О ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ИНТЕГРАЛАХ, СУММИРУЕМЫХ МЕТОДОМ РИМАНА

Г. Г. Геворкян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 28, №6, 1993

В работе рассматриваются тригонометрические интегралы, суммируемые методом Римана, где $\chi(t)$ имеет ограниченную вариацию на каждом конечном интервале и в каждой точке $\chi(t) = \frac{1}{2}[\chi(t+0) + \chi(t-0)]$, удовлетворяющей условию $\lim \sup_{0<h<1} |\chi(t+h)-\chi(t)| = 0$. В частности, если почти всюду $\lim_{h\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(itx) \left(\frac{\sin ht}{ht}\right)^2 d\chi(t) = f(x)$ для некоторой интегрируемой на каждом конечном интервале функции $f(x)$, и на каждом конечном интервале $[a,b]$,

$$\liminf_{\lambda\to\infty} \lambda \cdot \mu \left\{ x \in [a,b] : \sup_{h>0} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(itx) \left(\frac{\sin ht}{ht}\right)^2 d\chi(t) \right| > \lambda \right\} = 0,$$

то для каждого t и τ, $\chi(t+\tau) - \chi(t) = (C,1)\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \exp(-itx) \times \frac{\exp(-it\tau)-1}{-ix} dx$.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Рассматриваются тригонометрические интегралы

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(itx)\, d\chi(t), \tag{1}$$

суммируемые методом Римана. Предполагается, что функция $\chi(t)$ имеет ограниченную вариацию на каждом конечном интервале, в любой точке $\chi(t) = \frac{1}{2}[\chi(t+0) + \chi(t-0)]$ и удовлетворяет условию

$$\lim \sup_{0<h<1} |\chi(t+h) - \chi(t)| = 0. \tag{2}$$

Заметим, что условие (2) в теории тригонометрических интегралов заменяет условие сходимости коэффициентов к нулю в теории тригонометрических рядов.

Заметим также, что всякий тригонометрический ряд с коэффициентами, стремящимися к нулю, можно рассматривать как интеграл (1) с $\chi(t)$, удовлетворяющей условию (2).

Функцию

$$F(x) = \int_{\{|t|\le 1\}} \frac{\exp(itx) - 1 - itx}{t^2}\, d\chi(t) - \int_{\{|t|\ge 1\}} \frac{\exp(itx)}{t^2}\, d\chi(t) \tag{3}$$

называют функцией Римана интеграла (1). Известно, что (см. [1]) из условия (2) следует существование второго интеграла в (3) (как несобственного интеграла Римана–Стильтьеса), непрерывность функции $F(x)$ и ее гладкость, т.е.

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) + F(x-h) - 2F(x)}{h} = 0.$$

Обозначим

$$S(x,h) = \frac{F(x+h) + F(x-h) - 2F(x)}{h^2}.$$

Если существует предел $S(x,h)$ при $h \to 0$ и он равен S, то говорят, что интеграл (1) в точке x суммируется методом Римана к значению S. Известно, что если для некоторого x существует

$$\lim_{A\to+\infty} \int_{-A}^{A} \exp(itx)\, d\chi(t) = S,$$

то интеграл (1) суммируется методом Римана к значению S в точке x (см. [1], стр. 421).

Положим

$$S^*(x) = \sup_{h\ne 0} |S(x,h)|.$$

Справедлива формула

$$S(x,2h) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(itx) \left(\frac{\sin ht}{ht}\right)^2 d\chi(t)$$

(см. [1], стр. 422). Ниже мы докажем следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть интеграл (1) суммируется почти всюду методом Римана к функции $f(x)$, интегрируемой на каждом конечном интервале и на каждом $[a,b]$ выполняется условие*

$$\liminf_{\lambda\to\infty} \lambda \cdot \mu\{x \in [a,b] : S^*(x) > \lambda\} = 0. \tag{4}$$

Тогда для всех t и τ имеет место

$$\chi(t+\tau)-\chi(t)=(C,1)\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\exp(-itx)\,\frac{\exp(-ix\tau)-1}{-ix}\,dx=$$
$$=\lim_{A\to+\infty}\frac{1}{2\pi A}\int_0^A d\sigma\int_{-\sigma}^{\sigma} f(x)\exp(-itx)\frac{\exp(-ix\tau)-1}{-ix}\,dx. \tag{5}$$

В частности, если $f(x)=0$ почти всюду, то $\chi(t)$ – постоянная.

В случае, когда $\chi(t)$ – абсолютно непрерывная на каждом интервале и $\chi'(t)=$ $=\varphi(t)$ почти всюду, т.е. $\varphi(t)$ – локально интегрируемая функция, удовлетворяющая условию

$$\lim_{t\to\infty}\sup_{0<h<1}\left|\int_t^{t+h}\varphi(z)\,dz\right|=0 \tag{6}$$

и

$$S(x,2h)=\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(itx)\left(\frac{\sin ht}{ht}\right)^2\varphi(t)\,dt, \tag{7}$$

справедлива

Теорема 2. *Пусть $\lim_{h\to 0} S(x,h)=f(x)$ почти всюду на $(-\infty,+\infty)$, где $S(x,h)$ определяется формулой (7), и $f(x)$ интегрируема на каждом конечном интервале. Если выполнено условие (4), то для почти всех t*

$$\varphi(t)=(C,1)\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\exp(-itx)\,dx=$$
$$=\lim_{A\to+\infty}\frac{1}{2\pi A}\int_0^A dy\int_{-y}^{y} f(x)\exp(-itx)\,dx.$$

В частности, если $f(x)=0$ почти всюду, то $\varphi(t)=0$ почти всюду.

Доказательства этих теорем существенно опираются на одну теорему о суммирующихся почти всюду методом Римана тригонометрических рядах [2].

Теорема 3. *(см. [2], Теорема 9.) Пусть коэффициенты ряда $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\exp(inx)$ стремятся к нулю и ряд на некотором интервале I длины меньше чем 2π, суммируется почти всюду методом Римана к интегрируемой на I функции $f(x)$. Если*

$$\liminf_{\lambda\to\infty}\lambda\cdot\mu\left\{x\in I:\ \sup_{h\neq 0}\left|\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\exp(inx)\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2\right|>\lambda\right\}=0,$$

то

$$F(x)=\int_{x_0}^{x}\left\{\int_{x_0}^{y} f(t)\,dt\right\}dy+Ax+B\quad \text{на } I,$$

где x_0 – некоторая точка в I, A и B – постоянные, зависящие от $f(x)$ и x_0.

Вопросы единственности тригонометрических рядов, суммируемых почти всюду методом Римана, исследованы в работах [2 - 5].

§2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ЛЕММЫ

Лемма 1. *Если $\chi(t)$ удовлетворяет условию (2), то*

$$\lim_{a\to+\infty}\int_a^{a+\lambda}\exp(itx)\,d\chi(t)=0 \quad \text{для всех } x \text{ и } \lambda.$$

Если x и λ принадлежат ограниченным множествам, то сходимость равномерная.

Доказательство. Очевидно, что

$$\int_a^{a+\lambda}\exp(itx)\,d\chi(t)=\int_a^{a+\lambda}\cos xt\,d\chi(t)+i\int_a^{a+\lambda}\sin xt\,d\chi(t).$$

Пусть $a=\lambda_0<\lambda_1<\ldots<\lambda_k=a+\lambda$ выбрана так, что $\cos xt$ монотонна на $[\lambda_{i-1},\lambda_i]$, $i=1,2,\ldots,k$. Очевидно, что если x и λ ограничены, то k также будет ограниченным. Тогда

$$\int_a^{a+\lambda}\cos xt\,d\chi(t)=\sum_{i=1}^{k}\int_{\lambda_{i-1}}^{\lambda_i}\cos xt\,d\chi(t)=$$

$$=\sum_{i=1}^{k}\left(\chi(\lambda_i)\cos x\lambda_i-\chi(\lambda_{i-1})\cos x\lambda_{i-1}\right)-\sum_{i=1}^{k}\int_{\lambda_{i-1}}^{\lambda_i}\chi(t)\,d\cos xt. \tag{8}$$

Учитывая, что $d\cos xt$ – знакопостоянная мера на $[\lambda_{i-1},\lambda_i]$, получим

$$\int_{\lambda_{i-1}}^{\lambda_i}\chi(t)\,d\cos xt=\xi_i\left(\cos\lambda_i x-\cos\lambda_{i-1}x\right), \tag{9}$$

где

$$\xi_i\in\left[\inf_{t\in[\lambda_{i-1},\lambda_i]}\chi(t),\ \sup_{t\in[\lambda_{i-1},\lambda_i]}\chi(t)\right]. \tag{10}$$

Из (8) (10) следует, что

$$\int_a^{a+\lambda}\cos xt\,d\chi(t)=\sum_{i=1}^{k}\left(\cos\lambda_i x(\chi(\lambda_i)-\xi_i)+\cos\lambda_{i-1}x(\chi(\lambda_{i-1})-\xi_i)\right). \tag{11}$$

Из (11), (10) и (2) получаем

$$\lim_{a\to+\infty}\int_a^{a+\lambda}\cos xt\,d\chi(t)=0.$$

Аналогично устанавливается, что

$$\lim_{a\to+\infty}\int_a^{a+\lambda}\sin xt\,d\chi(t)=0.$$

Лемма доказана.

Лемма 2. *Если на некотором* $[a,b]$

$$\lim_{h\to 0} S(x,2h) = \lim_{h\to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(itx) \left(\frac{\sin ht}{ht}\right)^2 d\chi(t) = f(x)$$

почти всюду и

$$\lim_{k\to\infty} \lambda_k \cdot \mu\{x \in [a,b]: \quad S^*(x) > \lambda_k\} = 0$$

при некотором λ_k, *стремящемся к* $+\infty$, *то*

$$\lim_{h\to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(itx) \left(\frac{\sin ht}{ht}\right)^2 d\chi(t+\tau) = \exp(-ix\tau) f(x)$$

почти всюду и

$$\lim_{k\to\infty} \lambda_k \cdot \mu\left\{x \in [a,b]: \quad \sup_{h\neq 0}\left|\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(itx) \left(\frac{\sin ht}{ht}\right)^2 d\chi(t+\tau)\right| > \lambda_k\right\} = 0.$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(itx) \left(\frac{\sin ht}{ht}\right)^2 d\chi(t+\tau) = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(ix(t-\tau)) \left(\frac{\sin h(t-\tau)}{h(t-\tau)}\right)^2 d\chi(t) = \\ &= \exp(-ix\tau) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(itx) \left(\frac{\sin ht}{ht}\right)^2 d\chi(t) + \\ &+ \exp(-ix\tau) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(itx) \left[\left(\frac{\sin h(t-\tau)}{h(t-\tau)}\right)^2 - \left(\frac{\sin ht}{ht}\right)^2\right] d\chi(t). \end{aligned} \tag{12}$$

Пусть

$$\Phi_x(t) = \int_0^t \exp(ix\theta)\, d\chi(\theta).$$

Известно, что равномерно для $x \in [a,b]$, $\Phi_x(t) = o(|t|)$, при $t \to \infty$.

Из (12) следует, что для доказательства леммы достаточно доказать, что

$$\lim_{h\to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\left(\frac{\sin h(t-\tau)}{h(t-\tau)}\right)^2 - \left(\frac{\sin ht}{ht}\right)^2\right] d\Phi_x(t) = 0 \tag{13}$$

равномерно для $x \in [a,b]$. Имеем

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\left(\frac{\sin h(t-\tau)}{h(t-\tau)}\right)^2 - \left(\frac{\sin ht}{ht}\right)^2\right] d\Phi_x(t) = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin ht}{ht}\right)^2 d\left[\Phi_x(t+\tau) - \Phi_x(t)\right] = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\Phi_x(t+\tau) - \Phi_x(t)\right] d\left(\frac{\sin ht}{ht}\right)^2 = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\Phi_x(\frac{t}{h}+\tau) - \Phi_x(\frac{t}{h})\right] d\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 \end{aligned} \tag{14}$$

Учитывая, что
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{d}{dt} \left(\frac{\sin ht}{ht} \right)^2 \right| dt < +\infty,$$
и для $t \neq 0$ (см. Лемму 1)
$$\lim_{h\to 0} \left[\Phi_x(\frac{t}{h} + \tau) - \Phi_x(\frac{t}{h}) \right] = 0 \quad \text{равномерно для} \quad x \in [a,b],$$
из (14) получаем (13). Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Пусть интеграл (1) почти всюду на $[a,b]$ суммируется методом Римана к интегрируемой на $[a,b]$ функции $f(x)$ и*
$$\liminf_{\lambda\to\infty} \lambda \cdot \mu \{x \in [a,b] \colon S^*(x) > \lambda\} = 0.$$
Тогда для любой точки $x_0 \in [a,b]$
$$F(x) = \int_{x_0}^{x} dy \int_{x_0}^{y} f(t)\,dt + Ax + B, \tag{15}$$
где A и B постоянные.

Доказательство. Пусть $J \subset [a,b]$ – произвольный отрезок длины меньше 2π. Выберем интервал J' длины 2π, содержащий J. Пусть $L(x)$ бесконечно дифференцируемая функция, равная 1 на J и нулю вне J'. Тогда (см. [1])
$$\int_{J'} F(x)L(x) \exp(-inx)\,dx = o(n^{-2}).$$
Пусть ряд
$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{16}$$
является дважды формально продифференцированным рядом Фурье 2π периодической функции, совпадающей с $F(x)L(x)$ на J'. Ясно, что коэффициенты ряда (16) стремятся к нулю.

Пусть J'' – произвольный отрезок, лежащий в J. Тогда для малых h суммами Римана ряда (16) на J'' будут
$$S_1(x,h) = \frac{F(x+h)L(x+h) + F(x-h)L(x-h) - 2F(x)L(x)}{h^2} =$$
$$= \frac{F(x+h) + F(x-h) - 2F(x)}{h^2} = S(x,h).$$

Следовательно, ряд (16) почти всюду на J'' суммируется методом Римана к $f(x)$ и

$$\liminf_{\lambda\to+\infty} \lambda\,\mu\left\{x\in J'' : \sup_{h>0} |S(x,h)| > \lambda\right\} = 0.$$

В силу Теоремы 3 имеем

$$F(x) = F(x)I(x) = \int_{x'}^{x} dy \int_{x'}^{y} f(t)\,dt + A'x + B', \quad \text{при} \quad x\in J'', \tag{17}$$

где $x\in J''$ и постоянные A' и B' зависят только от x'.

Поскольку J'' — произвольный отрезок, лежащий в J, J — произвольный интервал, лежащий в $[a,b]$, а функция $F(x)$ гладкая, то из (17) следует (15). Лемма доказана.

§3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ 2,1

Доказательство Теоремы 2. Из Леммы 3 следует, что

$$F(x) = \int_0^x dy \int_0^y f(t)\,dt + Ax + B.$$

Теорема очевидна, если $\varphi(x)$ равна нулю вне конечного интервала. Поэтому, не ограничивая общности, можем предположить, что $\varphi(x) = 0$ на $(-1, 1)$. Тогда (см. (3))

$$F(x) = -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2} \exp(itx)\,dt. \tag{18}$$

Убедимся, что если $x \neq 0$ и x — точка Лебега функции $\dfrac{\varphi(t)}{t^2}$ или регулярная точка, т.е. $\dfrac{\varphi(x)}{x^2} = \dfrac{1}{2x^2}[\varphi(x+0) + \varphi(x-0)]$, то

$$-\frac{\varphi(x)}{x^2} = \lim_{A\to+\infty} \frac{1}{2\pi A}\int_0^A dy \int_{-y}^{y} F(t)\exp(-itx)\,dt. \tag{19}$$

Напомним, что сходимость интегралов (18) равномерна на каждом конечном интервале

$$\frac{1}{2\pi A}\int_0^A dy \int_{-y}^{y} F(t)\exp(-itx)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(-\frac{\varphi(\theta)}{\theta^2}\right)\frac{2\sin^2\frac{A(x-\theta)}{2}}{A(x-\theta)^2}\,d\theta.$$

Хорошо известно, что если x — точка Лебега функции $\dfrac{\varphi(\theta)}{\theta^2}$ или регулярная точка и $\varphi(\theta)$ равна нулю вне некоторого интервала (см. [6]), то

$$\frac{\varphi(x)}{x^2} = \frac{2}{\pi}\lim_{A\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(-\frac{\varphi(\theta)}{\theta^2}\right)\frac{\sin^2\frac{A(x-\theta)}{2}}{A(x-\theta)^2}\,d\theta$$

Поэтому, для доказательства (19) достаточно установить, что для фиксированного x

$$\lim_{A\to+\infty}\int_{|\theta|>2|x|}\frac{\varphi(\theta)}{\theta^2}\,\frac{\sin^2\frac{A(x-\theta)}{2}}{A(x-\theta)^2}\,d\theta=\lim_{A\to+\infty}I_x(A)=0. \tag{20}$$

Очевидно

$$|I_x(A)|\le\left|\int_{|\theta|>|x|}\frac{\varphi(x+\theta)}{(x+\theta)^2}\,\frac{\sin^2 A\frac{\theta}{2}}{A\theta^2}\,d\theta\right|$$

Обозначим $\varphi_*(t)=\dfrac{\varphi(t)}{t^2}$ и оценим

$$\int_{|x|}^{+\infty}\varphi_*(x+\theta)\,\frac{\sin^2 A\frac{\theta}{2}}{A\theta^2}\,d\theta=\frac{1}{2}\int_{\frac{A|x|}{2}}\varphi_*\left(x+\frac{2t}{A}\right)\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2dt.$$

Пусть

$$\Phi(t)=\int_0^t\varphi(\tau)\,d\tau.$$

Тогда (см. (6))

$$\begin{aligned}
&\lim_{a\to\infty}\sup_{0<h<1}\left|\int_a^{a+h}\frac{\varphi(t)}{t^2}\,dt\right|=\\
&=\lim_{a\to\infty}\sup_{0<h<1}\left|\frac{\Phi(a+h)}{(a+h)^2}-\frac{\Phi(a)}{a^2}--\Phi(\xi)\left(\frac{1}{(a+h)^2}-\frac{1}{a^2}\right)\right|=\\
&=\lim_{a\to\infty}\sup_{0<h<1}\left|\frac{1}{(a+h)^2}\int_\xi^{a+h}\varphi(\tau)\,d\tau+\frac{1}{a^2}\int_a^\xi\varphi(\tau)\,d\tau\right|=0.
\end{aligned} \tag{21}$$

Обозначим

$$\Phi_*(t)=\int_0^t\frac{\varphi(\tau)}{\tau^2}\,d\tau,$$

и пусть $t_1<t_2<\ldots<t_k<\ldots$ точки экстремума функции $\left(\dfrac{\sin t}{t}\right)^2$ на $\left[\dfrac{A|x|}{2},+\infty\right)$. Функция $\left(\dfrac{\sin t}{t}\right)^2$ монотонна на $[t_k,t_{k+1}]$. Поэтому

$$\begin{aligned}
&\int_{\frac{A|x|}{2}}^{\infty}\varphi_*\left(x+\frac{2t}{A}\right)\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2dt=\frac{A}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\int_{t_i}^{t_{i+1}}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2d\Phi_*\left(x+\frac{2t}{A}\right)=\\
&=\frac{A}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\Bigg[\Phi_*\Big(x+\frac{2t_{i+1}}{A}\Big)\left(\frac{\sin t_{i+1}}{t_{i+1}}\right)^2-\Phi_*\Big(x+\frac{2t_i}{A}\Big)\left(\frac{\sin t_i}{t_i}\right)^2-\\
&-\Phi_*\Big(x+\frac{2\xi_i}{A}\Big)\left(\left(\frac{\sin t_{i+1}}{t_{i+1}}\right)^2-\left(\frac{\sin t_i}{t_i}\right)^2\right)\Bigg],
\end{aligned}$$

где ξ_i точка из интервала $[t_i,t_{i+1}]$. Очевидно, что

$$\sup_A\frac{A}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\left|\left(\frac{\sin t_{i+1}}{t_{i+1}}\right)^2-\left(\frac{\sin t_i}{t_i}\right)^2\right|<+\infty.$$

Следовательно, для любого σ имеем

$$\left|\int_{\frac{A|x|}{2}}^{\infty} \varphi_* \left(x+\frac{2t}{A}\right)\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt\right| \le \max_{\frac{t_i}{A}\le\sigma} \sup_{t_i\le\xi_i\le t_{i+1}} \left|\Phi_*(x+\frac{2t_i}{A})-\Phi_*(x+\frac{2\xi_i}{A})\right| +$$
$$+\sup_{\frac{t_i}{A}\ge\sigma} \sup_{t_i\le\xi_i\le t_{i+1}} \left|\Phi_*(x+\frac{2t_i}{A})-\Phi_*(x+\frac{2\xi_i}{A})\right|. \tag{22}$$

Для произвольного $\varepsilon>0$ сначала можно выбрать σ такое, что второе слагаемое в (22) было меньше $\frac{\varepsilon}{2}$ (см. (21)). А затем, учитывая непрерывность функции $\Phi_*(t)$, можно выбрать A настолько большим, чтобы первое слагаемое в (22) тоже было меньше $\frac{\varepsilon}{2}$. Таким образом, мы доказали, что

$$\lim_{A\to\infty}\int_{|x|}^{\infty}\frac{\varphi(x+\theta)}{(x+\theta)^2}\,\frac{\sin^2 A\frac{\theta}{2}}{A\theta^2}\,d\theta=0.$$

Аналогичное соотношение имеет место, когда интеграл берется на $(-\infty,-|x|)$. Тем самым установлено (20), а следовательно и (19).

Учитывая (15) и дважды интегрируя по частям внутренний интеграл в (19) для $x\ne 0$, получаем

$$\int_{-y}^{y} F(t)\exp(-itx)\,dt=\left[iF(t)\frac{\exp(-itx)}{x}+F'(t)\frac{\exp(-itx)}{x^2}\right]_{t=-y}^{y}-$$
$$-\frac{1}{x^2}\int_{-y}^{y} f(t)\exp(-itx)\,dt. \tag{23}$$

Из (19), (23) видим, что для завершения доказательства Теоремы 2 нужно доказать следующие соотношения :

$$\lim_{A\to\infty}\frac{1}{A}\int_0^A \gamma(y)\exp(-ixy)\,dy=0, \tag{24}$$

$$\lim_{A\to\infty}\frac{1}{A}\int_0^A \gamma(-y)\exp(ixy)\,dy=0, \tag{25}$$

где $\gamma(y)$ может быть $F(y)$ или $F'(y)$.

Все эти соотношения устанавливаются аналогично. Например, для установления (24) при $\gamma=F$, подставляя значение $F(x)$ из (18), получаем

$$\lim_{A\to\infty}\frac{-1}{A}\int_0^A \exp(-ixy)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(t)}{t^2}\exp(ity)\,dt\,dy=$$
$$=\lim_{A\to\infty}\frac{i}{A(A-x)}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(t)}{t^2}\left(\exp(iA(t-x))-1\right)dt=$$
$$=\lim_{A\to\infty}\frac{-1}{A(A-x)}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(t)}{t^2}\sin A(t-x)\,dt-$$
$$-i\lim_{A\to\infty}\frac{1}{A(A-x)}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(t)}{t^2}\sin^2\frac{A(t-x)}{2}\,dt.$$

Тогда поступаем так же, как при оценивании (21) и (11). Теорема доказана.

Отметим, что при доказательстве Теоремы 2 мы воспользовались только представлением (15) и свойством (6). Таким образом, из представления (15) и свойства (6) следует, что почти всюду на $\mathbb{R}$

$$\varphi(t) = \lim_{A\to+\infty} \frac{1}{2\pi A} \int_0^A dy \int_{-y}^{y} f(x) \exp(-itx)\, dx. \tag{26}$$

Напомним, что это соотношение справедливо для регулярных точек $t \neq 0$ функции $\varphi(x)$.

Поскольку мы считаем, что $\varphi(t) = 0$ на $(-1, 1)$, то для установления (26) при $t = 0$ необходимо доказать

$$\lim_{A\to+\infty} \frac{1}{A} \int_0^A dy \int_{-y}^{y} f(x)\, dx. \tag{27}$$

Но в силу (15)

$$\frac{1}{A} \int_0^A dy \int_{-y}^{y} f(x)\, dx = \frac{1}{A} \int_0^A [F'(y) - F'(-y)]\, dy$$

откуда, учитывая (24) и (25) при $\gamma = F'$, получаем (27).

Доказательство Теоремы 1. Предположим, что $\chi(t)$ удовлетворяет условиям Теоремы 1, т.е.

$$\lim_{h\to0} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(itx) \left(\frac{\sin ht}{ht}\right)^2 d\chi(t) = f(x) \qquad \text{почти всюду,}$$

и на каждом отрезке $[a, b]$ для некоторой последовательности $\lambda_k \to +\infty$ (вообще говоря, зависящей от $[a, b]$), выполняется

$$\lim_{k\to\infty} \lambda_k \mu\{x \in [a, b] : \quad S^*(x) > \lambda_k\} = 0.$$

Тогда в силу Леммы 2 для любого $\tau \in \mathbb{R}$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned} &\lim_{h\to0} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(itx) \left(\frac{\sin ht}{ht}\right)^2 d[\chi(t+\tau) - \chi(t)] = \\ &= f(x)\, [\exp(-ix\tau) - 1] \quad \text{почти всюду} \end{aligned} \tag{28}$$

и

$$\lim_{k\to\infty} \lambda_k\, \mu \left\{ x \in [a, b] : \sup_{h\neq0} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(itx) \left(\frac{\sin ht}{ht}\right)^2 d[\chi(t+\tau) - \chi(t)] \right| > \lambda_k \right\} = 0. \tag{29}$$

где ... что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \ldots \left(\frac{\sin ht}{ht}\right)^2 d\,[\chi(t+\tau)-\chi(t)] +$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(itx)\left(\frac{\ldots}{ht}\right)^2 [\chi(t+\tau)-\chi(t)]\,dt$$

стремится к нулю равномерно по x.

Интегрируя по частям и учитывая очевидное соотношение $\chi(t) = o(t)$, при $t \to \pm\infty$ (см. (2)), получаем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(itx)\left(\frac{\sin ht}{ht}\right)^2 d\,[\chi(t+\tau)-\chi(t)] =$$
$$= -ix\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(itx)\left(\frac{\sin ht}{ht}\right)^2 [\chi(t+\tau)-\chi(t)]\,dt \tag{30}$$
$$-\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(itx)\,[\chi(t+\tau)-\chi(t)]\,d\left(\frac{\sin ht}{ht}\right)^2 = I_1 + I_2.$$

... $\int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{d}{dt}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2\right| dt < \infty$ и ... $[\chi(\frac{t}{h}+\tau) - \chi(\frac{t}{h})] = 0$, то $I_2 \to 0$.

Следовательно (см. (28) – (30))

$$\lim \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(itx)\left(\frac{\sin ht}{ht}\right)^2 [\chi(t+\tau)-\chi(t)]\,dt =$$
$$= \frac{\exp(-ix\tau)-1}{ix} f(x) \quad \text{почти всюду} \tag{31}$$

и

$$\lim_{k\to\infty} \lambda_k\,\mu\left\{x\in[a,b] : \sup_{h\neq 0}\left|\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(itx)\left(\frac{\sin ht}{ht}\right)^2 \times \right.\right. \tag{32}$$
$$\left.\left. \times [\chi(t+\tau)-\chi(t)]\,dt\right| > \lambda_k\right\} = 0$$

для любого $[a,b]$, не содержащего точку 0.

В силу Леммы 3 из (31), (32) и из непрерывности ... $F(x)$ следует, что

$$F(x) = \int^x \int_0^y f(t)\,\frac{\exp(-it\tau)-1}{-it}\,dt + Ax + B \quad \text{для всех } x. \tag{33}$$

Из Теоремы 2 и (31), (33) следует (5) (для $\chi(t)$ все точки являются регулярными). Теорема доказана.

Пусть $f(x) \in L_p(-\infty,+\infty)$, $1 < p < 2$ и $\hat f(t)$ — преобразование Фурье функции $f(x)$ ... $= \max\left\{\frac{1}{h} - \frac{|x|}{h^2}, 0\right\}$. Тогда

$$\rho_h(t) = \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} \ldots h(x)\exp(-itx)\,dx = \frac{2\sin^2\frac{th}{2}}{\ldots t^2 h^2}$$

Следовательно

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\varphi_h(x-h)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(itx)\hat{f}(t)\left(\frac{\sin\frac{th}{2}}{\frac{th}{2}}\right)^2 dt = S(x,h), \qquad (34)$$

где $S(x,h)$ - суммы Римана функции $\hat{f}(x)$.

В этом случае (см. [2], Теорема 5)

$$\lim_{h\to 0} S(x,h) = f(x) \quad \text{почти всюду на } \mathbb{R} \qquad (35)$$

и на каждом $[a,b]$

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda\cdot\mu\left\{x\in[a,b]:\ \sup_{h\neq 0}|S(x,h)|>\lambda\right\} = 0. \qquad (36)$$

Теоремы 4 и 5 следуют из (35), (36) и Теорем 1,2.

Теорема 4. *Для того, чтобы $\chi(t)$ было неопределенным интегралом от преобразования Фурье функции $f(x)\in L_p(-\infty,+\infty)$, $1\le p\le 2$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{h\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(itx)\left(\frac{\sin ht}{ht}\right)^2 d\chi(t) = f(x) \quad \textit{почти всюду на } \mathbb{R}$$

и

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\,\mu\left\{x\in[a,b]:\ \sup_{h\neq 0}\left|\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(itx)\left(\frac{\sin ht}{ht}\right)^2 d\chi(t)\right|>\lambda\right\} = 0.$$

на каждом $[a,b]$

Теорема 5. *Для того, чтобы функция $\varphi(t)$ была преобразованием Фурье функции $f(x)\in L_p(-\infty,+\infty)$, $1\le p\le 2$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{h\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(itx)\left(\frac{\sin ht}{ht}\right)^2 \varphi(t)\,dt = f(x) \quad \textit{почти всюду на } \mathbb{R}$$

и на каждом $[a,b]$ выполнялось равенство

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\,\mu\left\{x\in[a,b]:\ \sup_{h\neq 0}\left|\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(itx)\left(\frac{\sin ht}{ht}\right)^2 \varphi(t)\,dt\right|>\lambda\right\} = 0.$$

Известно, что если $f(x)\in L_p(-\infty,+\infty)$, при $1\le p\le 2$, то $\hat{f}(t)\in$

$\in L_q(-\infty,+\infty)$, где $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. В случае $1<p<2$ верно равенство (см. [7], стр. 147)

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\hat{f}(t)\right|^{\gamma}|t|^{\frac{\gamma}{q}-1}\,dt<+\infty,\quad \text{при любом}\quad p\le\gamma\le q. \tag{37}$$

Известно также, что не всякая функция, удовлетворяющая условию (37), $q>2$, является преобразованием Фурье некоторой функции из $L_p(-\infty,+\infty)$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ (см. [7]). Теорема 5 описывает функции из $L_q(-\infty,+\infty)$, которые являются преобразованиями Фурье.

Результаты этой статьи частично анонсированы в [8].

ASTRACT. In the paper the trigonometric integrals $\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(itx)\,d\chi(t)$ which are Riemann summable are considered, where $\chi(t)$ has bounded variation on each finite interval, at each point $\chi(t)=\frac{1}{2}[\chi(t+0)+\chi(t-0)]$ and satisfies the condition $\lim \sup\limits_{0<h<1}|\chi(t+h)-\chi(t)|=0$. In particular, if for an integrable on each finite interval function $f(x)$ $\lim_{h\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(itx)\times\left(\frac{\sin ht}{ht}\right)^2 d\chi(t)=f(x)$ and for every $[a,b]$,

$$\liminf_{\lambda\to\infty}\lambda\cdot\mu\left\{x\in[a,b]:\ \sup_{h>0}\left|\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(itx)\times\left(\frac{\sin ht}{ht}\right)^2 d\chi(t)\right|>\lambda\right\}=0,$$

then for every t and τ, $\chi(t+\tau)-\chi(t)=(C,1)\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\exp(-itx)\times\frac{\exp(-it\tau)-1}{-ix}\,dx$.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Зигмунд, Тригонометрические Ряды, т. 2, М., Мир, 1965.
2. Г. Г. Геворкян, "О единственности тригонометрических рядов", Мат. сборник, т. 180, №11, стр. 1462 – 1474, 1989
3. Г. Г. Геворкян, "О единственности тригонометрических рядов, суммируемых методом Римана", ДАН СССР, т. 313, №6, стр. 1302 – 1305, 1990.
4. Г. Г. Геворкян, "О тригонометрических рядах, суммируемых методом Римана", Мат. заметки, т. 52, №3, стр. 17 – 34, 1992.
5. Г. Г. Геворкян, "О единственности кратных тригонометрических рядов", Мат. сборник, т. 184, №11, стр. 93 – 130, 1993.
6. Е. Титчмарш, Введение в Теорию Интегралов Фурье, Гостехиздат, 1948.
7. E. G. Titchmarsh, "A contribution to the theory of Fourier transforms," Proc. London Math. Soc. (2), vol. 23, pp. 279 – 289, 1923.
8. Г. Г. Геворкян, "О тригонометрических интегралах, суммируемых методом Римана", Мат. заметки, т. 45, №5, стр. 114 – 117, 1989.

5 Ноября 1993

Ереванский государственный университет