|1 + \sigma + \eta/y + i(\xi - x)/y|}\, d\sigma \le$$

$$\le M_{\beta}\left(\left|1 - \frac{\eta}{y}\right| + \left|\frac{\xi - x}{y}\right|\right) \int_0^{\infty} \frac{d\sigma}{(1 + \sigma + \eta/y)^2 + \left(\frac{\xi - x}{y}\right)^2} \le 2M_{\beta}.$$

Таким образом, при любом $\zeta \in G^+_{\rho/2}$, $F_{\beta}(z, \zeta)$ – ограниченная голоморфная функция в $\overline{G^+_{\rho}}$, удовлетворяющая неравенству

$$|\operatorname{Re} F_{\beta}(z, \zeta)| \le c(\alpha, \beta, \rho)(\operatorname{Im} \zeta)^{\alpha+1},$$

где постоянная $c(\alpha, \beta, \rho) > 0$ зависит от $\alpha, \beta$ и $\rho$. Тем самым, функция

$$W^{*}_{\beta}(z) = \iint\limits_{G^+_{\rho/2}} \operatorname{Re} F_{\beta}(z, \zeta)\, d\mu(\zeta)$$

гармонична в $\overline{G^+_{\rho}}$. Отсюда следует, что $W_{\beta}(z)$ – субгармоническая в $\overline{G^+_{\rho}}$ функция при любом $\rho \in (0, \infty)$, обладающая риссовской ассоциированной мерой $\mu$, и лемма доказана.

**Лемма 3.3**. *Пусть $\mu(\zeta)$ – неотрицательная борелевская мера в $G^+$, удовлетворяющая условию (1.7) при некотором $0 < \alpha < \infty$. Тогда $W_{\beta}(z) \in Sb_{\alpha}(G^+)$ при любом $\beta > \alpha$.*

**Доказательство** этой леммы вполне аналогично доказательству такого же результата А. М. Джрбашяна [6], установленного для произведений типа Бляшке из [8] (т.е. для случая дискретной меры), и поэтому мы его не приводим.

**Доказательство Теоремы 2.** а) Пусть $u(z) \in Sb_{\alpha}(G^+)$ $(0 < \alpha < \infty)$, $u(z) \not\equiv$ $\not\equiv -\infty$. Ассоциированная с $u(z)$ мера $\mu$ удовлетворяет условию (1.7). Поэтому, в силу Лемм 3.2 и 3.3, потенциал $W_{\beta}(z)$ – субгармоническая в $G^+$ функция с ассоциированной мерой $\mu$. Отсюда следует также, что $W_\beta(z) \in Sb_\alpha(G^+)$ при любом $\beta > \alpha$. Следовательно, гармоническая функция $h(z) = u(z) - W_\beta(z)$ принадлежит классу $Sb_\alpha(G^+)$. С другой стороны, в силу Теоремы 4.2 [14] и результатов работы [15], подкласс гармонических функций из $Sb_\alpha(G^+)$ совпадает с множеством функций, представимых в виде последнего интеграла формулы (1.8). Тем самым, такое же представление имеет место для $h(z)$. Обратно, если $u(z)$ представима в виде (1.8) – (1.10), то гармоническая функция $h(z)$ принадлежит классу $Sb_\alpha(G^+)$. В силу Леммы 3.3, $u(z) \in Sb_\alpha(G^+)$. Второе утверждение теоремы непосредственно следует из Леммы 3.2.

В заключение, докажем формулу, аналогичную формуле типа Левина из [6] для функций класса $Sb_\alpha(G^+)$ $(0 < \alpha < \infty)$. Полагая, что $u(z) \in Sb_\alpha(G^+)$ для заданного $\alpha \in (0, \infty)$, вначале покажем, что для любого $y_0 > 0$ выполнено условие

$$\sup_{y>y_0} \int_{-\infty}^{\infty} |u(x+iy)|\, dx < \infty. \tag{3.4}$$

Действительно, по Теореме 2 $u(z)$ представима в виде (1.8) – (1.10). Используя рассуждения доказательства Леммы 3.2 из [6], можно показать, что потенциал $W_\beta(z)$ удовлетворяет условию (3.4) для любого $y_0 > 0$. Кроме того, гармоническая функция

$$h(z) = \frac{1}{\pi}\Gamma(1+\alpha) \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Re}\, \frac{1}{[i(t-z)]^{\alpha+1}}\, d\psi(t), \quad z \in G^+$$

также удовлетворяет условию (3.4), так как

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(x+iy)|\, dx \le \frac{1}{\pi}\Gamma(1+\alpha) \int_{-\infty}^{\infty} |d\psi(t)| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{|t-x-iy|^{\alpha+1}} \le \frac{c_\alpha}{y^\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} |d\psi(t)|,$$

где $c_\alpha > 0$ – постоянная, зависящая только от $\alpha$. Следовательно, функция $u(z)$ удовлетворяет условиям Леммы 3.1 и

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(x+iy)\, dx = -\int_{y}^{\infty} (t-y)\, dn(t) + K, \quad 0 < y < \infty, \tag{3.5}$$

где $n(t) = \iint\limits_{G_t^+} d\mu(\zeta)$ – функция распределения, определенная посредством меры $\mu$, ассоциированной с $u(z)$, а $K$ - постоянная, не зависящая от $y$. Теперь умножим все члены формулы (3.5) на $y^{\alpha-1}$ и проинтегрируем вдоль $(0,+\infty)$. Тогда получим, что $K=0$, так как очевидно

$$\int_0^\infty y^{\alpha-1}\left[-\int_y^\infty (t-y)\,dn(t)\right]\,dy = -\frac{1}{\alpha(\alpha+1)}\int_0^\infty t^{\alpha+1}\,dn(t) =$$
$$= \frac{1}{\alpha(\alpha+1)}\iint_{G+} t^{\alpha+1}\,d\mu(x+it) < \infty.$$

Таким образом, имеет место следующая формула типа Левина :

$$\frac{1}{2\pi}\alpha(\alpha+1)\iint_{G+}(\operatorname{Im} z)^{\alpha-1}u(z)\,dm_2(z) = -\int_0^\infty t^{\alpha+1}\,dn(t). \tag{3.6}$$

Классам $Sb_\alpha(G^+)$ $(0<\alpha<\infty)$ можно дать эквивалентные определения. А именно, используя формулы (3.1) и (3.6), легко проверить, что субгармоническая в $G^+$ функция $u(z)$ принадлежит классу $Sb_\alpha(G^+)$ $(0<\alpha<\infty)$ тогда и только тогда, когда она удовлетворяет условиям :

1) $\displaystyle\iint_{G+}(\operatorname{Im} z)^{\alpha-1}u^+(z)\,dm_2(z) < \infty,$

2) $\displaystyle\sup_{y>y_0}\int_{-\infty}^\infty |u(x+iy)|\,dx < \infty$ для любого $y_0>0$,

3) $\displaystyle\lim_{R\to+\infty} Ru(iR) = 0$

или

1′) $\displaystyle\iint_{G+}(\operatorname{Im} z)^{\alpha-1}|u(z)|\,dm_2(z) < \infty,$

2′) $\displaystyle\sup_{y>y_0}\int_{-\infty}^\infty |u(x+iy)|\,dx < \infty$ для любого $y_0>0$.

**ABSTRACT.** The paper establishes parametric representations for classes $Sb_\alpha(\mathbb{D})$ $(0<\alpha<\infty)$ of functions $u(z)$ subharmonic in the unit disk $\mathbb{D}$, satisfying the condition $\iint_{\mathbb{D}}(1-|z|)^{\alpha-1}u^+(z)\,dm_2(z)<\infty$, as well as for classes $Sb_\alpha(G^+)$ $(0<\alpha<\infty)$ of functions $u(z)$ subharmonic in the upper half-plane $G^+$, satisfying the conditions

$$\iint_{G+}(\operatorname{Im} z)^{\alpha-1}|u(z)|\,dm_2(z)<\infty, \qquad \iint_{G+}(\operatorname{Im} z)^{\alpha+1}\,d\mu(z)<\infty,$$

where $u^+=\max\{u,0\}$, $m_2(z)$ is the Lebesgue measure on the plane, $\mu$ is the Riesz measure associated with $u(z)$. The harmonic terms of the

representations are written by means of Besov's measures on the unit circle and on the real axis.

## ЛИТЕРАТУРА


1. М. М. Джрбашян, "О каноническом представлении мероморфных в единичном круге функций", ДАН Арм.ССР, т. 3, №1, стр. 3 – 9, 1945.
2. М. М. Джрбашян, "К проблеме представимости аналитических функций", Сообщ. Ин-та матем. и мех. АН Арм.ССР, вып. 2, стр. 3 – 40, 1948.
3. Ф. А. Шамоян, "О параметрическом представлении классов Неванлинны - Джрбашяна", ДАН Арм.ССР, т. 90, №3, стр. 99 – 103, 1990.
4. Ф. А. Шамоян, "Факторизационная теорема М. М. Джрбашяна и характеристика нулей аналитических в круге функций с мажорантой конечного роста", Изв. АН Арм.ССР, Математика, т. 13, №5 – 6, стр. 405 – 422, 1978.
5. A. E. Djrbashian, F. A. Shamoyan, Topics in the Theory of $A^p_\alpha$ Spaces, Teubner - Texte zur Math., b. 105, Leipzig, 1988.
6. А. М. Джрбашян, "Параметрические представления классов мероморфных функций с неограниченной характеристикой Цудзи", Изв. АН Арм.ССР, Математика, т. 22, №5, стр. 451 – 477, 1987.
7. М. М. Джрбашян, "Классы функций и их параметрическое представление. Современные проблемы теории аналитических функций", Международная конференция по теории аналитических функций. Ереван, 1965, М., Наука, стр. 118 – 137, 1966.
8. А. М. Джрбашян, Г. В. Микаелян, "Построение и основные свойства одного семейства функций типа Бляшке для полуплоскости", Изв. АН Арм.ССР, Математика, т. 15, №6, стр. 461 – 474, 1980.
9. А. М. Джрбашян, "О некоторых классах субгармонических функций", Изв. НАН Армении, т. 29, №1, стр. 34 – 49, 1994.
10. W. K. Hayman, P. B. Kennedy, Subharmonic Functions, Academic Press, London, 1976.
11. М. М. Джрбашян, Интегральные Преобразования и Представления Функций в Комплексной Области, М., Наука, 1966.
12. В. И. Крылов, "О функциях, регулярных в полуплоскости", Мат. сб., т. 6(48), №1, стр. 95 – 138, 1939.
13. Е. Д. Соломенцев, "О классах функций, субгармонических в полупростран - стве", Вестник Московского Университета, серия матем., мех., астрон., физ., хим., №5, стр. 73 – 91, 1959.
14. А. М. Джрбашян, "Соотношения равновесия и факторизационные теоремы для мероморфных в полуплоскости функций", Изв. АН Арм.ССР, Математика, т. 21, №3, стр. 213 – 279, 1986.
15. К. Л. Аветисян, "О параметрическом представлении некоторых классов голоморфных в полуплоскости функций", Деп. в Арм.НИИНТИ, №3, 14.10.1992, стр. 2.


12 Декабря 1993

Ереванский государственный университет