

ОБ АНИЗОТРОПНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ФУНКЦИЙ, ГОЛОМОРФНЫХ В ПОЛИДИСКЕ, ГЛАДКИХ ВПЛОТЬ ДО ЕГО ГРАНИЦЫ

Ф. А. Шамоян, А. В. Арутюнян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
том 28, №6, 1993

В работе построены классы $\tilde{\Lambda}^{\alpha}(\alpha)$ и $\tilde{\Lambda}_*^{\alpha}(\alpha)$ голоморфных в полидиске U^n функций, которые являются многомерными аналогами одномерных классов Липшица. Исследованы мультипликативные свойства этих классов и получено полное описание линейных непрерывных функционалов, определенных в соответствующих пространствах $H^p(\alpha)$ при $0 < p < 1$. Доказано хорошо известное обобщение теоремы Привалова: классы $\tilde{\Lambda}^{\alpha}(\alpha)$ и $\tilde{\Lambda}_*^{\alpha}(\alpha)$ инвариантны относительно операторов Коши-Римана.

Пусть U^n — единичный полидиск n -мерного комплексного пространства C^n , а $H(U^n)$ — множество всех голоморфных в U^n функций. Для $f \in H(U^n)$, $f(z_1, \dots, z_n) = \sum a_{k_1, \dots, k_n} z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n}$ определим интегро-дифференциальный оператор D^{α}

$$D^{\alpha} f(z) = \sum \frac{\Gamma(\alpha_1 + k_1 + 1) \dots \Gamma(\alpha_n + k_n + 1) a_{k_1, \dots, k_n}}{\Gamma(\alpha_1 + 1) \dots \Gamma(\alpha_n + 1) \Gamma(k_1 + 1) \dots \Gamma(k_n + 1)} z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n},$$

где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $-1 < \alpha_j < +\infty$, $1 \leq j \leq n$ мультииндекс, $z = (z_1, \dots, z_n)$,

$\Gamma(\cdot)$ функция Эйлера.

Скажем, что функция $f \in H(U^n)$ принадлежит классу $\Lambda_{\alpha}^p = \Lambda_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}^p$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $-1 < \alpha_j < +\infty$, $1 \leq j \leq n$, $0 < p \leq 1$, если

$$\|f\|_{\Lambda_{\alpha}^p} = \sup_{z \in U^n} \{ |D^{1+\beta} f(z)| \cdot \prod_{j=1}^n (1 - |z_j|)^{\beta_j + 2 - \frac{\alpha_j + 2}{p}} \} < +\infty$$

ограничена при $\beta_j > \frac{\alpha_j + 2}{p}$, $1 \leq j \leq n$.

Классы Λ_{α}^p возникают при представлении линейных непрерывных функционалов в пространствах голоморфных функций с L^p метрикой (см. [1]-[3]), в теории

теплицевых операторов (см. [4],[5]) и т.д. Настоящая работа посвящена более подробному исследованию этих классов.

Из теоремы Харди-Литтлвуда следует, что при $n = 1$ классы Λ_α^p совпадают с классами функций $f \in H(U^n)$, удовлетворяющих $f^{(k)} \in \text{Lip}(\beta, \overline{U})$ с $k = [\frac{\alpha+2}{\beta} - 1]$, $\beta = \{\frac{\alpha+2}{\beta} - 1\}$, при нецелом $\frac{\alpha+2}{\beta}$ и $f^{(k)} \in \text{Lip}(1, \overline{U})$ в противном случае, где $\text{Lip}(1, \overline{U})$ - класс Зигмунда (см. [6]) (здесь и ниже $[a]$ и $\{a\}$ обозначают целую и дробную части числа a , соответственно). При $n > 1$ это утверждение неверно, т. е. из оценок смешанных производных не следует гладкость функций в $\overline{U}^n$.

Цель настоящей работы - построить новые классы $\tilde{\Lambda}^a(\alpha)$ и $\tilde{\Lambda}_*^a(\alpha)$, голоморфных в U^n функций, которые в определенном смысле более близки к одномерным липшицевым классам, чем многомерные липшицевы классы. При этом в терминах этих классов можно получить новую характеристику класса Λ_α^p . Мы исследуем мультипликативные свойства классов $\tilde{\Lambda}^a(\alpha)$ и $\tilde{\Lambda}_*^a(\alpha)$. Получаем полное описание линейных непрерывных функционалов на многомерных пространствах $H^p(\alpha)$ при $0 < p < 1$. Заметим, что при $n = 1$ классы $H^p(\alpha)$ были введены М. М. Джрбашьяном. (см. [7],[8]).

Хорошо известно, что по теореме П. И. Привалова (см. [6]) интеграл типа Коши по окружности от липшицевой функции является липшицевой функцией в $\overline{U}$. В случае тора аналог этого результата не имеет места. Отсюда возникает вопрос: как можно обобщить одномерные липшицевы классы на многомерные, чтобы полученные классы остались инвариантными относительно оператора типа Коши. Введенные на торе классы в известном смысле отвечают на указанный вопрос.

§1. КЛАССЫ $\Lambda^a(\alpha)$ И $\tilde{\Lambda}^a(\alpha)$ ПРИ ДРОБНЫХ МУЛЬТИИНДЕКСАХ

Пусть $U^n = \{z = (z_1, \dots, z_n); |z_j| < 1, j = \overline{1, n}\}$ - единичный полидиск в $\mathbb{C}^n$, $T^n = \{z; |z_j| = 1, j = \overline{1, n}\}$ и $Q^n = [-\pi, \pi]^n$. Для мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ и $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ положим $m_j = [\alpha_j]$, $\beta_j = \{\alpha_j\}$, $0 < \beta_j < 1$, $j = \overline{1, n}$, $dz = dz_1 \cdots dz_n$, $z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \cdots z_n^{\alpha_n}$, $\xi_j = \exp\{i\theta_j\}$, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in T^n$.

Пусть $f(\xi)$, $\xi \in T^n$ - измеримая ограниченная функция такая, что производные $\frac{\partial^{j_1 + \dots + j_n} f(\xi)}{\partial \theta_1^{j_1} \cdots \partial \theta_n^{j_n}}$ существуют и непрерывны при всех $0 \leq j_k \leq m_k$, а при $j_i = m_i$, $i = \overline{1, n}$ принадлежат классу $L^\infty(T^n)$.

Для функции f из класса $H^\infty(U^n)$, голоморфных ограниченных функций, положим

$$F(z) = \frac{\partial^{m_1 + \dots + m_n} f(z)}{\partial z_1^{m_1} \dots \partial z_n^{m_n}}, \quad z \in U^n \quad (1.1)$$

Определение 1.1 Скажем, что функция $f(z)$ принадлежит классу $\Lambda(\alpha)$, если $f \in L^\infty(T^n)$ и при $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$

$$|\Delta_h F(\xi)| \leq C_f |h|^\beta,$$

$$\Delta_h = \Delta_{h_n, h_1} = \Delta_{h_n}(\Delta_{h_{n-1}} \dots (\Delta_{h_1})),$$

$$\Delta_{h_i} F(\xi) = F(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_{i-1}}, e^{i\theta_i - 1}, e^{i\theta_i + 1}, e^{i\theta_{i+1}}, \dots, e^{i\theta_n}) - F(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n})$$

Легко видеть, что наименьшая постоянная C_f , удовлетворяющее последнему неравенству определяется следующим образом:

$$C_f = \sup_{\theta \in \mathbb{Q}^n, h \in \mathbb{R}^n} \frac{|\Delta_h F(\xi)|}{|h|^\beta}.$$

Положим $\Lambda^a(\alpha) = \Lambda(\alpha) \cap H^\infty(U^n)$ и определим норму $\|f\|_\alpha = \|f\|_{\Lambda^a(\alpha)}$ по формуле:

$$\|f\|_\alpha = \max(C_f, \|f\|_\infty).$$

Заметим, что классы $\Lambda^a(\alpha)$ были впервые введены С. М. Никольским (см. [10]).

Теорема 1.1. Если $F \in H^\infty(U^n)$, то $f \in \Lambda^a(\alpha)$ тогда и только тогда, когда

$$\left| \frac{\partial^n F(z)}{\partial z_1^{n_1} \dots \partial z_n^{n_n}} \right| \leq C \cdot C_f \prod_{k=1}^n (1 - |z_k|)^{\beta_k - 1}. \quad (1.2)$$

Для доказательства теоремы нам необходима лемма, которая непосредственно следует из теоремы Харди-Литтлвуда (см. [6]).

Лемма 1.1. Пусть $|F'(z)| \leq A/(1 - |z|)^{1-\beta}$, $z \in U$, $0 < \beta < 1$, тогда $|F(z+h) - F(z)| \leq 3A|h|^\beta$, $z, z+h \in \bar{U}$. Обратно: если $F \in H^1(U)$ и $|F(e^{i\theta+1}) - F(e^{i\theta})| \leq A|\theta|^\beta$, то $|F'(z)| \leq 4A/(1 - |z|)^{1-\beta}$.

Доказательство Теоремы 1.1. Пусть выполнено (1.2). Обозначим через

$\Phi(z_1) = \frac{\partial^{n-1} F(z)}{\partial z_2 \dots \partial z_n}$. Тогда очевидно, что

$$|\Phi'(z_1)| \leq \frac{C(z_2, \dots, z_n)}{(1 - |z_1|)^{1-\beta_1}}.$$

В силу Леммы 1.1, имеем $\Phi \in \text{Lip}(\alpha_1)$, т.е. $|\Delta_h \Phi(\rho \xi_1)| \leq 3C(z_2, \dots, z_n)|h_1|^{\beta_1}$.

Повторяя эти рассуждения, получаем

$$|\Delta_h F(\rho \xi)| \leq C \cdot C_f |h|^\beta.$$

Пусть $\rho \rightarrow 1$, тогда

$$|\Delta_h F(\xi)| \leq C \cdot C_f |h|^\beta. \quad (1.3)$$

Обратно: Из $F \in H^\infty(U^n)$ имеем

$$F(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{T^n} \frac{F(\xi) d\xi}{\xi - z},$$

где $z_j = r_j e^{i\varphi_j}$, $\xi_j = e^{i\theta_j}$, $j = \overline{1, n}$.

Дифференцируя последнее равенство и учитывая, что $\frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{d\xi}{(\xi - z)^2} = 0$, получаем

$$\frac{\partial^n F(z)}{\partial z_1 \dots \partial z_n} = \frac{e^{-i(\varphi_1 + \dots + \varphi_n)}}{(2\pi)^n} \int_{Q^n} \Delta_h F(\eta) e^{i(t_1 + \dots + t_n)} \prod_{k=1}^n (e^{it_k} - r_k)^{-2} dt,$$

где $\eta_j = e^{i\varphi_j}$ и $t_j = \theta_j - \varphi_j$, $j = \overline{1, n}$.

Следовательно

$$\left| \frac{\partial^n F(z)}{\partial z_1 \dots \partial z_n} \right| \leq (2\pi)^{-n} C_f \int_{Q^n} |t|^{-\beta} \prod_{k=1}^n |e^{it_k} - r_k|^{-2} dt.$$

Легко видеть, что при $\lambda - \beta > 1$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |t|^\beta |e^{it} - r|^{-\lambda} dt \leq C(\beta)(1 - r)^{\beta - \lambda + 1} \quad (1.4)$$

$$\left| \frac{\partial^n F(z)}{\partial z_1 \dots \partial z_n} \right| \leq C C_f \prod_{k=1}^n (1 - r_k)^{\beta_k - 1} \quad (1.5)$$

Теорема 1.1 доказана.

Из (1.3) и (1.5) вытекает

Следствие 1.1. Существуют положительные постоянные A_1 и A_2 , зависящие только от α такие, что

$$A_1 \sup_{z \in U^n} \{|G(z)| + \|f\|_\infty\} \leq \|f\|_\alpha \leq A_2 \sup_{z \in U^n} \{|G(z)| + \|f\|_\infty\},$$

где $G(z) = \prod_{j=1}^n (1 - |z_j|)^{1-\alpha_j} \frac{\partial^n F(z)}{\partial z_1 \dots \partial z_n}$.

Классы $\Lambda^a(\alpha)$ не инвариантны относительно умножения на мономы $z_1, \dots, z_n$.

В этом можно убедиться, полагая $f(z) = \varphi(z_1) + \psi(z_2)$, где φ и ψ принадлежат $H^\infty(U^n)$. Очевидно, что для произвольных функций φ и ψ из $H^\infty(U^n)$ и для $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ имеем $f(z) \in \Lambda^a(\alpha)$. В то же время нетрудно подобрать φ и ψ таким образом, чтобы функция $z_1 \cdot z_n f(z)$ не принадлежала бы $\Lambda^a(\alpha)$. Тем не менее справедлива следующая

Теорема 1.2. Пусть $f \in H^\infty(U^n)$, $0 < \alpha_j < 1$, $j = \overline{1, n}$. Если $z_j f \in \Lambda^a(\alpha)$ для некоторого $1 \leq j \leq n$, то $f \in \Lambda^a(\alpha)$.

Доказательство. Пусть $j = 1$. Имеем

$$\frac{\partial^n (f(z) z_1)}{\partial z_1 \dots \partial z_n} = \frac{\partial^n f(z)}{\partial z_1 \dots \partial z_n} \cdot z_1 + \frac{\partial^{n-1} f(z)}{\partial z_1 \dots \partial z_n}. \quad (1.6)$$

Так как $z_1 f \in \Lambda^a(\alpha)$, то

$$\left| \frac{\partial^n (f(z) z_1)}{\partial z_1 \dots \partial z_n} \right| \leq C(n, f) \prod_{k=1}^n (1 - |z_k|)^{\alpha_k - 1}.$$

Интегрируя относительно z_1 по радиусу, получаем

$$\left| \frac{\partial^{n-1} f(z)}{\partial z_1 \dots \partial z_n} \right| \leq C_1 C(n, f) |z_1|^{-1} \prod_{k=2}^n (1 - |z_k|)^{\alpha_k - 1}$$

При $|z_1| \geq 1/2$, имеем

$$\left| \frac{\partial^{n-1} f(z)}{\partial z_1 \dots \partial z_n} \right| \leq C_2 C(n, f) \prod_{k=2}^n (1 - |z_k|)^{\alpha_k - 1}$$

а при $|z_1| \leq 1/2$ это неравенство следует из принципа максимума модуля.

Учитывая (1.6), получаем:

$$\left| \frac{\partial^n f(z)}{\partial z_1 \dots \partial z_n} \right| \leq C_3 C(n, f) |z_1|^{-1} \prod_{k=2}^n (1 - |z_k|)^{\alpha_k - 1}$$

Отсюда следует утверждение теоремы.

Утверждение Теоремы 1.2 справедливо также при $\alpha_j \geq 1$. Это следует из нашей Теоремы 1.4.

Пусть для мультииндекса $i = (i_1, \dots, i_k)$, $1 \leq k \leq n$, $h(i) = (h_{i_1}, \dots, h_{i_k})$, $\beta(i) = (\beta_{i_1}, \dots, \beta_{i_k})$ и $|h(i)|^{\beta(i)} = |h_{i_1}|^{\beta_{i_1}} \dots |h_{i_k}|^{\beta_{i_k}}$.

Определение 1.2. Скажем, что функция $f(z)$ принадлежит классу $\tilde{\Lambda}(\alpha)$, если $F \in C(T^n)$ и при всех $i = (i_1, \dots, i_k)$, $1 \leq k \leq n$

$$|\Delta_{h(i)} F(\xi)| \leq C(i, f) |h(i)|^{\beta(i)}.$$

Наименьшей постоянной $C(i, f) = C(i_1, \dots, i_k, f)$, удовлетворяющей последнему неравенству, является

$$C(i, f) = \sup_{\theta \in Q^n, h(i) \in \mathbb{R}^k} \frac{\Delta_{h(i)} F(\xi)}{|h(i)|^{\beta(i)}}.$$

Положим $\tilde{\Lambda}^a(\alpha) = \tilde{\Lambda}(\alpha) \cap H^\infty(U^n)$ и определим норму $\tilde{\Lambda}^a(\alpha)$ следующим образом:

$$\|f\|_{\tilde{\Lambda}^a} = \|f\|_{\tilde{\Lambda}^a(\alpha)} = \max_{1 \leq k \leq n} \max_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} C(i, f) + \|f\|_\infty.$$

При $\tilde{\Lambda}^a(\alpha)$ справедлив следующий аналог Теоремы 1.1.

Теорема 1.1*. Если $f \in H^\infty(U^n)$, то $f \in \tilde{\Lambda}^a(\alpha)$ тогда и только тогда, когда

$$\left| \frac{\partial^k F(z)}{\partial z_{i_1} \dots \partial z_{i_k}} \right| \leq C \cdot C(i, f) \prod_{j=1}^k (1 - |z_{i_j}|)^{\beta_{i_j} - 1} \quad 1 \leq i_k \leq n, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Доказательство проводится аналогично доказательству Теоремы 1.1. Остается доказать непрерывность F . Поскольку $f \in H^\infty(U^n)$, достаточно доказать непрерывность F лишь на торе T^n .

Пусть

$$\left| \frac{\partial F(z)}{\partial z_j} \right| \leq C(f) (1 - |z_j|)^{\beta_j - 1}, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Имеем

$$|F(z_1, \dots, z_{j-1}, e^{i\theta_j}, z_{j+1}, \dots, z_n) - F(z_1, \dots, z_{j-1}, e^{it_j}, z_{j+1}, \dots, z_n)| \leq C |\theta_j - t_j|^{\beta_j}.$$

Полагая $(z_1, \dots, z_{j-1}, z_{j+1}, \dots, z_n) = (e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_{j-1}}, e^{i\theta_{j+1}}, \dots, e^{i\theta_n})$, получаем

$$|F(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n}) - F(e^{it_1}, \dots, e^{it_n})| = |F(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n}) - F(e^{it_1}, e^{i\theta_2}, \dots, e^{i\theta_n}) +$$

$$|F(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}, \dots, e^{i\theta_n}) + \dots + F(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_{n-1}}, e^{i\theta_n}) - F(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n})| \leq C_1 \sum_{j=1}^n \alpha_j = C_1 \alpha,$$

где $F \in C(T^n)$.

Следствие 1.1*. Существуют положительные постоянные C_1 и C_2 , зависящие лишь от α такие, что

$$C_1 \max_{1 \leq k \leq n} \left\{ \max_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \sup_{z \in U^n} \{|G_1(z)| + \|f\|_\infty\} \right\} \leq \|f\|_{\tilde{a}} \leq C_2 \max_{1 \leq k \leq n} \left\{ \max_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \sup_{z \in U^n} \{|G_1(z)| + \|f\|_\infty\} \right\},$$

где $G_1(z) = \prod_{j=1}^k (1 - |z_{i_j}|)^{1-\alpha_{i_j}} \frac{\partial^k F(z)}{\partial z_{i_1} \dots \partial z_{i_k}}$.

Теорема 1.3. Пусть $0 < \alpha_j < 1$, $j = \overline{1, n}$. Тогда $f \in \tilde{L}^a(\alpha)$ тогда и только тогда, когда $z_j f \in \tilde{L}^a(\alpha)$ для некоторого $1 \leq j \leq n$.

Доказательство. Предположим, что $j = 1$ и $z_1 f \in \tilde{L}^a(\alpha)$. Требуется установить следующую оценку:

$$\left| \frac{\partial^k f(z)}{\partial z_{i_1} \dots \partial z_{i_k}} \right| \leq C(i, f) \prod_{j=1}^k (1 - |z_{i_j}|)^{\alpha_{i_j} - 1}$$

При $i_1 = 1$ оценка очевидна. В противном случае имеем

$$\frac{\partial^k f(z)}{\partial z_{i_1} \dots \partial z_{i_k}} = \frac{1}{z_1} \frac{\partial^k (f(z)z_1)}{\partial z_{i_1} \dots \partial z_{i_k}} - \frac{1}{z_1^2} \frac{\partial^{k-1} (f(z)z_1)}{\partial z_{i_2} \dots \partial z_{i_k}}$$

Так как $z_1 f \in \tilde{L}^a(\alpha)$, то

$$\left| \frac{\partial^k (f(z)z_1)}{\partial z_{i_1} \dots \partial z_{i_k}} \right| \leq C(i, f) \prod_{j=1}^k (1 - |z_{i_j}|)^{\alpha_{i_j} - 1}$$

Интегрируя по z_1 по радиусу и повторяя рассуждения Теоремы 1.2, получим требуемую оценку.

Обратно. Пусть $f \in \tilde{L}^a(\alpha)$. Докажем, что $z_1 f \in \tilde{L}^a(\alpha)$. При $i_j \neq 1$, $j = \overline{1, k}$, имеем

$$\left| \frac{\partial^k (f(z)z_1)}{\partial z_{i_1} \dots \partial z_{i_k}} \right| = |z_1| \left| \frac{\partial^k f(z)}{\partial z_{i_1} \dots \partial z_{i_k}} \right| \leq C(i, f) \prod_{j=1}^k (1 - |z_{i_j}|)^{\alpha_{i_j} - 1}$$

Пусть теперь $i_1 = 1$, тогда

$$\frac{\partial^k (f(z)z_1)}{\partial z_{i_1} \dots \partial z_{i_k}} = z_1 \frac{\partial^k f(z)}{\partial z_{i_1} \dots \partial z_{i_k}} + \frac{\partial^{k-1} f(z)}{\partial z_{i_2} \dots \partial z_{i_k}}$$

Отсюда

$$\left| \frac{\partial^k (f(z)z_1)}{\partial z_{i_1} \dots \partial z_{i_k}} \right| \leq \tilde{C}(i, f) \prod_{j=1}^k (1 - |z_{i_j}|)^{\alpha_{i_j} - 1}$$

Теорема 1.3 доказана.

Теорема 1.4. Функция f принадлежит $\tilde{\Lambda}^a(\alpha)$ тогда и только тогда, если $z_j^{m_j+1} f \in \tilde{\Lambda}^a(\alpha)$, для некоторого $1 \leq j \leq n$, где $m_j = [\alpha_j]$.

Доказательство. Пусть $j = 1$ и $z_1^{m_1+1} f \in \tilde{\Lambda}^a(\alpha)$. Покажем, что если $z_1^{m_1+1} f \in \tilde{\Lambda}^a(\alpha)$, то $f \in \tilde{\Lambda}^a(\alpha)$. Имеем

$$\frac{\partial^{m_1+\dots+m_n} f(z)}{\partial z_1^{m_1} \dots \partial z_n^{m_n}} = \sum_{l_1=0}^{m_1} \tilde{C}_{l_1}^{m_1} \Phi_{l_1}(z) \frac{1}{z_1^{2m_1+1-l_1}}, \quad (1.7)$$

где $\tilde{C}_{l_1}^{m_1} = (-1)^{m_1-l_1} C_{l_1}^{m_1} (m_1+1) \dots (m_1+m_1-l_1)$, и

$$\Phi_{l_1}(z) = \frac{\partial^{l_1+m_2+\dots+m_n} (f(z) z_1^{m_1+1})}{\partial z_1^{l_1} \partial z_2^{m_2} \dots \partial z_n^{m_n}}.$$

Отсюда

$$z_1^{2m_1+1} \frac{\partial^{m_1+\dots+m_n} f(z)}{\partial z_1^{m_1} \dots \partial z_n^{m_n}} = \sum_{l_1=0}^{m_1} \tilde{C}_{l_1}^{m_1} \Phi_{l_1}(z) z_1^{l_1}$$

Наша цель оценить $\frac{\partial^k (\Phi_{l_1}(z) z_1^{l_1})}{\partial z_{i_1} \dots \partial z_{i_k}}$. По условию имеем

$$\left| \frac{\partial^{m_1+1+\dots+m_n+1} (f(z) z_1^{m_1+1})}{\partial z_1^{m_1+1} \dots \partial z_n^{m_n+1}} \right| \leq C_f \prod_{k=1}^n (1 - |z_k|)^{\beta_k-1} \quad (1.8)$$

Если $i_j \neq 1$, $j = \overline{1, n}$, то

$$\frac{\partial^k (\Phi_{l_1}(z) z_1^{l_1})}{\partial z_{i_1} \dots \partial z_{i_k}} = z_1^{l_1} \frac{\partial^k \Phi(z)}{\partial z_{i_1} \dots \partial z_{i_k}}.$$

В этом случае искомая оценка получается интегрированием неравенства (1.8). В противном случае ($i_j = 1$) имеем

$$\frac{\partial^k (\Phi_{l_1}(z) z_1^{l_1})}{\partial z_{i_1} \dots \partial z_{i_k}} = z_1^{l_1} \frac{\partial^k \Phi_{l_1}(z)}{\partial z_{i_1} \dots \partial z_{i_k}} + l_1 z_1^{l_1-1} \frac{\partial^{k-1} \Phi(z)}{\partial z_{i_2} \dots \partial z_{i_k}}.$$

Интегрируя (1.8), получим

$$\left| \frac{\partial^k \Phi_{l_1}(z)}{\partial z_{i_1} \dots \partial z_{i_k}} \right| \leq C C(i, f) (1 - |z_1|)^{-\gamma_1} \prod_{j=2}^k (1 - |z_{i_j}|)^{\beta_{i_j}-1}$$

где $\gamma_1 = 1 - \beta_1$, если $l_1 = m_1$ и $\gamma_1 = 0$ - в противном случае. Мы имеем также

$$\left| \frac{\partial^{k-1} \Phi(z)}{\partial z_{i_2} \dots \partial z_{i_k}} \right| \leq C_1 C(i, f) \prod_{j=2}^k (1 - |z_{i_j}|)^{\beta_{i_j}-1}$$

Отсюда

$$\left| \frac{\partial^k (\Phi_{l_1}(z) z_1^{l_1})}{\partial z_{i_1} \dots \partial z_{i_k}} \right| \leq C_2 C(i, f) \prod_{j=1}^k (1 - |z_{i_j}|)^{\beta_{i_j}-1}.$$

Принимая во внимание (1.7) и Теорему 1.2 заключаем, что $f \in \tilde{\Lambda}^a(\alpha)$.

Докажем обратное утверждение.

Предположим, что $f \in \tilde{\Lambda}^a(\alpha)$.

$$\frac{\partial^{m_1+\dots+m_n}(f(z)z_1)}{\partial z_1^{m_1} \dots \partial z_n^{m_n}} = z_1 \frac{\partial^{m_1+\dots+m_n} f(z)}{\partial z_1^{m_1} \dots \partial z_n^{m_n}} + \frac{\partial^{m_1-1+m_2+\dots+m_n} f(z)}{\partial z_1^{m_1-1} \partial z_2^{m_2} \dots \partial z_n^{m_n}}. \quad (1.9)$$

В силу Теоремы 1.3

$$z_1 \frac{\partial^{m_1+\dots+m_n} f(z)}{\partial z_1^{m_1} \dots \partial z_n^{m_n}} \in \tilde{\Lambda}^a(\beta).$$

Следовательно

$$\left| \frac{\partial^k}{\partial z_{i_1} \dots \partial z_{i_k}} \left(\frac{\partial^{m_1+\dots+m_n} f(z)}{\partial z_1^{m_1} \dots \partial z_n^{m_n}} \cdot z_1 \right) \right| \leq C(i, f) \prod_{j=1}^k (1 - |z_{i_j}|)^{\beta_{i_j}-1}$$

Если $i_1 = 1$, то интегрируя последнее неравенство по z_1 по радиусу, получаем

$$\left| \frac{\partial^k}{\partial z_{i_1} \dots \partial z_{i_k}} \left(\frac{\partial^{m_1-1+m_2+\dots+m_n} f(z)}{\partial z_1^{m_1-1} \dots \partial z_n^{m_n}} \right) \right| \leq C C(i, f) \prod_{j=2}^k (1 - |z_{i_j}|)^{\beta_{i_j}-1}.$$

Из (1.9) имеем

$$\left| \frac{\partial^k}{\partial z_{i_1} \dots \partial z_{i_k}} \frac{\partial^{m_1+\dots+m_n}(f(z)z_1)}{\partial z_1^{m_1} \dots \partial z_n^{m_n}} \right| \leq C_1 C(i, f) \prod_{j=1}^k (1 - |z_{i_j}|)^{\beta_{i_j}-1}$$

Повторяя эти рассуждения, заключаем, что $z_1^{m_1+1} f \in \tilde{\Lambda}^a(\alpha)$.

При $i_j \neq 1$, $1 \leq j \leq k$, легко проверить, что

$$\left| \frac{\partial^{k+1} \Phi_{m_1}(z)}{\partial z_1 \partial z_{i_1} \dots \partial z_{i_k}} \right| \leq C C(i, f) \prod_{j=0}^k (1 - |z_{i_j}|)^{\beta_{i_j}-1}$$

где $i_0 = 1$. Интегрируя это неравенство относительно z_1 , получим утверждение теоремы.

§2. КЛАССЫ $\Lambda^a(\alpha)$ И $\tilde{\Lambda}^a(\alpha)$ ПРИ ЦЕЛЫХ МУЛЬТИИНДЕКСАХ

В этом параграфе рассмотрим функцию

$$h(z) = \frac{\partial^{k_1+\dots+k_n} f(z)}{\partial z_1^{k_1} \dots \partial z_n^{k_n}}, \quad (2.1)$$

где $f \in H^\infty(U^n)$, $k = (k_1, \dots, k_n)$ - целые положительные числа.

Определение 2.1. Скажем, что функция $f(z)$ принадлежит классу $\Lambda_*(k)$, если $f \in L^\infty(T^n)$ и при $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$

$$|\Delta_h^* F(\xi)| \leq C_f |h|, \quad (2.2)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_h^* &= \Delta_{h_n, \dots, h_1}^* = \Delta_{h_n}^* (\Delta_{h_{n-1}}^* \dots (\Delta_{h_1}^*)), \\ \Delta_{h_j}^* F(\xi) &= F(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_{j-1}}, e^{i\theta_j + ih_j}, e^{i\theta_{j+1}}, \dots, e^{i\theta_n}) - 2F(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n}) + \\ &+ F(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_{j-1}}, e^{i\theta_j - ih_j}, e^{i\theta_{j+1}}, \dots, e^{i\theta_n}). \end{aligned}$$

Положим $\Lambda_*^a(k) = \Lambda_*(k) \cap H^\infty(U^n)$ и определим норму $\|f\|_* = \|f\|_{\Lambda_*^a}$ следующим образом :

$$\|f\|_* = \inf\{C_f\} + \|f\|_\infty,$$

где C_f — постоянная из (2.2).

Следующая лемма вытекает из теоремы Зигмунда (см. [6]).

Лемма 1.1. Если $|F''(z)| \leq C(1 - |z|)^{-1}$, $z \in U$, то $|F(z+h) - 2F(z) + F(z-h)| \leq 3C|h|$, $z, z \pm h \in \bar{U}$. Обратно : если $|F(e^{i\theta+it}) - 2F(e^{i\theta}) + F(e^{i\theta-it})| \leq C|t|$, то $|F''(z)| \leq 2C(1 - |z|)^{-1}$

Теорема 2.1. Если $F \in H^\infty(U^n)$, то $f \in \Lambda_*^a(k)$ тогда и только тогда, когда

$$\left| \frac{\partial^{2n} F(z)}{\partial z_1^2 \dots \partial z_n^2} \right| \leq C_f \prod_{j=1}^n (1 - |z_j|)^{-1} \quad (2.3)$$

Доказательство. Пусть выполняется (2.3). Тогда, обозначая $\Phi(z_1) = \frac{\partial^{2n-2} F(z)}{\partial z_2^2 \dots \partial z_n^2}$ и применяя Лемму 2.1, получаем $|\Delta_{h_1}^* \Phi(\rho\xi_1)| \leq 3C(z_2, \dots, z_n)|h_1|$. Далее, повторяя эти рассуждения $n - 1$ раз, заключаем, что

$$\Delta_h^* F(\rho\xi) \leq 2^n C_f |h|.$$

Полагая $\rho \rightarrow 1$, получаем

$$\Delta_h^* F(\xi) \leq 2^n C_f |h|.$$

Докажем обратное утверждение, т.е., что из $f \in \Lambda_*^a(k)$ следует (2.3). Так как $f \in H^\infty(U^n)$, то

$$F(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{T^n} \frac{F(\xi) d\xi}{\xi - z}.$$

Используя равенства

$$\int_T \frac{d\xi}{(\xi - z)^3} = 0, \quad \int_{T^n} \frac{F(\xi_1, \dots, \bar{\xi}_j, \xi_{j+1}, \dots, \xi_n) d\xi_1 \dots d\xi_n}{(\xi_1 - z_1)^3 \dots (\xi_n - z_n)^3} = 0$$

и дифференцируя по каждой переменной дважды, получаем

$$\frac{\partial^{2n} F(z)}{\partial z_1^2 \dots \partial z_n^2} = \frac{e^{-2i(\varphi_1 + \dots + \varphi_n)}}{\pi^n} \int_{-\pi}^{\pi} \dots \int_{-\pi}^{\pi} \Delta_t^n F(\eta) e^{i(t_1 + \dots + t_n)} \prod_{k=1}^n (e^{it_k} - r_k)^{-3} dt,$$

где $z_j = r_j e^{i\varphi_j}$, $\eta_j = e^{i\varphi_j}$ и $l_j = \theta_j - \varphi_j$, $j = \overline{1, n}$. Учитывая оценку (1.4), получаем

$$\left| \frac{\partial^{2n} F(z)}{\partial z_1^2 \dots \partial z_n^2} \right| \leq \tilde{C}_f \prod_{k=1}^n (1 - |z_k|)^{-1}.$$

Теорема доказана.

Следствие 2.1. Существуют положительные постоянные A_1 и A_2 такие, что

$$\begin{aligned} A_1 \sup_{z \in U^n} \left\{ \prod_{j=1}^n (1 - |z_j|) \left| \frac{\partial^{2n} F(z)}{\partial z_1^2 \dots \partial z_n^2} \right| + \|f\|_\infty \right\} \leq \\ \leq \|f\|_* \leq A_2 \sup_{z \in U^n} \left\{ \prod_{j=1}^n (1 - |z_j|) \left| \frac{\partial^{2n} F(z)}{\partial z_1^2 \dots \partial z_n^2} \right| + \|f\|_\infty \right\}. \end{aligned}$$

Теперь докажем аналог Теоремы 1.2 для классов Λ_*^a .

Теорема 2.2. Если $f \in H^\infty(U^n)$ и $z_j^2 f \in \Lambda_*^a$ для некоторого $1 \leq j \leq n$, то $f \in \Lambda_*^a$.

Доказательство. Пусть $j = 1$ и $z_1^2 f \in \Lambda_*^a$. Имеем

$$\left| \frac{\partial^{2n}(f(z)z_1^2)}{\partial z_1^2 \dots \partial z_n^2} \right| \leq C_f \prod_{k=1}^n (1 - |z_k|)^{-1}. \quad (2.4)$$

Легко видеть, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{2n}(f(z)z_1^2)}{\partial z_1^2 \dots \partial z_n^2} &= \frac{\partial^{2n} f(z)}{\partial z_1^2 \dots \partial z_n^2} \cdot z_1^2 + \\ &+ 4 \frac{\partial^{2n-1} f(z)}{\partial z_1 \partial z_2^2 \dots \partial z_n^2} \cdot z_1 + 2 \frac{\partial^{2n-2} f(z)}{\partial z_2^2 \dots \partial z_n^2} \end{aligned} \quad (2.5)$$

и

$$\frac{(1 - |z_1|) \log(1 - |z_1|)^{-1} - |z_1|}{|z_1|^2} \leq C. \quad (2.6)$$

Интегрируя (2.4) по радиусу (относительно z_1) и воспользовавшись оценкой (2.6), получим

$$\left| \frac{\partial^{2n-2}(f(z))}{\partial z_2^2 \dots \partial z_n^2} \right| \leq C \cdot C_f \prod_{k=2}^n (1 - |z_k|)^{-1}$$

Имеем

$$\frac{\partial^{2n-1}(f(z)z_1^2)}{\partial z_1 \partial z_2^2 \dots \partial z_n^2} = \frac{\partial^{2n-1}f(z)}{\partial z_1 \partial z_2^2 \dots \partial z_n^2} \cdot z_1^2 + 2z_1 \frac{\partial^{2n-2}f(z)}{\partial z_2^2 \dots \partial z_n^2}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^{2n-1}(f(z))}{\partial z_1 \partial z_2^2 \dots \partial z_n^2} \right| &\leq C \cdot C_f \prod_{k=2}^n (1 - |z_k|)^{-1} + \\ &+ C_f \cdot C \log(1 - |z_1|)^{-1} \prod_{k=2}^n (1 - |z_k|)^{-1} \leq \tilde{C} \cdot C_f \prod_{k=1}^n (1 - |z_k|)^{-1}. \end{aligned}$$

Из (2.5) получаем

$$|z_1^2 \frac{\partial^{2n}(f(z))}{\partial z_1^2 \dots \partial z_n^2}| \leq C \cdot C_f \prod_{k=1}^n (1 - |z_k|)^{-1}.$$

При $|z_1| \geq 1/2$ требуемая оценка очевидна. При $|z_1| < 1/2$ оценка следует из принципа максимума модуля.

Замечание. Обратное утверждение к Теореме 2.2 не справедливо. Например, $f(z_1, z_2) = (\varphi(z_1) + \psi(z_2))z_1 z_2$, где φ и ψ — произвольные функции из $H^\infty(U)$.

Очевидно, $\frac{\partial^4 f(z_1, z_2)}{\partial z_1^2 \partial z_2^2} = 0$, однако $z_1 z_2 f$ не всегда принадлежит Λ_*^a .

Однако в некоторых подклассах Λ_*^a справедливо обратное утверждение Теоремы 2.2.

Определение 2.2. Скажем, что функция $f(z)$ принадлежит $\tilde{\Lambda}_*(k)$, если $f' \in C(T^n)$ и

$$|\Delta_{h(i)}^* f'(\xi)| \leq C(i, f) |h(i)|,$$

где $i = (i_1, \dots, i_l)$, $h(i) = (h_{i_1}, \dots, h_{i_l})$, $i, l = \overline{1, n}$.

Наименьшей постоянной $C(i, f) = C(i_1, \dots, i_l, f)$ является

$$C(i, f) = \sup_{\theta \in Q^n, h(i) \in \mathbb{R}^l} \frac{|\Delta_{h(i)}^* f'(\xi)|}{|h(i)|} < +\infty.$$

Положим $\tilde{\Lambda}_*^a(k) = \tilde{\Lambda}_*(k) \cap H^\infty(U^n)$ и определим норму $\tilde{\Lambda}_*^a(k)$ следующим образом:

$$\|f\|_* = \|f\|_{\tilde{\Lambda}_*^a} = \max_{1 \leq i \leq n} \max_{1 \leq i_1 < \dots < i_l \leq n} \{C(i, f)\} + \|f\|_{\infty}.$$

Теорема 2.1*. Функция f принадлежит $\tilde{\Lambda}_*^a(k)$ тогда и только тогда, когда

$$\left| \frac{\partial^{2l} F(z)}{\partial z_{i_1}^2 \dots \partial z_{i_l}^2} \right| \leq C(i, f) \prod_{k=1}^l (1 - |z_{i_k}|)^{-1}.$$

Доказательство проводится аналогично доказательству Теоремы 2.1. Остается только доказать, что функция $F(z)$ непрерывна, что по существу следует из Теоремы 1.1* из того факта, что $\tilde{\Lambda}_*^a \subset \tilde{\Lambda}^a(\alpha)$ для любых $0 < \alpha_j < 1$, $j = \overline{1, n}$.

Следствие 2.1*. Существуют положительные постоянные C_1 и C_2 такие, что

$$C_1 \max_{1 \leq l \leq n} \left\{ \max_{1 \leq i_1 < \dots < i_l \leq n} \sup_{z \in U^n} \{|G(z)|\} + \|f\|_\infty \right\} \leq \|f\|_{\tilde{\Lambda}_*^a(k)} \leq \\ \leq C_2 \max_{1 \leq l \leq n} \left\{ \max_{1 \leq i_1 < \dots < i_l \leq n} \sup_{z \in U^n} \{|G(z)|\} + \|f\|_\infty \right\},$$

где $G(z) = \prod_{j=1}^l (1 - |z_{i_j}|) \frac{\partial^{2l} F(z)}{\partial z_{i_1}^2 \dots \partial z_{i_l}^2}$.

Теорема 2.3. Функция f принадлежит $\tilde{\Lambda}_*^a$ тогда и только тогда, когда $z_j^2 f \in \tilde{\Lambda}_*^a$ для некоторого $1 \leq j \leq n$.

Доказательство. Пусть $j = 1$ и $z_1^2 f \in \tilde{\Lambda}_*^a$, а $i = (i_1, \dots, i_l)$ произвольный вектор. Если $i_j \neq 1$, $j = \overline{1, n}$, то доказательство очевидно. Рассмотрим случай, когда $i_1 = 1$. Имеем

$$\frac{\partial^{2l} (f(z) z_1^2)}{\partial z_{i_1}^2 \dots \partial z_{i_l}^2} = z_1^2 \frac{\partial^{2l} f(z)}{\partial z_{i_1}^2 \dots \partial z_{i_l}^2} + 4z_1 \frac{\partial^{2l-1} f(z)}{\partial z_{i_1} \partial z_{i_2}^2 \dots \partial z_{i_l}^2} + 2 \frac{\partial^{2l-2} f(z)}{\partial z_{i_2}^2 \dots \partial z_{i_l}^2}. \quad (2.7)$$

Так как $z_1^2 f \in \tilde{\Lambda}_*^a$, то согласно (2.6) получаем

$$\left| \frac{\partial^{2l-2} f(z)}{\partial z_{i_2}^2 \dots \partial z_{i_l}^2} \right| \leq C \cdot C(i, f) \prod_{k=2}^l (1 - |z_{i_k}|)^{-1}$$

Легко видеть, что если

$$\left| \frac{\partial h(z)}{\partial z_1} \right| \leq C(z_2, \dots, z_n) (1 - |z_1|)^{-1},$$

то $|h(z)| \leq C(z_2, \dots, z_n)$. Следовательно

$$\left| \frac{\partial^{2l-1} f(z)}{\partial z_{i_1} \partial z_{i_2}^2 \dots \partial z_{i_l}^2} \right| \leq C \cdot C(i, f) \prod_{k=1}^l (1 - |z_{i_k}|)^{-1}.$$

Поэтому из (2.7) следует, что $f \in \tilde{\Lambda}_*^a$.

Обратно. Пусть $f \in \tilde{\Lambda}_*^a$ и $i_1 = 1$. Имеем

$$|z_1^2 \frac{\partial^{2l} f(z)}{\partial z_{i_1}^2 \dots \partial z_{i_l}^2}| \leq C \cdot C(i, f) \prod_{k=1}^l (1 - |z_{i_k}|)^{-1},$$

и

$$|\frac{\partial^{2l-2} f(z)}{\partial z_{i_2}^2 \dots \partial z_{i_l}^2}| \leq C_1 \cdot C(i_2, \dots, i_l, f) \prod_{k=2}^l (1 - |z_{i_k}|)^{-1}.$$

Отсюда

$$|\frac{\partial^{2l-1} f(z)}{\partial z_{i_1} \partial z_{i_2}^2 \dots \partial z_{i_l}^2}| \leq C_2 \cdot C(i_2, \dots, i_l, f) \prod_{k=1}^l (1 - |z_{i_k}|)^{-1}.$$

Принимая во внимание (2.7), заключаем, что $z_1^2 f \in \tilde{\Lambda}_*^a$. Теорема доказана.

Теорема 2.4. Функция f принадлежит $\tilde{\Lambda}_*^a(k)$ тогда и только тогда, когда $z_j^{k_j+2} f \in \tilde{\Lambda}_*^a$ для некоторого $1 \leq j \leq n$.

Доказательство. Предположим, что $j = 1$. Сначала докажем, что из $z_1^{k_1+2} f \in \tilde{\Lambda}_*^a(k)$ следует, что $f \in \tilde{\Lambda}_*^a(k)$. Имеем

$$z_1^{2k_1+2} \frac{\partial^{k_1+\dots+k_n} f(z)}{\partial z_1^{k_1} \dots \partial z_n^{k_n}} = \sum_{l_1=0}^{k_1} \tilde{C}_{l_1}^{k_1} \Phi_{l_1}(z) z_1^{l_1}, \quad (2.8)$$

где $\tilde{C}_{l_1}^{k_1} = (-1)^{k_1-l_1} C_{l_1}^{k_1} (k_1 + 2) \dots (k_1 + 1 + k_1 - l_1)$, и

$$\Phi_{l_1}(z) = \frac{\partial^{l_1+\dots+k_n} (f(z) z_1^{k_1+2})}{\partial z_1^{l_1} \dots \partial z_n^{k_n}}.$$

Пусть $i_1 = 1$, тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{2s} (\Phi(z) z_1^{l_1})}{\partial z_{i_1}^2 \dots \partial z_{i_s}^2} &= z_1^{l_1} \frac{\partial^{2s} \Phi(z)}{\partial z_{i_2}^2 \dots \partial z_{i_s}^2} + \\ &+ 2l_1 z_1^{l_1-1} \frac{\partial^{2s-1} \Phi(z)}{\partial z_{i_1} \partial z_{i_2}^2 \dots \partial z_{i_s}^2} + l_1(l_1-1) z_1^{l_1-2} \frac{\partial^{2s-2} \Phi(z)}{\partial z_{i_2}^2 \dots \partial z_{i_s}^2}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

По условию имеем

$$|\frac{\partial^{k_1+2+\dots+k_n+2} (f(z) z_1^{k_1+2})}{\partial z_1^{k_1+2} \dots \partial z_n^{k_n+2}}| \leq C(f) \prod_{k=1}^n (1 - |z_k|)^{-1}.$$

Интегрируя это неравенство, принимая во внимание (2.6) и учитывая, что $l_1 \leq k_1$, получаем

$$|\frac{\partial^{2s-\nu} \Phi(z)}{\partial z_{i_1}^\nu \partial z_{i_2}^2 \dots \partial z_{i_s}^2}| \leq C C(f) (1 - |z_{i_1}|)^{-\gamma_1} \prod_{k=2}^s (1 - |z_{i_k}|)^{-1},$$

где $\gamma_1 = 1$, если $\nu = 2$ и $\gamma_1 = 0$, если $\nu = 0$

$$\left| \frac{\partial^{2s-1} \Phi(z)}{\partial z_{i_1} \partial z_{i_2}^2 \dots \partial z_{i_s}^2} \right| \leq C(f) \log(1 - |z_{i_1}|)^{-1} \prod_{k=2}^s (1 - |z_{i_k}|)^{-1}.$$

Поэтому в силу (2.8) и (2.9), получаем

$$z_1^{2k_1+2} \frac{\partial^{k_1+\dots+k_n} f(z)}{\partial z_1^{k_1} \dots \partial z_n^{k_n}} \in \tilde{\Lambda}_*^a.$$

Применяя Теорему 2.2, получаем $f \in \tilde{\Lambda}_*^a(k)$.

Теперь докажем обратное утверждение.

Пусть $j = 1$ и $f \in \tilde{\Lambda}_*^a(k)$. Сначала докажем, что $z_1 f \in \tilde{\Lambda}_*^a(k)$. Имеем

$$\frac{\partial^{k_1+\dots+k_n} (f(z)z_1)}{\partial z_1^{k_1} \dots \partial z_n^{k_n}} = z_1 F(z) + \frac{\partial^{k_1-1+\dots+k_n} f(z)}{\partial z_1^{k_1-1} \dots \partial z_n^{k_n}}, \quad (2.10)$$

где

$$F(z) = \frac{\partial^{k_1+\dots+k_n} f(z)}{\partial z_1^{k_1} \dots \partial z_n^{k_n}}$$

Так как $F \in \tilde{\Lambda}_*^a$, то по Теореме 2.3

$$\left| \frac{\partial^{2l} (F(z)z_1^2)}{\partial z_{i_1}^2 \dots \partial z_{i_l}^2} \right| \leq C(i, f) \prod_{k=1}^l (1 - |z_{i_k}|)^{-1}.$$

Рассмотрим случай $i_1 = 1$. Интегрируя последнее неравенство относительно z_1 и принимая во внимание (2.6), получаем

$$\left| \frac{\partial^{2l-2} F(z)}{\partial z_{i_2}^2 \dots \partial z_{i_l}^2} \right| \leq C \cdot C(i, f) \prod_{k=2}^l (1 - |z_{i_k}|)^{-1} \quad (2.11)$$

Воспользовавшись (2.10), легко убедиться, что

$$\frac{\partial^{2l} (F(z)z_1)}{\partial z_{i_1}^2 \dots \partial z_{i_l}^2} = z_1 \frac{\partial^{2l} F(z)}{\partial z_{i_2}^2 \dots \partial z_{i_l}^2} + 3 \frac{\partial^{2l-1} F(z)}{\partial z_{i_1} \partial z_{i_2}^2 \dots \partial z_{i_l}^2}.$$

Отсюда из (2.9) следует, что $z_1 f \in \tilde{\Lambda}_*^a(k)$. Продолжая умножение, в итоге получим, что $z_1^{k_1+2} f \in \tilde{\Lambda}_*^a(k)$.

В случае $i_j \neq 1$, $1 \leq j \leq n$ поступаем аналогично. Вначале докажем неравенство

$$\left| \frac{\partial^{2l+2} G(z)}{\partial z_1^2 \partial z_{i_1}^2 \dots \partial z_{i_l}^2} \right| \leq C(i, f) \prod_{k=1}^l (1 - |z_{i_k}|)^{-1},$$

где $i_0 = 1$, и

$$G(z) = \frac{\partial^{k_1+\dots+k_n} (f(z)z_1^{k_1+2})}{\partial z_1^{k_1} \dots \partial z_n^{k_n}}$$

Тогда, проинтегрировав, получим, что $z_1^{k_1+2} f \in \tilde{\Lambda}_*^a(k)$. Теорема доказана.

§3. ОПЕРАТОРЫ ТИПА КОШИ В ПРОСТРАНСТВАХ $\Lambda(\alpha)$ И $\tilde{\Lambda}(\alpha)$

В этом параграфе мы докажем, что операторы типа Коши

$$Kf(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{T^n} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z}$$

не действуют в пространствах $\Lambda(\alpha)$, но действуют в пространствах $\tilde{\Lambda}(\alpha)$.

Теорема 3.1. *Существует функция $f \in \Lambda(\alpha)$ такая, что $Kf \notin \Lambda^a(\alpha)$, $0 < \alpha_j < 1$, $j = \overline{1, n}$.*

Доказательство. Рассмотрим функцию $f(\xi_1, \xi_2) = \varphi(\xi_1) + \psi(\xi_2)$, где $\varphi \in C(-\pi, \pi)$, $\psi \in \text{Lip}(\alpha_2, T^1)$ и $Kf \in H^\infty(U^n)$ (см. [11]). Легко видеть, что

$$\begin{aligned} Kf(z_1, z_2) &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{T^2} \frac{f(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2}{(\xi_1 - z_1)(\xi_2 - z_2)} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{T^1} \frac{\varphi(\xi_1) d\xi_1}{(\xi_1 - z_1)} + \frac{1}{2\pi i} \int_{T^1} \frac{\psi(\xi_2) d\xi_2}{(\xi_2 - z_2)}. \end{aligned}$$

Поскольку вторая функция принадлежит $H^\infty(U^n)$, а первая не принадлежит $H^\infty(U^n)$, то отсюда получаем, что хотя $f \in \Lambda(\alpha_1, \alpha_2)$, но $Kf \notin \Lambda^a(\alpha_1, \alpha_2)$.

Теорема 3.2. *Операторы типа Коши действуют в пространствах $\tilde{\Lambda}(\alpha)$, $0 < \alpha_j < 1$, $j = \overline{1, n}$.*

Доказательство теоремы основано на следующей лемме.

Лемма. *Имеет место следующее неравенство :*

$$\begin{aligned} \left| \int_{Q^n} \Delta_t f(e^{i\theta'_k}, e^{i\theta'_{k+1} + i t'_{k+1}}) e^{i(t_1 + \dots + t_n)} \prod_{j=1}^k (e^{it_j} - r_j)^{-2} \prod_{j=k+1}^n (e^{it_j} - r_j)^{-1} dt \right| \leq \\ \leq C \prod_{j=1}^n (1 - r_j)^{\alpha_j - 1}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где $t = (t_1, \dots, t_k)$, $e^{i\theta'_k} = (e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_k})$ и $e^{i\theta'_{k+1} + i t'_{k+1}} = (e^{i\theta_{k+1} + i t_{k+1}}, \dots, e^{i\theta_n + i t_n})$.

Доказательство проводится индукцией по n . Пусть $n = 2$ ($k = 1$)

$$\begin{aligned} \int_{Q^2} \Delta_{t_1} f(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2 + i t_2}) e^{i(t_1 + t_2)} (e^{it_1} - r_1)^{-2} (e^{it_2} - r_2)^{-1} dt_1 dt_2 = \\ = \int_{Q^2} \Delta_{t_1} f(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2 + i t_2}) e^{i(t_1 + t_2)} (e^{it_1} - r_1)^{-2} (e^{it_2} - r_2)^{-1} dt_1 dt_2 - \end{aligned}$$

$$- \int_{Q^2} \Delta_{t_1} f(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}) e^{i(t_1+t_2)} (e^{it_1} - r_1)^{-2} (e^{it_2} - r_2)^{-1} dt_1 dt_2 + \\ + \int_{Q^2} \Delta_{t_1} f(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}) e^{i(t_1+t_2)} (e^{it_1} - r_1)^{-2} (e^{it_2} - r_2)^{-1} dt_1 dt_2 = I.$$

Легко видеть, что

$$\Delta_t f(e^{i\theta'_s}, e^{i\theta'_{s+1}+it'_{s+1}}) - \Delta_t f(e^{i\theta'_{s+1}}, e^{i\theta'_{s+2}+it'_{s+2}}) = \Delta_{t'} f(e^{i\theta'_{s+1}}, e^{i\theta'_{s+2}+it'_{s+2}}),$$

где $t' = (t_1, \dots, t_l, t_{s+1})$, $s \geq l+1$.

Воспользовавшись тем, что $\int_T \frac{d\xi}{\xi-z} = 2\pi i$, получаем

$$I = \int_{Q^2} \Delta_{t_2 t_1} f(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}) e^{i(t_1+t_2)} (e^{it_1} - r_1)^{-2} (e^{it_2} - r_2)^{-1} dt_1 dt_2 + \\ + \int_{Q^2} \Delta_{t_1} f(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}) e^{i(t_1+t_2)} (e^{it_1} - r_1)^{-2} (e^{it_2} - r_2)^{-1} dt_1 dt_2 = \\ = \int_{Q^2} \Delta_{t_2 t_1} f(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}) e^{i(t_1+t_2)} (e^{it_1} - r_1)^{-2} (e^{it_2} - r_2)^{-1} dt_1 dt_2 + \\ + \int_{Q^1} \Delta_{t_1} f(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}) e^{it_1} (e^{it_1} - r_1)^{-2} dt_1.$$

Учитывая оценку (1.4), получаем

$$|I| \leq \int_{Q^2} |t_2|^{\alpha_2} |t_1|^{\alpha_1} |e^{it_1} - r_1|^{-2} |e^{it_2} - r_2|^{-1} |dt_1| |dt_2| + \\ + \int_{Q^1} |t_1|^{\alpha_1} |e^{it_1} - r_1|^{-2} |dt_1| \leq C(1-r_1)^{\alpha_1-1}.$$

Предположим теперь, что лемма верна для $(n-1)$ -переменных. Докажем ее для n -переменных. Обозначим через J_k^k интеграл в (3.1) и положим

$$P(t, k, n) = e^{i(t_1+\dots+t_n)} \prod_{j=1}^k (e^{it_j} - r_j)^{-2} \prod_{j=k+1}^n (e^{it_j} - r_j)^{-1}.$$

Легко проверить, что $J_k^k = J_{k+1}^{k+1} + J_k^{k+1}$ и

$$J_k^k = \int_{Q^n} \Delta_t f(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n}) P(t, k, n) dt + \int_{Q^n} [\Delta_{t_k \dots t_1} f(e^{i\theta'_{k+1}}, e^{i\theta'_{k+2}+it'_{k+2}}) + \\ + \Delta_{t_{k+1} \dots t_1} f(e^{i\theta'_{k+2}}, e^{i\theta'_{k+3}+it'_{k+3}}) + \dots + \Delta_{t_{n-2} \dots t_1} f(e^{i\theta'_{n-1}}, e^{i\theta'_n+it'_n})] P(t, k, n) dt.$$

Очевидно, что второй интеграл зависит от $(n-1)$ -переменных. Следовательно, по предположению индукции можем утверждать, что

$$|J_k^k| \leq \int_{Q^n} |t|^\alpha \prod_{j=1}^k |e^{it_j} - r_j|^{-2} \prod_{j=k+1}^n |e^{it_j} - r_j|^{-1} |dt| + \\ + C_1 \prod_{j=1}^k (1-r_j)^{\alpha_j-1} \leq C \prod_{j=1}^n (1-r_j)^{\alpha_j-1}.$$

Лемма доказана.

Доказательство Теоремы 3.2. В силу Теоремы 1.1* достаточно убедиться, что

$$\left| \frac{\partial^k F(z)}{\partial z_1 \cdots \partial z_k} \right| \leq C \prod_{j=1}^k (1 - |z_j|)^{\alpha_j - 1}, \quad 1 \leq k \leq n,$$

где $F(z) = K f(z)$.

Применяя обозначения, введенные в Лемме 1, получаем

$$\frac{\partial^k F(z)}{\partial z_1 \cdots \partial z_k} = \frac{e^{-i(\theta_1 + \cdots + \theta_k)}}{(2\pi)^n} \int_{T^n} f(e^{i\theta_1 + it_1}, \dots, e^{i\theta_n + it_n}) P(t, k, n) dt.$$

Следовательно, из $\int_{T^n} d\xi (\xi - z)^2 = 0$ имеем

$$\frac{\partial^l F(z)}{\partial z_1 \cdots \partial z_k} = \frac{e^{-i(\theta_1 + \cdots + \theta_k)}}{(2\pi)^n} \int_{Q^n} \Delta_{l_1} f(e^{i\theta_1}, e^{i\theta'_2 + it'_2}) P(t, k, n) dt.$$

Продолжая таким образом, получаем

$$\frac{\partial^k F(z)}{\partial z_1 \cdots \partial z_k} = \frac{e^{-i(\theta_1 + \cdots + \theta_k)}}{(2\pi)^n} \int_{Q^n} \Delta_{l_k \cdots l_1} f(e^{i\theta'_k}, e^{i\theta'_{k+1} + it'_{k+1}}) P(t, k, n) dt.$$

Наконец, применяя лемму, получаем требуемую оценку. Теорема доказана.

§4. ЛИНЕЙНЫЕ НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ НА $H^p(\alpha)$,

$$0 < p \leq 1$$

Пусть задан мультииндекс $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, будем предполагать, что для некоторого s , при $1 \leq s \leq n$, α_j , $j = \overline{1, s}$ — целые, а при α_j , $j = \overline{s+1, n}$ — нецелые.

Напомним (см. [3]), что $f \in H^p(\alpha)$, $\alpha_j > -1$, $j = \overline{1, n}$, если $f \in H(U^n)$ и

$$\|f\|_{H^p(\alpha)} = \left(\int_{U^n} |f(\xi)|^p \prod_{j=1}^n (1 - |\xi_j|)^{\alpha_j} d m_{2n}(\xi) \right)^{1/p} < +\infty.$$

Для описания сопряженного пространства $H^{*p}(\alpha)$ в терминах $\tilde{\Lambda}^a(\gamma)$ сначала найдем связь между пространствами $\Lambda^p(\alpha)$ и $\Lambda_p^a(\gamma)$ (мультииндекс $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ будет определен позже).

Пусть $f \in \Lambda^p(\alpha)$ и $\beta_j > \frac{\alpha_j + 2}{p}$, тогда

$$|D^{\beta+1} f(z)| \leq C \prod_{j=1}^n (1 - |z_j|)^{\frac{\alpha_j + 2}{p} - \beta_j - 2}. \quad (4.1)$$

Заметим, что без ограничения общности, можно считать, что

$$\beta_j = \begin{cases} \frac{\alpha_j + 2}{p} - 1, & \text{если } 1 \leq j \leq s \\ \left[\frac{\alpha_j + 2}{p} - 1 \right], & \text{если } s < j \leq n. \end{cases} \quad (4.2)$$

Полагая $\nu_j = \frac{\alpha_j+2}{p} - 1 - \beta_j$, $s < j \leq n$, из (4.1) получаем

$$|D^{\beta+1} f(z)| \leq C \prod_{j=1}^s (1 - |z_j|)^{-1} \prod_{j=s+1}^n (1 - |z_j|)^{\nu_j-1}.$$

Отсюда

$$\frac{\partial^{\beta_1-1+\dots+\beta_s-1+\beta_{s+1}+\dots+\beta_n} (f(z) z^{\beta+1})}{\partial z_1^{\beta_1-1} \dots \partial z_s^{\beta_s-1} \partial z_{s+1}^{\beta_{s+1}} \dots \partial z_n^{\beta_n}} \in \Lambda^a(\nu'),$$

где $\nu' = (\nu_{s+1}, \dots, \nu_n)$. (Напомним, что $\Lambda_a^a(k) = \Lambda_a^a$ для $k = 0$).

Поэтому

$$f(z) z^{\beta+1} \in \Lambda^a(\beta_1 - 1, \dots, \beta_s - 1, \beta_{s+1} + \nu_{s+1}, \dots, \beta_n + \nu_n).$$

Из Теорем 1.4 и 2.5 имеем

$$f \in \tilde{\Lambda}^a(\beta_1 - 1, \dots, \beta_s - 1, \beta_{s+1}, \dots, \beta_n).$$

Следовательно, $f \in \tilde{\Lambda}^a(\gamma)$,

$$\gamma_j = \begin{cases} \frac{\alpha_j+2}{p} - 2, & \text{если } 1 \leq j \leq s \\ \frac{\alpha_j+2}{p} - 1, & \text{если } s < j \leq n. \end{cases} \quad (4.3)$$

Из Теорем 1.4 и 2.5 следует, что

$$\left| \frac{\partial^{\beta_{i_1}+1+\dots+\beta_{i_k}+1} f(z)}{\partial z_{i_1}^{\beta_{i_1}+1} \dots \partial z_{i_k}^{\beta_{i_k}+1}} \right| \leq C \|f\|_{\Lambda_a^a} \prod_{j=1}^k (1 - |z_{i_j}|)^{\nu_{i_j}-1},$$

где $\nu_{i_j} = 0$ при $1 \leq i_j \leq s$. Следовательно

$$\prod_{j=1}^k (1 - |z_{i_j}|)^{1-\nu_{i_j}} \left| \frac{\partial^{\beta_{i_1}+1+\dots+\beta_{i_k}+1} f(z)}{\partial z_{i_1}^{\beta_{i_1}+1} \dots \partial z_{i_k}^{\beta_{i_k}+1}} \right| \leq C(\beta) \|f\|_{\Lambda^p(\alpha)}.$$

Поэтому

$$C_1 \|f\|_{\Lambda^p(\alpha)} \geq \|f\|_{\tilde{\Lambda}^a(\gamma)}.$$

Теперь установим обратную оценку. Пусть $f \in \tilde{\Lambda}^a(\gamma)$. Тогда $z^{\beta+1} f(z) \in \tilde{\Lambda}^a(\gamma)$.

Взяв β_j из (4.2), получим

$$\left| \frac{\partial^{\beta+1} (f(z) z^{\beta+1})}{\partial z_1^{\beta_1+1} \dots \partial z_n^{\beta_n+1}} \right| = |D^{\beta+1} f(z)| \leq C_2(\beta) \|f\|_{\tilde{\Lambda}^a(\gamma)} \prod_{j=1}^n (1 - |z_j|)^{\frac{\alpha_j+2}{p} - \beta_j - 2}. \quad (4.4)$$

Следовательно

$$|D^{\beta+1} f(z)| \prod_{j=1}^n (1 - |z_j|)^{\beta_j+2-\frac{\alpha_j+2}{p}} \leq C_2(\beta) \|f\|_{\tilde{\Lambda}^a(\gamma)}.$$

Таким образом, доказана следующая

Теорема 4.1. Функция $f \in H(U^n)$ принадлежит $\Lambda^p(\alpha)$ тогда и только тогда, когда $f \in \tilde{\Lambda}^a(\gamma)$ с γ (4.3).

Теперь, используя Теорему 6 из [3] мы можем описать сопряженное пространство $H^{*p}(\alpha)$ в терминах $\tilde{\Lambda}^a(\gamma)$.

Теорема 4.2. Пусть Φ — линейный непрерывный функционал на $H^p(\alpha)$, $\alpha_j > -1$, $j = \overline{1, n}$, $0 < p \leq 1$, а $g(z) = \Phi(e_z)$, где $e_z = (1 - wz)^{-1}$, $w, z \in U^n$. Тогда справедливы следующие утверждения:

1. а) $g \in \tilde{\Lambda}^a(\gamma)$, где γ определяется по (4.3);
- б) функционал $\Phi(\cdot)$ представляется в виде

$$\Phi(f) = \lim_{\rho \rightarrow 1-0} \int_{T^n} f(\rho\xi) g(\rho\xi) dm_n(\xi) \quad (4.5)$$

и существуют постоянные $C_1(p)$ и $C_2(p)$ такие, что

$$C_1(p) \|\Phi\| \leq \|g\|_{\tilde{\Lambda}^a(\gamma)} \leq C_2(p) \|\Phi\|. \quad (4.6)$$

2. Каждая функция $g \in \tilde{\Lambda}^a(\gamma)$ по формуле (4.5) порождает линейный непрерывный функционал на $H^p(\alpha)$, который удовлетворяет (4.6).

Замечание. Аналог Теоремы 4.2 для n -гармонических в полуплоскости функций был установлен в [12].

ABSTRACT. The classes $\tilde{\Lambda}^a(\alpha)$ and $\tilde{\Lambda}_*^a(\alpha)$ of holomorphic in U^n functions are constructed which are multi-dimensional analogs of the one-dimensional Lipschitz classes. We investigate the multiplicative properties of these classes and obtain a complete description of linear continuous functionals defined on the corresponding spaces $H^p(\alpha)$ for $0 < p < 1$. A generalization of the well-known theorem of Privalov is proved: the classes $\tilde{\Lambda}^a(\alpha)$ and $\tilde{\Lambda}_*^a(\alpha)$ are invariant with respect to Cauchy-type operators.

ЛИТЕРАТУРА

1. P. L. Duren, B. W. Romberg, A. L. Shields, "Linear functionals of H^p spaces with $0 < p < 1$ ", J. Reine Angew. Math., vol. 238, pp. 32 – 60, 1969.
2. A. P. Frazer, "The dual space of H^p of the polydisk for $0 < p < 1$ ", Duke Math. J., vol. 39, no. 2, pp. 369 – 379, 1972.
3. Ф. А. Шамоян, "Диагональное отображение и вопросы представления в анизотропных пространствах голоморфных функций", Сиб. мат. журнал, т. 31, №2, стр. 197 – 216, 1990.
4. Ф. А. Шамоян, "Генлицевы операторы и деление на внутреннюю функцию в

- некоторых пространствах аналитических функций", ДАН Арм. ССР, т. 76, №3, стр. 109 – 113, 1983.
5. Ф. А. Шамоян, А. В. Арутюнян, "Теплицевы операторы в анизотропных пространствах голоморфных в полидиске функций", ДАН Армении, т. 91, №4, стр. 147 – 151, 1991.
 6. А. Зигмунд, Тригонометрические Ряды, т. I, М., Мир, 1965.
 7. М. М. Джрбашян, "О каноническом представлении мероморфных в единичном круге функций", ДАН Арм. ССР, т. 3, №1, стр. 3 – 9, 1945.
 8. М. М. Джрбашян, "К проблеме представимости аналитических функций", Сообщ. Института математики и механики АН Арм. ССР, т. 2, стр. 3 – 30, 1948.
 9. B. Yotikhe, "A multidimensional analogy of Privalov's theorem", Math. Nachrichten, vol. 107, pp. 221 – 233, 1982.
 10. С. М. Никольский, Приближение Функций Многих Переменных и Теоремы Вложений, М., Наука, 1969.
 11. J. B. Garnett, Bounded Analytic Functions, Academic Press, N.Y., 1981.
 12. G. Merryfield, "On the area integral, Carleson measures and H^p in the polydisk", Indiana Univer. Math. J., vol. 34, no. 3, pp. 663 – 685, 1985.

11 Августа 1993

Институт математики
ПАИ Армении

Ереванский государственный
университет