ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ТЕОРЕМЫ ГОФМАНА-ВЕРМЕРА ДЛЯ АЛГЕБР ОПЕРАТОРНЫХ ПОЛЕЙ

М. А. Акопян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 28, №6, 1993

Пусть T – метризуемый компакт, A – C^*-алгебра с единицей и $C(T, A)$ – C^*-алгебра всех непрерывных отображений из T в A, наделенная естественными операциями и нормой. *Равномерной* алгеброй T называется (см. [1]) замкнутая подалгебра $\mathcal{M}$ алгебры $C(T, A)$, содержащая константы и разделяющая точки T (для любых $t_1, t_2 \in T$, $t_1 \neq t_2$ и $a_1, a_2 \in A$ существует $x \in \mathcal{M}$ такое, что $x(t_1) = a_1$, $x(t_2) = a_2$). Алгебра A (слой) естественно вкладывается в $C(T, A)$, для $a \in A$ полагая $a(t) \equiv a$, $t \in T$. Равномерная алгебра $\mathcal{M}$ называется *A-алгеброй*, если $A \subset \mathcal{M}$ (см. [1]).

Пусть $\operatorname{Re} x = \frac{x+x^*}{2}$ и $\operatorname{Re} \mathcal{M} = \{\operatorname{Re} x;\ x \in \mathcal{M}\}$ при каждом $x \in \mathcal{M}$. Теорема Гофмана–Вермера (см. [2]) утверждает, что при $A = C$ (поле комплексных чисел) для равномерной алгебры $\mathcal{M} \subset C(T)$ из условия замкнутости $\operatorname{Re} \mathcal{M}$ в $C(T)$ следует, что $\mathcal{M} = C(T)$. Эта теорема была распространена Тейлором (см. [1]) на равномерные алгебры операторных полей с переменным слоем, но при дополнительном предположении на алгебру $\mathcal{M}$, которое даже для простейших алгебр может не выполняться. В настоящей работе доказываются следующие две теоремы.

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{M}$ – равномерная A-алгебра с простым слоем $\mathcal{M} \in C(T, A)$. Если $\operatorname{Re} \mathcal{M}$ замкнуто в $C(T, A)$, то $\mathcal{M} = C(T, A)$.*

Следующее утверждение показывает, что простота алгебры A не является необходимым условием.

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{M}$ – равномерная $B(H)$-алгебра, где $B(H)$ – алгебра всех ограниченных операторов на некотором сепарабельном гильбертовом пространстве H. Тогда, если $Re\,\mathcal{M}$ замкнуто в $C(T, B(H))$, то $\mathcal{M} = C(T, B(H))$.*

Сначала докажем две леммы.

Алгебра $C(T)$ всех непрерывных функций на метризуемом компакте T естественным образом вкладывается в алгебру $C(T, A)$ ($C(T) = C(T, \mathbb{C}1)$, где 1 – единица A). Скажем, что x является вещественным сечением, если x – вещественная из $C(T)$; x – эрмитов элемент $C(T, A)$. Множество $F \subset T$ называется множеством антисимметрии (относительно равномерной алгебры $\mathcal{M}$), если каждое вещественное сечение из $\mathcal{M}$ является константой на F (см. [3]). Множество $E \subset T$ назовем множеством слабой антисимметрии, если каждое эрмитовое сечение x из $\mathcal{M}$ является A – постоянным сечением на E, т.е. существует эрмитовый элемент $a \in A$ такой, что $x\,|_E = a$.

Пусть $\mathcal{M}_H$ – множество всех эрмитовых элементов из $\mathcal{M}$ и $\mathcal{M}_R$ – множество всех вещественных элементов из $\mathcal{M}$. Очевидно, что $\mathcal{M}_R \subset \mathcal{M}_H$. Зафиксируем $t_0 \in T$ и рассмотрим два множества : $E_{t_0} = \{\, t \in T;\ x(t) = x(t_0),\ x \in \mathcal{M}_H \}$, являющееся максимальным множеством антисимметрии и $F_{t_0} = \{\, t \in T;\ x(t) = x(t_0),\ x \in \in \mathcal{M}_R\}$, являющееся максимальным множеством антисимметрии, содержащим t_0. Имеем $E_{t_0} \subset F_{t_0}$. Обратно, каждое множество (слабой) антисимметрии имеет указанный вид. Очевидно, компакт T разбивается на семейство $\{F_t\}$, попарно непересекающихся максимальных множеств антисимметрии и каждое F_t, в свою очередь, разбивается на $\{E_t\}$ – семейство также попарно непересекающихся максимальных множеств слабой антисимметрии. Вообще говоря эти разбиения могут не совпадать, но в случае, когда A проста, справедлива следующая

Лемма 1. *Пусть $\mathcal{M}$ – равномерная A-алгебра с простым слоем, $\mathcal{M} \subset C(T, A)$. Тогда каждое максимальное множество антисимметрии является также максимальным множеством слабой топологии.*

Доказательство. Достаточно показать, что для любого $t_0 \in T$, $F_{t_0} \subset E_{t_0}$. Пусть $\mathcal{M}_0$ – подалгебра $\mathcal{M}$, порожденная $\mathcal{M}_H$. Тогда $\mathcal{M}_0$ – C^*-алгебра, не разделяющая точки E_{t_0}.

Пусть $\{E_t\}$ – разбиение T на максимальные множества слабой антисимметрии и $\tilde{T}$ – компакт, полученный из T с помощью отождествления каждого E_t с точкой. Тогда алгебре $\mathcal{M}_0$ соответствует замкнутая инволютивная подалгебра $\mathcal{M}_1$ в $C(\tilde{T}, A)$, содержащая A. Покажем, что $\mathcal{M}_1$ – равномерная алгебра. Для этого достаточно доказать, что для любых E_{t_1} и E_{t_2} найдется $x \in \mathcal{M}_1$ такой, что $x\,|_{E_{t_1}} = 1$, $x\,|_{E_{t_2}} = 0$. Действительно, пусть $y\,|_{E_{t_1}} = a$, $y\,|_{E_{t_2}} = 0$ (существование такого y следует из максимальности E_{t_1} и E_{t_2}, $E_{t_1} \cap E_{t_2} \neq 0$). Ввиду простоты A найдутся b_i и $c_i \in A$, $i = 1, \ldots, n$ такие, что $\sum_{i=1}^{n} b_i\, a\, c_i = 1$. Поэтому $x = \sum_{i=1}^{n} b_i\, y\, c_i$ удовлетворяет требуемому условию и принадлежит $\mathcal{M}_1$. Таким образом, $\mathcal{M}_1$ – равномерная инволютивная подалгебра $C(\tilde{T}, A)$. Следовательно, по одному из вариантов теоремы Стоуна–Вейерштрасса для алгебр операторных полей, $\mathcal{M}_1 = C(\tilde{T}, A)$ (см. [4], Теорема 11.3.1). В частности, $\mathcal{M}_1 \supset C(\tilde{T})$ и все вещественные функции, постоянные на E_t принадлежат $\mathcal{M}_1$. Следовательно, каждая вещественная функция из $C(T)$, постоянная на каждом максимальном множестве слабой антисимметрии относительно алгебры $\mathcal{M}$, принадлежит $\mathcal{M}$. Поскольку E_{t_0} – максимальное множество слабой антисимметрии, содержащее t_0, то получим $F_{t_0} \subset E_{t_0}$. Таким образом, $F_{t_0} = E_{t_0}$. Отсюда, ввиду произвольности t_0, имеем $\{F_t\} = \{E_t\}$.

Следствие. Пусть $\mathcal{M}$ – равномерная A-алгебра на T с простым слоем на T. Если каждая точка $t \in T$ является максимальным множеством слабой антисимметрии, то $\mathcal{M} = C(T, A)$.

Доказательство. По Лемме 1, максимальные множества слабой антисимметрии и максимальные множества антисимметрии относительно алгебры $\mathcal{M}$ совпадают. Поэтому, $C(T) \subset \mathcal{M}$ и, следовательно, по теореме Стоуна–Вейерштрасса имеем $\mathcal{M} = C(T, A)$.

Пусть $\mathcal{M}$ – равномерная A-алгебра, $\mathcal{M} \subset C(T, A)$. Напомним (см. [5]), что точка $t_0 \in T$ называется 1) точкой слабого пика для $\mathcal{M}$ ($t_0 \in \Pi_w(\mathcal{M})$), если для любых $d > 1$ и окрестности U точки t_0 существует $x \in \mathcal{M}$ такое, что $||x|| < d$, $x(t_0) \geq 0$, $||x(t_0)|| = 1$ и $||x(t)|| < \frac{1}{2d}$ при $t \notin U$; 2) точкой норм пика для $\mathcal{M}$

($t_0 \in \Pi_n(\mathcal{M})$), если существует $x \in \mathcal{M}$ такое, что $x(t_0) > 0$, $||x(t_0)|| = 1$ и $||x(t)|| < 1$ для $t \neq t_0$, 3) точкой пика для $\mathcal{M}$ ($t_0 \in \Pi(\mathcal{M})$), если существует $x \in \mathcal{M}$ такое, что $x(t_0) = 1$, $||x(t)|| < 1$ при $t \neq t_0$. Очевидно, что $\Pi_w \supseteq \Pi_n \supseteq \Pi$.

Лемма 2. *Пусть $\mathcal{M}$ – равномерная A-алгебра с простым слоем, $\mathcal{M} \subset C(T, A)$. Тогда $\Pi_n(\mathcal{M}) = \Pi_w(\mathcal{M})$.*

Доказательство. Пусть $t_0 \in \Pi_w(\mathcal{M})$. Покажем, что $t_0 \in \Pi_n(\mathcal{M})$. Пусть $f \in C_R(T) \subset C(T, A)$ и $f(t_0) = 1$, $f(t) < 1$ для $t \neq t_0$, а φ – чистое состояние на алгебре A. Положим

$$\mathcal{M}_f = \{\, u \in \operatorname{Re} \mathcal{M};\ u \leq f1 \}.$$

Тогда, по Лемме 6.2.1 в [5], имеем

$$\sup_{u \in \mathcal{M}_f} \varphi(u(t_0)) = 1.$$

Поэтому для любого фиксированного положительного числа $\delta < 1/2$ найдется $u \in \mathcal{M}_f$ такое, что $\varphi(e^{u(t_0)}) > e^{1-\delta}$. Пусть функция $\psi \in \mathcal{M}$ такая, что $\operatorname{Re} \psi = u$. Положим $g = \psi - ia$, где $a \in A$ и $a = \operatorname{Im} \psi(t_0)$. Очевидно, $g \in \mathcal{M}$, $\operatorname{Re} g = u$ и $g(t_0) = u(t_0)$. Рассмотрим функцию $h = \exp g \in \mathcal{M}$. Учитывая, что $u \leq f1$, в силу Леммы 6.1.1. из [5], имеем $||h(t)|| \leq \exp f(t)$ для всех $t \in T$, откуда $||h(t_0)|| < e$. Имея в виду, что $h(t_0) = \exp u(t_0)$ и $\varphi(e^{u(t_0)}) > e^{1-\delta}$, получим $e > ||h(t_0)|| \geq e^{1-\delta}$. Пусть $\widetilde{h} = \frac{h}{\varphi(h(t_0))}$. Очевидно, что функция $\widetilde{h}$ удовлетворяет следующим условиям :

a) $||\widetilde{h}|| < \frac{e}{e^{1-\delta}} = e^{\delta}$,

b) $||\widetilde{h}(t)|| < \exp(f(t) - 1 + \delta)$ для всех $t \in T$,

c) $\varphi(\widetilde{h}(t_0)) = 1$.

Таким образом, изменяя $f(t) \in C(T)$ имеем, что для всякой окрестности U точки t_0 существует $x \in \mathcal{M}$ такое, что

a) $||x|| \leq e^{\delta}$,

b) $||x(t)|| < \delta$ для всех $t \in T \setminus U$,

c) $x(t_0) > 0$,

d) $\varphi(x(t_0)) = 1$.

Из Предложения 5.2 (ii) в [5] следует, что t_0 – точка норм пика.

Доказательство Теоремы 1. В силу Следствия из Леммы 1, достаточно доказать, что максимальные множества антисимметрии алгебры $\mathcal{M}$ одноточечны. Допустим противное. Не теряя общности, предположим, что весь компакт T является максимальным множеством антисимметрии относительно алгебры $\mathcal{M}$. Зафиксируем $t_0 \in T$ и положим $\mathcal{M}_{t_0} = \{x \in \mathcal{M};\ x(t_0) = 0\}$. Очевидно, $\mathcal{M}_{t_0}$ – идеал в $\mathcal{M}$. Определим непрерывное отображение $\Phi : \mathcal{M}_{t_0} \longrightarrow \mathrm{Re}\,\mathcal{M}_{t_0}$, $\Phi(x) = \mathrm{Re}\,x$ для всех $x \in \mathcal{M}_{t_0}$. Поскольку $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{t_0} + \Lambda$, то $\mathrm{Re}\,\mathcal{M}_{t_0}$ - замкнутое подпространство пространства $\mathrm{Re}\,\mathcal{M}$. Пространство $H = \mathrm{Ker}\,\Phi + i\mathrm{Ker}\,\Phi$ является самосопряженным подпространством в $\mathcal{M}$, поэтому алгебра $\mathcal{M}_0$, порожденная всеми эрмитовыми элементами из $\mathcal{M}$, является замкнутой инволютивной подалгеброй в $\mathcal{M}$. Так как T – максимальное множество слабой антисимметрии, то $\mathcal{M}_0 = 0$. Следовательно, Φ – взаимно-однозначное отображение. Следовательно, по теореме об обратном отображении, существует непрерывное отображение Φ^{-1} из $\mathrm{Re}\,\mathcal{M}_{t_0}$ на $\mathcal{M}_{t_0}$. Таким образом, существуют такие постоянные $c_1, c_2 > 0$, что для любого $x \in \mathcal{M}_{t_0}$ имеет место

$$||\Phi(x)|| < c_1||x||, \quad ||\Phi^{-1}(\mathrm{Re}\,x)|| < c_2||\mathrm{Re}\,x||. \tag{1.1}$$

Пусть $t_1 \in \Pi_n(\mathcal{M})$, $t_1 \neq t_0$ (существование t_1 следует из Леммы 2). Поэтому найдется $x \in \mathcal{M}_{t_0}$ такое, что (см. доказательство Леммы 2)

$$\begin{aligned} &a) \quad x(t_1) \text{ эрмитов, } ||x(t_1)|| = 1 \quad (\text{ можно считать, что } x(t_1) > 0), \\ &b) \quad ||x(t_1)|| < 1, \text{ если } t \neq t_1. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Пусть U_1 – такая окрестность t_1, что для любого $t \in U_1$, $||\mathrm{Im}\,x(t)|| < \varepsilon/2$. Поскольку $T \setminus U_1$ – компакт, то найдется такое δ, $0 < \delta < 1$, что $\sup_{t \in T \setminus U_1} ||x(t)|| < \delta$. Пусть n_1 – такое целое число, что $||x^{n_1}(t)|| < \varepsilon/2$, если $t \in T \setminus U_1$. Положим $x_1 = x^{n_1}$. Очевидно x_1 удовлетворяет условиям (1.2). Пусть теперь U_2 ($\overline{U}_2 \subset U_1$) – такая окрестность точки t_1, что $||\mathrm{Im}\,x_1(t)|| < \frac{\varepsilon}{2^2}$ для всех $t \in U_2$. Выберем n_2 так, чтобы $||x_1^{n_2}(t)|| < \frac{\varepsilon}{2^2}$ при $t \in T \setminus U_2$. Положим $x_2 = x_1^{n_2}$. Продолжая этот процесс, имеем последовательность окрестностей $U_1 \supset U_2 \supset \ldots \supset U_n \supset \ldots$ и последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots \in \mathcal{M}_{t_0}$ таких,

что все x_i удовлетворяют условиям (1.2) и

$$||x_i(t)|| < \frac{\varepsilon}{2^i}, \quad \text{если} \quad t \in T \setminus U_i$$

$$||\mathrm{Im}\ x_i(t)|| < \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}, \quad \text{если} \quad t \in U_{i+1},\ i = 1, 2, \ldots.$$

Положим $y_k = \frac{1}{k}(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)$. Очевидно y_k удовлетворяет условиям (1.2). Теперь оценим $\mathrm{Im}\ y_k$. Пусть $t \in U_i$, но $t \notin U_{i+1}$, тогда $t \in U_j$ для $1 \le j \le i$ (из построения U_i). Следовательно

$$||\mathrm{Im}\ x_j(t)|| < \frac{\varepsilon}{2^j} \quad \text{если} \quad 1 \le j \le i-1,$$

$$||x_j(t)|| < \frac{\varepsilon}{2^j} \quad \text{если} \quad j \ge i+1.$$

Таким образом

$$||\mathrm{Im}\ y_k(t)|| \le \frac{1}{k}\left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2^2} + \cdots + \frac{\varepsilon}{2^{i-1}} + 1 + \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} + \cdots + \frac{\varepsilon}{2^k}\right) < \frac{1}{k} + \frac{\varepsilon}{k},$$

т.е. $||\mathrm{Im}\ y_k|| < \frac{1+\varepsilon}{k}$.

Имея в виду $||\Phi^{-1}(\mathrm{Re}\ iy_k)|| = 1$, применяя (1.1) и замечая, что $\mathrm{Re}\ iy_k = \mathrm{Im}\ y_k$, получим $||\Phi^{-1}(\mathrm{Re}\ iy_k)|| < c_k \frac{1+\varepsilon}{k}$. Если $k \to \infty$, то $c_k \to \infty$. т.е. Φ^{-1} неограничено, что привело к противоречию. Теорема доказана.

Доказательство Теоремы 2. Пусть $K(H)$ алгебра всех компактных операторов на некотором гильбертовом пространстве H. Покажем, что идеал $I = C(T, K(H))$ принадлежит алгебре $\mathcal{M}$. Пусть $e_1, e_2, \ldots$ ортонормированный базис в H и P_n проектор на конечномерное подпространство H_n, порожденный первыми n элементами базиса. Рассмотрим алгебру $\mathcal{M}_n = P_n \mathcal{M} P_n$, $\mathcal{M}_n \subset C(T, B_n)$, где $B_n = P_n B(H) P_n$ и $C(T, B_n) = P_n C(T, B(H)) P_n$. Легко проверить, что $\mathcal{M}_n$ равномерная алгебра с единицей P_n и $\mathrm{Re}\ \mathcal{M}_n = P_n \mathrm{Re}\ \mathcal{M} P_n$. Так как $\mathcal{M}_n$ – алгебра с матричным слоем, то $\mathcal{M}_n$ расщепима, т.е. $\mathcal{M}_n$ порождается алгеброй B_n и некоторой коммутативной равномерной алгеброй D (см. [6], Предложение 1.8), которая не зависит от выбора n (см. [7]). В силу замкнутости $\mathrm{Re}\ \mathcal{M}$ подпространство $\mathrm{Re}\ \mathcal{M}_n$ также замкнуто, откуда следует замкнутость $\mathrm{Re}\ D$. В самом деле, пусть $n = 1$, т.е. рассмотрим подалгебру $\mathcal{M}_1 = D P_1$. Тогда $\mathrm{Re}\ \mathcal{M}_1$ замкнуто и, вследствие изометричности D и $D P_1$, вытекает замкнутость $\mathrm{Re}\ D$. По теореме Гофмана-Вермера (см. [2]), $D = C(T)$ и $\mathrm{Re}\ D = C_R(T)$.

Пусть $x \in I = C(T, K(H))$. Тогда ввиду того, что конечномерные операторы плотны в $K(H)$, для любого $\varepsilon > 0$ найдется целое число $n > 0$ такое, что $\|P_n x P_n - x\| < \varepsilon$, т.е. $\cup_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_n$ плотно в I. Следовательно, $I \in \mathcal{M}$. Поскольку I является идеалом в $C(T, B(H))$, то фактор-алгебра $C(T, B(H))/I$ в точности совпадает с $C(T, A)$, A – алгебра Калкина. Поэтому алгебра $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}/I$ является замкнутой подалгеброй $C(T, A)$, разделяющей точки T, т.е. $\mathcal{M}_1$ – равномерная A-подалгебра алгебры $C(T, A)$. Из замкнутости $\mathrm{Re}\, \mathcal{M}$ следует замкнутость $\mathrm{Re}\, I \subset \subset \mathcal{M}$ (I – C^*-подалгебра в $\mathcal{M}$). Откуда имеем, что $\mathrm{Re}\, \mathcal{M}_1$ также замкнуто. Так как алгебра A проста, то из Теоремы 1 следует, что $\mathcal{M}_1 = C(T, A)$. Следовательно, $\mathcal{M} = C(T, B(H))$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. D. C. Taylor, "Interpolation in algebras of operator fields", J. of Funct. anal., vol. 10, no. 2, pp. 159 – 190, 1972.
2. K. Hoffman, J. Wermer, "A characterisation of $C(X)$", Pacific J. Math., vol. 12, pp. 941 – 944, 1962.
3. В. А. Арзуманян, С. А. Григорян, " Равномерные алгебры операторных полей", Зап. научн. сем. ЛОМИ, т. 123, стр. 185 – 189, 1983.
4. J. Diximer, Les C^*-Algebras et Leurs representations, Gautier-Villar, Paris, 1969.
5. В. А. Арзуманян, С. А. Григорян, " Границы равномерных алгебр операторных полей", Изв. АН Арм. ССР, Математика, т. 23, №5, стр. 422 - - 438, 1988.
6. В. А. Арзуманян, С. А. Григорян, " Спектр равномерных алгебр операторных полей", Изв. АН Арм. ССР, Математика, т. 21, №1, стр. 63 – 79, 1986.
7. М. А. Акопян, "О равномерных $B(H)$-алгебрах", Изв. АН Арм. ССР, Математика, т. 24, №2, стр. 176 - 180, 1991.

27 Августа 1993

Вычислительный центр
Министерства экономики Армении