

ДУАЛЬНЫЕ КОМБИНАТОРНЫЕ ФОРМУЛЫ АМБАРЦУМЯНА

Г. Ю. Панина

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
том 28, №6, 1993

В своих предыдущих работах автор вывела обобщения комбинаторной формулы Амбарцумяна. В настоящей работе приведены их дуальные версии. Эти формулы вычисляют меры многогранных множеств в $\mathbb{R}^n$ с помощью комбинаторных коэффициентов и мер некоторых специальных многогранных множеств.

ВВЕДЕНИЕ

Формулы Амбарцумяна представляют меры множеств Бьюффона гиперплоскостей в $\mathbb{R}^n$ посредством определенных комбинаторных коэффициентов и значений мер некоторых простых подмножеств гиперплоскостей. Впервые эти формулы были получены Р. В. Амбарцумяном для пространств $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^4$ (см. [1]) и изучены для общих $\mathbb{R}^{2k}$ в [2].

А. Бадли описал в общих чертах метод получения этих формул для общего $\mathbb{R}^n$ посредством классических формул для многогранников (см. [3]). Другие комбинаторные формулы приводятся автором в работах [4] и [5]. Они касаются мер множеств гиперплоскостей в $\mathbb{R}^n$ и множеств алгебраических поверхностей в $\mathbb{R}^n$.

Цель настоящей работы – получение дуальных формул, позволяющих получать меры многогранных множеств в $\mathbb{R}^n$ в терминах комбинаторных коэффициентов и значений мер некоторых специальных многогранных множеств.

§1. НЕКОТОРЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Мы используем следующие обозначения :

E_k – множество всех k -мерных плоскостей в $\mathbb{R}^n$;

E_k^0 - множество k -мерных плоскостей в $\mathbb{R}^n$, содержащих начало координат O ;

Ω^{n-1} - единичная сфера в $\mathbb{R}^n$ с центром в O ;

для $e, e_1, e_2 \in E_{n-1} \setminus E_{n-1}^0$ положим:

$\mathbb{R}^+(e)$ - полусфера, ограниченная e , которая не содержит O .

$$EX(e_1, e_2) = \mathbb{R}^+(e_1) \cap \mathbb{R}^+(e_2);$$

для $K \subset \mathbb{R}^n$ положим

$c(K)$ - выпуклая оболочка K ;

$$[K] = \{e \in E_{n-1} : e \text{ пересекает } c(K)\};$$

$$(K) = \{e \in E_{n-1} : e \text{ содержит } K\};$$

$\text{aff}(K)$ - минимальное аффинное преобразование, содержащее K ;

$\text{Int}(K)$ - внутренность K в $\text{aff}(K)$.

Меры. Мера μ , определенная на E_{n-1} называется *беспучковой*, если $\mu(\{e : P \in e\}) = 0$ для любой точки P ; μ называется *беспучковой относительно множества* $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$, если $\mu(\{e : P \in e\}) = 0$ для любой точки $P \in \mathcal{P}$. Все меры на $\mathbb{R}^n$ предполагаются конечными. Мера μ на $\mathbb{R}^n$ называется *бесплоскостной* (б. п.- мера) на множестве гиперплоскостей $\mathcal{E}$, если для любого $e \in \mathcal{E}$, имеем $\mu(e) = 0$.

Симплексы. Пусть $\mathcal{P}$ - конечное множество точек в $\mathbb{R}^n$. Подмножество $\theta \subset \mathcal{P}$, состоящее из не более чем $(n+1)$ точек, называется *симплексом* (вершины, пустое множество не является симплексом). Множество всех симплексов обозначим через $T(\mathcal{P})$. Множество всех симплексов, состоящих из $k+1$, точек обозначим через $T(k) \subset T(\mathcal{P})$. Симплекс Δ содержит симплекс θ , если множество вершин Δ содержит множество вершин θ .

Кольца. Для $A, B \subset \mathcal{P}$ определим

$$\langle A|B \rangle = \{e \in E_{n-1} : e \text{ отделяет } A \text{ от } B\}.$$

Кольцо Бьюффона $B(\mathcal{P})$ - кольцо всех подмножеств E_{n-1} , порожденное всеми множествами типа $\langle A|B \rangle$, с непустыми $A, B \subset \mathcal{P}$, посредством операций объединения, пересечения и разности между множествами. Кольцо $K(\mathcal{P})$ - кольцо

всех множеств E_{n-1} , порождаемых множествами из $B(\mathcal{P})$, $\{(\theta)\}_{\theta \in T(\mathcal{P})}$ и E_{n-1} .

Элементы $B(\mathcal{P})$ называются *множествами Бьюффона*.

Пусть $\mathcal{E} = \{e_i\}_{i=1}^m$ — множество гиперплоскостей из $E_{n-1} \setminus E_{n-1}^0$ в общем положении. Определим кольцо

$$B^*(\mathcal{E}) = \{ \text{многогранник } A \subset \mathbb{R}^n : O \notin A, \text{ грани } A \\ \text{лежат на одной гиперплоскости } e_i \}.$$

Для конечного множества точек $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ в общем положении и гиперплоскости e будем говорить, что гиперплоскость e' *лежит близко к e* , если e может быть непрерывно преобразована в e' , не задевая точек из $\mathcal{P}$ кроме тех, что лежат в e . Для конечного общего множества гиперплоскостей $\mathcal{E} \subset E_{n-1}$ в общем положении и точки e будем говорить, что точка e' *лежит близко к e* , если существует путь, соединяющий e и e' , внутренность которого не пересекает ни одну из гиперплоскостей из $\mathcal{E}$.

Атомы. Пусть A, B — непустые подмножества $\mathcal{P}$, $A \cup B = \mathcal{P}$, $A \cap B = \emptyset$. Множество $(A|B)$ гиперплоскостей называется *атомом*. Множество Бьюффона можно эквивалентно определить как множество, представимое в виде объединения непересекающихся атомов. Множество гиперплоскостей, представляемых как $[K]$ для некоторого $K \subset \mathbb{R}^n$, называется *суператомом*.

§2. ОБОБЩЕННЫЕ ФОРМУЛЫ АМБАРЦУМЯНА

Теорема 2.1 (см. [4], [5]) Пусть n — четное, а μ — локально конечная беспучковая мера на E_{n-1} . Для любого конечного множества точек $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ в общем положении и любого множества Бьюффона $A \in B(\mathcal{P})$

$$\mu(A) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k+1} \sum_{(k)} c_A(\theta) \mu([\theta]),$$

где коэффициенты $c_A(\theta)$ вычисляются с помощью следующего алгоритма.

Алгоритм 2.1. Коэффициенты $c_A(\theta)$ вычисляются шаг за шагом, начиная с членов высокой размерности, при предположении, что $\mathcal{P} \cup \{0\}$ также является множеством в общем положении.

Шаг 1. Пусть $\theta \in (n-1)$, а точки $P_1, P_2, \dots, P_n$ суть вершины θ и e — гиперплоскость, содержащая θ . Пусть $(e, \underbrace{\pm, \dots, \pm}_{n \text{ раз}})$ — гиперплоскость, которая лежит близко к e и позиция которой относительно $P_1, \dots, P_n$ определяется следующим правилом выбора знака: для любого j , имеем $P_j \in \mathbb{R}^+(e, \pm, \dots, \pm)$ тогда и только тогда, когда в скобках на j -том месте стоит знак $+$. Положим теперь

$$c_A(\theta) = \sum_{(\pm, \dots, \pm)} I_A(e, \pm, \dots, \pm) (-1)^{\Phi(\pm, \dots, \pm)},$$

где сумма берется по всем наборам, содержащим n плюсов и минусов; I_A — индикаторная функция множества A , $\Phi(\pm, \dots, \pm)$ — число минусов в наборе.

Шаг 2. Пусть $\theta \in (k)$ с четным k . Тогда положим

$$c_A(\theta) = \frac{1}{2} \sum_{m=k+1}^{n-1} (-1)^m \sum_{\substack{\Delta \in (m), \\ \Delta \text{ содержит } \theta}} c_A(\Delta).$$

Шаг 3. Пусть $\theta \in (k)$ с нечетным k , а $P_1, \dots, P_{k+1}$ — вершины θ . Выберем гиперплоскость e , содержащую θ и не содержащую другие точки $\mathcal{P}$. Пусть $(e, \underbrace{\pm, \dots, \pm}_{k+1 \text{ раз}})$ — гиперплоскость, лежащая близко к e , положение которой относительно $P_1, \dots, P_{k+1}$ определяется следующим образом. Для каждого j , $P_j \in \mathbb{R}^+(e, \pm, \dots, \pm)$ тогда и только тогда, если в скобках на j -том месте стоит знак $+$. Тогда

$$c_A(\theta) = \sum_{(\pm, \dots, \pm)} I_A(e, \pm, \dots, \pm) (-1)^{\Phi(\pm, \dots, \pm)+1} + \frac{1}{2} \sum_{m=k+1}^{n-1} (-1)^m \sum_{\substack{\Delta \in (m), \Delta \text{ содержит } \theta, \\ \text{Int}(\Delta) \cap \theta \neq \emptyset}} c_A(\Delta).$$

Теорема 2.2. (см. [1]) Пусть n нечетно, $\mathcal{P}$ — конечное множество точек, μ — беспучковая мера относительно $\mathcal{P} \cup \{O\}$, $A \in \mathcal{B}(\mathcal{P})$. Если $\mathcal{P} \cup \{O\}$ является множеством в общем положении, то

$$\mu(A) = \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{\Delta \in (m)} [d_A^1(\Delta) \mu([\Delta]) + d_A^2(\Delta) \mu([\bar{\Delta}])],$$

где $\bar{\Delta} = \Delta \cup \{O\}$, $d_A^{1,2}$ — коэффициенты, вычисляемые согласно следующим алгоритмам.

Алгоритм 2.2. Начнем с члена высокой размерности.

Шаг 1. Пусть $\Delta \in (n-1)$, точки $P_1, \dots, P_n$ – вершины Δ , а e – гиперплоскость, содержащая Δ . Пусть $(e, \pm, \dots, \pm)$ – гиперплоскость, лежащая близко к e , положение которой относительно $P_1, \dots, P_n$ определяется следующим правилом знака: для любого j , имеем $P_j \in \mathbb{R}^+(e, \pm, \dots, \pm)$ тогда и только тогда, когда в скобках на j -том месте стоит знак $+$. Теперь положим

$$c_A^1(\Delta) = 0, \quad c_A^2(\Delta) = - \sum_{(\pm, \dots, \pm)} I_A(e, \pm, \dots, \pm) (-1)^{\Phi(\pm, \dots, \pm)},$$

$$c_A^3(\Delta) = \sum_{(\pm, \dots, \pm)} I_A(e, \pm, \dots, \pm) (-1)^{\Phi(\pm, \dots, \pm)}, \quad c_A^4(\Delta) = 0,$$

где сумма берется по всем наборам, состоящих из n плюсов и минусов.

Шаг 2. Пусть $\Delta \in (n-2)$, точки $P_1, \dots, P_{n-1}$ – вершины Δ , а g – гиперплоскость, содержащая Δ и O . Пусть $(g, \pm, \dots, \pm)$ – гиперплоскость, лежащая близко к g , положение которой определяется как и в предыдущем шаге. Теперь положим

$$c_A^1(\Delta) = 0, \quad c_A^4(\Delta) = -2 \sum_{(\pm, \dots, \pm)} I_A(g, \pm, \dots, \pm) (-1)^{\Phi(\pm, \dots, \pm)},$$

$$c_A^2(\Delta) = \frac{1}{2} \sum_m (-1)^{m+1} \sum_{\theta \in (m), \theta \text{ содержит } \Delta} c_A^2(\theta) - \frac{1}{2} c_A^4(\Delta),$$

$$c_A^3(\Delta) = \frac{1}{2} \sum_m (-1)^{m+1} \sum_{\theta \in (m), \theta \text{ содержит } \Delta} c_A^3(\theta) - \frac{1}{2} c_A^4(\Delta).$$

Шаг 3. Пусть $\Delta \in (k)$ с четным k , точки $P_1, \dots, P_{k+1}$ – вершины Δ . Выберем гиперплоскость e , содержащую Δ и не содержащую остальные точки $P \cup \{O\}$. Определим гиперплоскости $(e, \pm, \dots, \pm)$ как в шаге 1. Выберем точку $O'(e)$ такую, что сегмент $[O'(e), O]$ пересекает e . Теперь положим

$$c_A^1(\Delta) = \frac{1}{2} \sum_m (-1)^m \sum_{\theta \in (m), \theta \text{ содержит } \Delta} [c_A^1(\theta) - c_A^2(\theta) - c_A^3(\theta) + c_A^4(\theta)] + \frac{1}{2} [c_A^4(\Delta) - c_A^2(\Delta) - c_A^3(\Delta)],$$

$$c_A^2(\Delta) = \sum_{(\pm, \dots, \pm)} I_A(e, \pm, \dots, \pm) (-1)^{\Phi(\pm, \dots, \pm)} -$$

$$- \frac{1}{2} \sum_m (-1)^m \sum_{\substack{\theta \in (m), \theta \text{ содержит } \Delta \\ \text{Int}(\theta) \cap e \neq \emptyset}} c_A^2(\theta) + \frac{1}{2} \sum_m (-1)^m \sum_{\substack{\theta \in (m), \theta \text{ содержит } \Delta \\ \text{Int}(\theta \cup \{O\}) \cap e \neq \emptyset}} c_A^4(\theta),$$

$$c_A^3(\Delta) = - \sum_{(\pm, \dots, \pm)} I_A(e, \pm, \dots, \pm) (-1)^{\Phi(\pm, \dots, \pm)} -$$

$$- \frac{1}{2} \sum_m (-1)^m \sum_{\substack{\theta \in (m), \theta \text{ содержит } \Delta \\ \text{Int}(\theta) \cap e \neq \emptyset}} c_A^3(\theta) + \frac{1}{2} \sum_m (-1)^m \sum_{\substack{\theta \in (m), \theta \text{ содержит } \Delta \\ \text{Int}(c(\theta \cup \{O'(e)\})) \cap e \neq \emptyset}} c_A^4(\theta),$$

$$c_A^4(\Delta) = \frac{1}{2} \sum_m (-1)^m \sum_{\theta \in (m), \theta \text{ содержит } \Delta} c_A^4(\theta).$$

(Если $k = 0$, то $c_A^1(\Delta) = 0$).

Шаг 4. Пусть $\Delta \in (k)$ с нечетным k . Выберем гиперплоскость e , содержащую Δ и не содержащую остальные точки $\mathcal{P} \cup \{O\}$. Выберем гиперплоскость g , содержащую Δ и O , но не содержащую остальные точки $\mathcal{P}$. Определим гиперплоскости $(e, \pm, \dots, \pm)$ и $(g, \pm, \dots, \pm)$ как в шагах 1 и 2. Выберем точку $O'(e)$ такую, что сегмент $[O'(e), O]$ пересекает e . Положим

$$c_A^1(\Delta) = - \sum_{(\pm, \dots, \pm)} I_A(e, \pm, \dots, \pm) (-1)^{\Phi(\pm, \dots, \pm)} +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_m (-1)^m \left[\sum_{\substack{\theta \in (m), \theta \text{ содержит } \Delta \\ \text{Int}(\theta) \cap e \neq \emptyset}} c_A^1(\theta) - \sum_{\substack{\theta \in (m), \theta \text{ содержит } \Delta \\ \text{Int}(c(\theta \cup \{O'\})) \cap e \neq \emptyset}} c_A^2(\theta) - \right.$$

$$\left. \sum_{\substack{\theta \in (m), \theta \text{ содержит } \Delta \\ \text{Int}(c(\theta \cup O)) \cap e \neq \emptyset}} c_A^3(\theta) + \sum_{\substack{\theta \in (m) \\ \theta \text{ содержит } \Delta}} c_A^4(\theta) \right] + \frac{1}{2} c_A^4(\Delta),$$

$$c_A^2(\Delta) = \frac{1}{2} \sum_m (-1)^m \sum_{\theta \in (m), \theta \text{ содержит } \Delta} [c_A^2(\theta) - c_A^1(\theta)] + \frac{1}{2} c_A^4(\Delta),$$

$$c_A^3(\Delta) = \frac{1}{2} \sum_m (-1)^m \sum_{\theta \in (m), \theta \text{ содержит } \Delta} [c_A^3(\theta) - c_A^4(\theta)] + \frac{1}{2} c_A^4(\Delta),$$

$$c_A^4(\Delta) = \sum_{(\pm, \dots, \pm)} I_A(g, \pm, \dots, \pm) (-1)^{\Phi(\pm, \dots, \pm)} + \frac{1}{2} \sum_m (-1)^m \sum_{\substack{\theta \in (m), \theta \text{ содержит } \Delta \\ \text{Int}(\theta) \cap e \neq \emptyset}} c_A^4(\theta).$$

Шаг 5. Для всех Δ положим

$$d_A^1(\Delta) = \frac{1}{2} [c_A^1(\Delta) + c_A^3(\Delta)], \quad d_A^2(\Delta) = \frac{1}{2} [c_A^2(\Delta) - c_A^3(\Delta)].$$

§3. ДУАЛЬНЫЕ ФОРМУЛЫ

Зафиксируем в $\mathbb{R}^n$ декартову систему координат $O; x_1, \dots, x_n$ и воспользуемся стереографической проекцией

$$\phi: \mathbb{R}^n \setminus \{O\} \mapsto E_{n-1} \setminus E_{n-1}^0,$$

определяемой обычным образом: $\phi((a_1, \dots, a_n))$ гиперплоскость, задаваемая уравнением:

$$a_1 x_1 + \dots + a_n x_n + 1 = 0.$$

Лемма 3.1.

1. $\phi \cdot \phi = \text{— тождественное преобразование на } \mathbb{R}^n \setminus \{O\}$.
2. ϕ взаимно-однозначное соответствие.
3. Для любого $P \in \mathbb{R}^n \setminus \{O\}$ и $e \in E_{n-1} \setminus E_{n-1}^0$,

$$P \in e \iff \phi^{-1}(e) \in \phi(P).$$

4. Для любого $P_1, P_2 \in \mathbb{R}^n \setminus \{O\}$ и $e \in E_{n-1} \setminus E_{n-1}^0$,

$$e \in (P_1 | P_2) \iff \phi^{-1}(e) \in EX(\phi(P_1), \phi(P_2)).$$

Лемма 3.2. Пусть $\mathcal{E} = \{e_i\}_{i=1}^m$ — множество гиперплоскостей из $E_{n-1} \setminus E_{n-1}^0$ в общем положении. Пусть $A \in B^*(\mathcal{E})$. Тогда A можно получить из множества типа $EX(e_i, e_j)$ посредством операций $\cup$ и $\cap$. Следовательно

$$\phi(A) \in B(\{\phi^{-1}(e_i)\}_{e_i \in \mathcal{E}}).$$

Пусть μ — конечная б.п.-мера относительно $\mathcal{E}$ на $\mathbb{R}^n$. Отображение ϕ индуцирует беспучковую относительно $\{\phi^{-1}(e_i)\}_{e_i \in \mathcal{E}}$ меру μ^* на $E_{n-1} \setminus E_{n-1}^0$. Так как $\mu(A) = \mu^*(\phi(A))$, то можем вычислить $\mu(A)$, применяя Теоремы 2.1 и 2.2 к $\phi(A)$.

Теорема 3.1. (Дуальная комбинаторная формула). Пусть $\mathcal{E} \subset E_{n-1} \setminus E_{n-1}^0$ — конечное множество гиперплоскостей в общем положении, μ — конечная б.п.-мера на $\mathcal{E}$ мера и $A \in B^*(\mathcal{E})$.

1. Если n четно, то

$$\mu(\Lambda) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k+1} \sum_{[k]} c_{\Lambda}(\theta) \mu([\theta]),$$

2. Если n нечетно, то выберем гиперплоскость e_0 из $E_{n-1} \setminus E_{n-1}^0$ такую, что $\mathcal{E} \cup \{e_0\}$ остается в общем положении. Тогда

$$\mu(\Lambda) = \sum_{m=0}^n \sum_{\Delta \in [m]} [d_A^1(\Delta) \mu([\Delta]) + d_A^2(\Delta) \mu([\bar{\Delta}])],$$

где $[k]$ — множество всех $(k+1)$ -элементных подмножеств $\mathcal{E}$, $\bar{\Delta} = \Delta \cup \{e_0\}$,

$$[\theta] = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists e_1, e_2 \in \theta \text{ такие, что } x \in EX(e_1, e_2), \quad x \notin e_1, \quad x \notin e_2\},$$

$c_{\Lambda}(\theta)$ и $d_A^{1,2}(\theta)$ — комбинаторные коэффициенты, вычисляемые с помощью Алгоритмов 3.1 и 3.2, соответственно.

Алгоритм 3.1. Коэффициенты вычисляются шаг за шагом, начиная с членов высокой размерности.

Шаг 1. Пусть $\theta \in [n-1]$, и пусть $P_1, P_2, \dots, P_n$ — гиперплоскости θ , а e — пересечение всех P_i . Пусть $(e, \underbrace{\pm, \dots, \pm}_{n \text{ раз}})$ — точка, лежащая близко к e , позиция которой относительно $P_1, \dots, P_n$ определяется следующим правилом знака: для любого j , имеем $(e, \pm, \dots, \pm) \in \mathbb{R}^+(P_j)$ тогда и только тогда, когда в скобках на j -том месте стоит знак $+$. Теперь положим

$$c_{\Lambda}(\theta) = \sum_{(\pm, \dots, \pm)} I_{\Lambda}(e, \pm, \dots, \pm) (-1)^{\Phi(\pm, \dots, \pm)},$$

где сумма берется по всем наборам, состоящих из n плюсов и минусов; I_{Λ} — индикаторная функция множества Λ , $\Phi(\pm, \dots, \pm)$ — число минусов в наборе.

Шаг 2. Пусть $\theta \in [k]$ с четным k . Тогда

$$c_{\Lambda}(\theta) = \frac{1}{2} \sum_{m=k+1}^{n-1} (-1)^m \sum_{\substack{\Delta \in [m], \\ \Delta \text{ содержат } \theta}} c_{\Lambda}(\Delta).$$

Шаг 3. Пусть $\theta \in [k]$ с четным k , и пусть $P_1, \dots, P_{k+1}$ — гиперплоскости θ . Выберем точку e , лежащую на пересечении всех P_i и не лежащую на любой другой гиперплоскости $\mathcal{E}$. Пусть $(e, \underbrace{\pm, \dots, \pm}_{k+1 \text{ раз}})$ — точка, лежащая близко к e .

положение которой относительно $P_1, \dots, P_{k+1}$ определяется следующим образом. Для каждого j , $(e, \pm, \dots, \pm) \in \mathbb{R}^+(P_j)$ тогда и только тогда, когда в скобках на j -том месте стоит знак $+$. Тогда

$$c_A(\theta) = \sum_{(\pm, \dots, \pm)} I_A(e, \pm, \dots, \pm) (-1)^{\Phi(\pm, \dots, \pm)+1} + \\ + \frac{1}{2} \sum_{m=k+1}^{n-1} (-1)^m \sum_{\substack{\Delta \in [m], \Delta \text{ содержит } \theta, \\ \text{Int}(\Delta) \cap e \neq \emptyset}} c_A(\Delta).$$

Алгоритм 3.2. Коэффициенты вычисляются шаг за шагом, начиная с членов высокой размерности.

Шаг 1. Пусть $\Delta \in [n-1]$, а $P_1, \dots, P_n$ — гиперплоскости Δ , e — пересечение всех P_i . Пусть $(e, \pm, \dots, \pm)$ — точка, лежащая близко к e , положение которой относительно $P_1, \dots, P_n$ определяется следующим образом. Для каждого j $(e, \pm, \dots, \pm) \in \mathbb{R}^+(P_j)$ тогда и только тогда, когда в скобках на j -том месте стоит знак $+$. Теперь положим

$$c_A^1(\Delta) = 0, \quad c_A^2(\Delta) = - \sum_{(\pm, \dots, \pm)} I_A(e, \pm, \dots, \pm) (-1)^{\Phi(\pm, \dots, \pm)}, \\ c_A^3(\Delta) = \sum_{(\pm, \dots, \pm)} I_A(e, \pm, \dots, \pm) (-1)^{\Phi(\pm, \dots, \pm)}, \quad c_A^4(\Delta) = 0,$$

где сумма берется по всем наборам, состоящих из n плюсов и минусов.

Шаг 2. Пусть $\Delta \in [n-2]$, $P_1, \dots, P_{n-1}$ — гиперплоскости Δ , а g — пересечение всех P_i и e_0 . Пусть $(g, \pm, \dots, \pm)$ — точка, лежащая близко к g , позиция которой определяется как в предыдущем шаге. Положим

$$c_A^1(\Delta) = 0, \quad c_A^4(\Delta) = -2 \sum_{(\pm, \dots, \pm)} I_A(g, \pm, \dots, \pm) (-1)^{\Phi(\pm, \dots, \pm)}, \\ c_A^2(\Delta) = \frac{1}{2} \sum_m (-1)^{m+1} \sum_{\theta \in [m], \theta \text{ содержит } \Delta} c_A^2(\theta) - \frac{1}{2} c_A^4(\Delta), \\ c_A^3(\Delta) = \frac{1}{2} \sum_m (-1)^{m+1} \sum_{\theta \in [m], \theta \text{ содержит } \Delta} c_A^3(\theta) - \frac{1}{2} c_A^4(\Delta).$$

Шаг 3. Пусть $\Delta \in [k]$ с четным k , $P_1, \dots, P_{k+1}$ — гиперплоскости Δ . Выберем точку e , лежащую в пересечении всех P_i и не лежащую в любой другой гиперплоскости из $\mathcal{P} \cup \{e_0\}$. Определим $(e, \pm, \dots, \pm)$ как в шаге 1. Выберем гиперплоскость

$O'(e)$ так, чтобы $e \in EX(e_0, O'(e))$. Положим

$$\begin{aligned}
 c_A^1(\Delta) &= \frac{1}{2} \sum_m (-1)^m \sum_{\theta \in [m], \theta \text{ содержит } \Delta} [c_A^1(\theta) - c_A^2(\theta) - c_A^3(\theta) + \\
 &\quad + c_A^4(\theta)] + \frac{1}{2} [c_A^1(\Delta) - c_A^2(\Delta) - c_A^3(\Delta)], \\
 c_A^2(\Delta) &= \sum_{(\pm, \dots, \pm)} I_A(e, \pm, \dots, \pm) (-1)^{\Phi(\pm, \dots, \pm)} - \\
 &\quad - \frac{1}{2} \sum_m (-1)^m \sum_{\substack{\theta \in [m], \theta \text{ содержит } \Delta \\ \text{Int}(\theta) \cap e \neq \emptyset}} c_A^2(\theta) + \frac{1}{2} \sum_m (-1)^m \sum_{\substack{\theta \in [m], \theta \text{ содержит } \Delta \\ \text{Int}(\theta \cup \{O'\}) \cap e \neq \emptyset}} c_A^4(\theta), \\
 c_A^3(\Delta) &= - \sum_{(\pm, \dots, \pm)} I_A(e, \pm, \dots, \pm) (-1)^{\Phi(\pm, \dots, \pm)} - \\
 &\quad - \frac{1}{2} \sum_m (-1)^m \sum_{\substack{\theta \in [m], \theta \text{ содержит } \Delta \\ \text{Int}(\theta) \cap e \neq \emptyset}} c_A^3(\theta) + \frac{1}{2} \sum_m (-1)^m \sum_{\substack{\theta \in [m], \theta \text{ содержит } \Delta \\ \text{Int}(\theta \cup \{O'(e)\}) \cap e \neq \emptyset}} c_A^4(\theta), \\
 c_A^4(\Delta) &= \frac{1}{2} \sum_m (-1)^m \sum_{\theta \in [m], \theta \text{ содержит } \Delta} c_A^4(\theta).
 \end{aligned}$$

(Если $k = 0$, то $c_A^1(\Delta) = 0$).

Шаг 4. Пусть $\Delta \in [k]$ с нечетным k . Выберем точку e , лежащую в любой гиперплоскости Δ и не лежащую в любой другой гиперплоскости $\mathcal{E} \cup \{e_0\}$. Выберем точку g , содержащуюся в каждой гиперплоскости Δ и в e_0 , но не лежащую в любой другой гиперплоскости $\mathcal{E}$. Определим точки $(e, \pm, \dots, \pm)$ и $(g, \pm, \dots, \pm)$ как в шагах 1 и 2. Выберем гиперплоскость $O'(e)$ так, чтобы $e \in EX(e_0, O'(e))$. Положим

$$\begin{aligned}
 c_A^1(\Delta) &= - \sum_{(\pm, \dots, \pm)} I_A(e, \pm, \dots, \pm) (-1)^{\Phi(\pm, \dots, \pm)} + \\
 &\quad + \frac{1}{2} \sum_m (-1)^m \left[\sum_{\substack{\theta \in [m], \theta \text{ содержит } \Delta \\ \text{Int}(\theta) \cap e \neq \emptyset}} c_A^1(\theta) - \sum_{\substack{\theta \in [m], \theta \text{ содержит } \Delta \\ \text{Int}(\theta \cup \{O'\}) \cap e \neq \emptyset}} c_A^2(\theta) - \right. \\
 &\quad \left. \sum_{\substack{\theta \in [m], \theta \text{ содержит } \Delta \\ \text{Int}(\theta \cup \{O'\}) \cap e \neq \emptyset}} c_A^3(\theta) + \sum_{\substack{\theta \in [m] \\ \theta \text{ содержит } \Delta}} c_A^4(\theta) \right] + \frac{1}{2} c_A^1(\Delta), \\
 c_A^2(\Delta) &= \frac{1}{2} \sum_m (-1)^m \sum_{\theta \in [m], \theta \text{ содержит } \Delta} [c_A^2(\theta) - c_A^4(\theta)] + \frac{1}{2} c_A^1(\Delta),
 \end{aligned}$$

$$c_A^3(\Delta) = \frac{1}{2} \sum_m (-1)^m \sum_{\theta \in [m], \theta \text{ содержит } \Delta} [c_A^3(\theta) - c_A^1(\theta)] + \frac{1}{2} c_A^4(\Delta),$$

$$c_A^4(\Delta) = \sum_{(\pm, \dots, \pm)} l_A(g, \pm, \dots, \pm) (-1)^{\Phi(\pm, \dots, \pm)} + \frac{1}{2} \sum_m (-1)^m \sum_{\substack{\theta \in [m], \theta \text{ содержит } \Delta \\ \text{Int}(\theta) \cap \Delta \neq \emptyset}} c_A^4(\theta).$$

Шаг 5. Для всех Δ положим

$$d_A^1(\Delta) = \frac{1}{2} [c_A^1(\Delta) + c_A^3(\Delta)], \quad d_A^2(\Delta) = \frac{1}{2} [c_A^2(\Delta) - c_A^3(\Delta)].$$

ABSTRACT. In previous papers the author derived generalizations of Ambartzumian's combinatorial formulae. Now she obtains their dual versions. These dual formulae calculate measures of polyhedral sets in $\mathbb{R}^n$ by means of certain combinatorial coefficients and measures of some special polyhedral sets.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. V. Ambartzumian, Combinatorial Integral Geometry, Wiley, New York, 1982.
2. Р. В. Амбарцумян, "О комбинаторных основаниях интегральной геометрии", Изв. АН Арм. ССР, Математика, т. 16, №4, стр. 285 - 292, 1981.
3. A. Baddeley, "Combinatorial foundations of stochastic geometry", Proc. of London Math. Soc, vol. 42, part 1, pp. 151 - 177, 1981.
4. G. Yu. Panina, "Many-dimensional combinatorial Ambartzumian's formulae", Math. Nachr., vol. 159, pp. 271 - 277, 1992.
5. G. Yu. Panina, "Generalized Ambartzumian's formulae", Math. Nachr., (в печати).

22 Июня 1993

Институт информации
и автоматизации
Санкт-Петербург