ОБ ОГРАНИЧЕННОЙ РАСХОДИМОСТИ ПО ПЕРЕСТАВЛЕННЫМ ОРТОНОРМИРОВАННЫМ СИСТЕМАМ

С. Ш. Галстян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 28, №6, 1993

В работе доказывается, что для любой тригонометрической системы (или любого базиса в пространстве непрерывных функций) существует перестановка натурального ряда такая, что ряд расходится почти всюду и его частичные суммы равномерно ограничены. Показывается также, что для любой полной ортонормированной системы существует перестановка такая, что ряд расходится почти всюду и максимальная функция частичных сумм интегрируема с квадратом.

§1. ВВЕДЕНИЕ

А. Н. Колмогоров в [1] сформулировал теорему о том, что существует почти всюду расходящийся переставленный тригонометрический ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)} \cos(\sigma(n)x + \varphi_{\sigma(n)}),$$

коэффициенты которого удовлетворяют условию

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 < \infty,$$

т. е. существует функция из класса $L^2[-\pi, \pi]$, ряд Фурье которой после некоторой перестановки расходится почти всюду.

Лишь в 1960 году З. Загорский [2] дал краткую схему доказательства этой теоремы. Следуя конструкции З. Загорского, П. Л. Ульянов доказал, что аналогичные теоремы имеют место для системы Уолша и, что особенно важно, для системы Хаара. Исходя из последнего результата, П. Л. Ульянов и А. М. Олевский показали, что для любой полной ортонормированной системы (ПОНС) функций существует интегрируемая с квадратом функция, ряд Фурье которой

по этой системе после некоторой перестановки расходится почти всюду. Затем, А. М. Олевский доказал, что функцию можно взять непрерывной. Исторические справки об этих результатах можно найти в работах [3 – 5].

П. Л. Ульянов доказал, что для системы Хаара существует интегрируемая с квадратом функция на [0,1], ряд Фурье–Хаара которой после некоторой перестановки ограниченно расходится почти всюду (см. [3]). В связи с последним результатом в работе [3] П. Л. Ульянов отмечает, что этот пример является первым примером такого рода, и ему не известны подобные примеры для других классических систем функций и, тем более, для достаточно произвольных ПОНС.

§2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Теорема 1. *Пусть $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ – тригонометрическая система или базис в пространстве $C[0,1]$. Тогда существует непрерывная функция f и перестановка τ натурального ряда такие, что ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\tau(n)}(f)\varphi_{\tau(n)}(t)$$

расходится почти всюду, а

$$\sup_N \left\| \sum_{n=1}^{N} a_{\tau(n)}(f)\varphi_{\tau(n)}(t) \right\|_{\infty} < \infty,$$

где $a_n(f)$ определяются формулой

$$a_n(f) = \langle f, \varphi_n^* \rangle = \int_0^1 f(t)\varphi_n^*(t)\, dt.$$

Здесь φ_n^* – система, биортогональная φ_n, т. е.

$$\langle \varphi_n, \varphi_m^* \rangle = \delta_{n,m} = \begin{cases} 1, & \text{если } n = m, \\ 0, & \text{если } n \neq m. \end{cases}$$

Этот результат был доложен на Всесоюзной школе по теории функций и приближений в 1987 в Амберде (см. [6]).

Теорема 1 дает отрицательный ответ на задачу Р. И. Овсепяна (устное сообщение) : обязан ли почти всюду сходиться ортогональный ряд, частичные суммы которого равномерно ограничены

Теорема 2. *Пусть $\{\varphi_n\}$ – ПОНС функций на $[0,1]$. Тогда существует непрерывная функция f на $[0,1]$ и перестановка τ натурального ряда такие, что ряд Фурье этой функции по системе $\{\varphi_n\}$ после перестановки τ расходится почти всюду и*

$$S_\tau^*(f) = \sup_N \left| \sum_{n=1}^{N} a_{\tau(n)} \varphi_{\tau(n)}(t) \right|$$

принадлежит классу $L^2[0,1]$.

Теоремы 1 и 2 дают ответ на вышеупомянутую задачу П. Л. Ульянова.

Теорема. *Гарсиа [(см. [5], стр. 65 – 75)] Пусть $\{\varphi_n\}$ – ОН система функций на $[0,1]$. Тогда для любой последовательности $\{a_n\} \in l^2$ существует перестановка τ натурального ряда такая, что*

$$\int_0^1 \sup_N \left| \sum_{n=1}^{N} a_{\tau(n)} \varphi_{\tau(n)}(t) \right|^2 dt \le C \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2,$$

где C – абсолютная постоянная.

§3. НЕКОТОРЫЕ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Определим систему типа Хаара (см. [5], стр. 119). Пусть задано семейство измеримых множеств

$$\mathcal{E} = \left\{ \{E_k^{(i)}\}_{i=1}^{2^k} \right\}_{k=0}^{\infty},$$

$$E_0^{(1)} = [0,1], \qquad E_k^{(i)} \subset [0,1] \quad \text{при } k > 0,$$

удовлетворяющих условиям

I. $\quad \operatorname{mes} E_k^{(i)} = 2^{-k}$,

II. $\quad E_k^{(i)} = E_{k+1}^{(2i-1)} \cup E_{k+1}^{(2i)}$,

III. $\quad E_k^{(i)} \cap E_k^{(j)} = \emptyset, \quad$ при $i \ne j$,

где $\operatorname{mes} E$ – мера Лебега на $[0,1]$.

Для семейства $\mathcal{E}$ определим $\tilde{\chi}_1(t) \equiv 1$,

$$\tilde{\chi}_n(t) = \begin{cases} \sqrt{2^k}, & \text{при } t \in E_{k+1}^{(2i-1)}, \\ -\sqrt{2^k}, & \text{при } t \in E_{k+1}^{(2i)}, \\ 0, & \text{при } t \in [0,1] \setminus E_k^{(i)}, \end{cases}$$

где $n = 2^k + i$, $1 \le i \le 2^k$, $k = 0, 1, \ldots$.

Известно (см. [5], стр. 119), что для любой системы типа Хаара существует сохраняющее меру отображение $\omega(t)$ отрезка $[0,1]$ на себя такое, что $\tilde{\chi}_n(t) = \chi_n(\omega(t))$, где χ_n - система Хаара. Отрезки вида $\left[\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m}\right]$ называются *двоичными отрезками.*

Сформулируем лемму, которая, фактически, уже представлена в работе [1], но отдельно не сформулирована (см. также [5], стр. 115).

Лемма 1. *(А. М. Олевский) Существует подпоследовательность $\{N_m\}_{m=1}^{\infty}$ натуральных чисел, множество $E_m \subset [0,1]$, $mes\ E_m \geq 1 - 1/m^2$, перестановка σ натуральных чисел и полиномы $Q_m(t)$ по системе Хаара*

$$Q_m(t) = \sum_{n=N_{m-1}+1}^{N_m} a_n \chi_n(t)$$

со свойствами

1) $\quad \|Q_m\|_\infty \leq \frac{1}{m^2}, \quad \sum_{n=N_{m-1}+1}^{N_m} |a_n \chi_n(t)| \leq 1, \quad t \in [0,1],$

2) $\quad \{\sigma(N_{m-1}+1), \sigma(N_{m-1}+2), ..., \sigma(N_m)\} = \{N_{m-1}+1, N_{m-1}+2, ..., N_m\},$

$$\max_{N_{m-1} < N \leq N_m} \left| \sum_{n=N_{m-1}+1}^{N_m} a_{\sigma(n)} \chi_{\sigma(n)}(t) \right| \geq \frac{1}{4}, \quad \text{при } t \in E_m.$$

Из этой леммы непосредственно получаем следующее

Следствие 1. Пусть $\{\tilde{\chi}_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ - система типа Хаара. Тогда существует подпоследовательность $\{a_n\} \in l^2$ и перестановка σ натуральных чисел такие, что $\|a_n \tilde{\chi}_n\|_\infty \to 0$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} \tilde{\chi}_{\sigma(n)}(t)$ расходится почти всюду и

$$\sup_N \left\| \sum_{n=1}^{N} a_{\sigma(n)} \tilde{\chi}_{\sigma(n)} \right\|_\infty < \infty.$$

Лемма 2. *Пусть $\mathcal{M}$ - подмножество отрезка $[0,1]$, состоящее из конечного числа двоичных отрезков. Тогда для любого натурального числа M и положительных чисел $\varepsilon, b < 1/2$ существует разбиение множества $\mathcal{M}$ на два подмножества $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ одинаковой меры, состоящих из двоичных отрезков, натуральное число M', тригонометрический полином*

$$P(t) = \sum_{j=M+1}^{M'} c_j \cos(2\pi j t + \alpha_j)$$

и перестановка λ *натуральных чисел* $\{M+1, M+2, ..., M'\}$, *для которых*

$$a) \qquad |P(t)| < \varepsilon \quad \text{при } t \in [0,1] \setminus \mathcal{M}, \quad ||P||_\infty \le 2;$$

$$b) \qquad mes\,\{t : |P(t) - \chi_{\mathcal{M}_1}(t) + \chi_{\mathcal{M}_2}(t)| \ge \varepsilon\} < \delta;$$

$$c) \qquad \max_N \left| \sum_{j=M+1}^{N} c_{\lambda(j)} \cos(2\pi\lambda(j)t + \alpha_{\lambda(j)}) \right| \le 64.$$

Доказательство. Пусть $0 < \varepsilon,\ \delta < 1/2$, $\Delta = (a,b) \subset [0,1]$. Положим

$$V_\Delta^{(\delta)}(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t \in [0,a] \cup [b,1]; \\ 1, & \text{если } t \in [a+\delta(b-a), b-\delta(b-a)]; \\ \text{линейна на отрезках} & [a, a+\delta(b-a)] \text{ и } [b-\delta(b-a), b]. \end{cases} \tag{1}$$

Обозначим

$$v^{(\delta)}(t) = V_{(0,1/2)}^{(\delta)}(t) - V_{(1/2,1)}^{(\delta)}(t). \tag{2}$$

Ясно, что

$$\int_0^1 v^{(\delta)}(t)\,dt = 0. \tag{3}$$

Пусть $\mathcal{M}$ состоит из непересекающихся двоичных отрезков $\{\Delta_1, ..., \Delta_k\}$ и Δ – один из этих отрезков. Из (1) и (2) следует, что $V_\Delta^{(\delta/8)}(t)$ и $v^{(\delta/8)}(t)$ – абсолютно непрерывные функции. Поэтому

$$S_n(t, V_\Delta^{(\delta/8)}) \Rightarrow V_\Delta^{(\delta/8)}(t), \quad S_n(t, v^{(\delta/8)}) \Rightarrow v^{(\delta/8)}, \quad \text{прич } n \to \infty, \tag{4}$$

$$||S_n(t, V_\Delta^{(\delta/8)})||_\infty \le 2\mathbf{Var}(V_\Delta^{(\delta/8)} \le 1, \tag{5}$$

$$||S_n(t, v^{(\delta/8)})||_\infty \le 2\mathbf{Var}(v^{(\delta/8)} \le 8. \tag{6}$$

Из (4) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ и натурального k существует натуральное число n_0 такое, что

$$||S_{n_0}(t, v^{(\delta/8)}) - v^{(\delta/8)}(t)||_\infty \le \frac{\varepsilon}{k}, \tag{7}$$

$$||S_{n_0}(t, V_\Delta^{(\delta/8)}) - V_\Delta^{(\delta/8)}(t)||_\infty \le \frac{\varepsilon}{k}. \tag{8}$$

Для натурального M_Δ возьмем m так, чтобы

$$2^m - 2n_0 > M_\Delta, \tag{9}$$

и определим $M'_\Delta = 2^m n_0 + n_0$. Пусть

$$S_{n_0}(t, V_\Delta^{(\delta/8)}) = \sum_{j=0}^{n_0} c'_j \cos(2\pi jt + \alpha'_j),$$

$$S_{n_0}(t, v^{(\delta/8)}) = \sum_{j=1}^{n_0} c''_j \cos(2\pi jt + \alpha''_j).$$

Рассмотрим полином

$$P_\Delta(t) = S_{n_0}(t, V_\Delta^{(\delta/8)}) \cdot S_{n_0}(2^m t, v^{(\delta/8)}) = \sum_{j=M_\Delta+1}^{M'_\Delta} c_j \cos(2\pi jt + \alpha_j) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n_0} \sum_{p=0}^{n_0} c''_j \cos(2^{m+1} j\pi t + \alpha''_j) c'_p \cos(2\pi pt + \alpha'_p) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n_0} \sum_{p=0}^{n_0} \frac{c''_j c'_p}{2} [\cos(2\pi(2^m j - p)t + \alpha''_j - \alpha'_p) - \cos(2\pi(2^m j + p)t + \alpha''_j + \alpha'_p)]. \quad (10)$$

Из (9) следует, что последнее равенство представляет перестановку ряда Фурье полинома $P_\Delta(t)$ и эта перестановка действует из $(M_\Delta, M'_\Delta]$ в $(M_\Delta, M'_\Delta]$. Учитывая (5), (6) и (10), получаем

$$\max_{N \le M'_\Delta} \left\| \sum_{j=M_\Delta+1}^{N} c_{\lambda(j)} \cos(2\pi\lambda(j)t + \alpha_{\lambda(j)}) \right\|_\infty \le 64. \quad (11)$$

Обозначим

$$\mathcal{M}_\Delta^+ = \{t \in \Delta : v^{(\delta/8)}(2^m t) \ge 0\}, \quad \mathcal{M}_\Delta^- = \{t \in \Delta : v^{(\delta/8)}(2^m t) < 0\}. \quad (12)$$

Ясно, что $\mathcal{M}_\Delta^+$ и $\mathcal{M}_\Delta^-$ состоят из двоичных отрезков и

$$\operatorname{mes} \mathcal{M}_\Delta^+ = \operatorname{mes} \mathcal{M}_\Delta^-, \quad \mathcal{M}_\Delta^+ \cup \mathcal{M}_\Delta^- = \Delta. \quad (13)$$

Определим $\{M_{\Delta_i}, M'_{\Delta_i}\}_{i=1}^k$ так, чтобы $M_{\Delta_i} > M$ и $(M_{\Delta_i}, M'_{\Delta_i}] \cap (M_{\Delta_j}, M'_{\Delta_j}] = \emptyset$ при $i \ne j$. Обозначим через $P(t)$ тригонометрический полином

$$P(t) = \sum_{i=1}^{k} P_{\Delta_i}(t).$$

Из (7) и (8) следует, что

$$|P(t)| \le \frac{\varepsilon^2}{k^2} \cdot k \le \varepsilon, \quad t \in [0,1] \setminus \mathcal{M}. \quad (14)$$

Из (1), (2), (7), (8) и (12) имеем

$$\text{mes}\,\{t: \quad |P(t) - \chi_{\mathcal{M}_1}(t) + \chi_{\mathcal{M}_2}(t)| \le \varepsilon\} < \delta, \tag{15}$$

где

$$\mathcal{M}_1 = \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{M}^+_{\Delta_i}, \quad \mathcal{M}_2 = \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{M}^-_{\Delta_i}. \tag{16}$$

Из (13) следует, что $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ состоят из двоичных отрезков и

$$\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2 = \emptyset, \quad \mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2, \quad \text{mes}\,\mathcal{M}_1 = \text{mes}\,\mathcal{M}_2. \tag{17}$$

Для любого отрезка $(M_{\Delta_i}, M'_{\Delta_i}]$ определим перестановку λ так, чтобы (11) имело бы место для $\Delta = \Delta_i$. Получаем

$$\max_N \left\| \sum_{j=M+1}^{N} c_{\lambda(j)} \cos(2\pi\lambda(j)t + \alpha_{\lambda(j)}) \right\|_\infty \le 64. \tag{18}$$

Из (15) – (18) следует доказательство Леммы 2.

Обозначим через X либо $C[0,1]$, либо $L^p(0,1)$, $1 \le p < \infty$. Пусть $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ – базис в пространстве X и $\{d\mu_n\}_{n=1}^\infty$ – ее сопряженная система.

Лемма 3. *Пусть $\varepsilon_n \downarrow 0$ – последовательность положительных чисел, тогда существуют последовательности натуральных чисел $\{M_n\}_{n=0}^\infty$ и $\{R_n\}_{n=0}^\infty$, система типа Хаара $\{\widetilde{\chi}_n\}_{n=1}^\infty$, тригонометрические полиномы $P_n(t)$ и перестановка λ натуральных чисел со свойствами :*

1) $$P_n(t) = \sum_{j=M_{n-1}+1}^{M_n} c_j \cos(2\pi jt + \alpha_j),$$

$$\max_{M_{n-1} < M \le M_n} \left\| \sum_{j=M_{n-1}+1}^{M} c_{\lambda(j)} \cos(2\pi\lambda(j)t + \alpha_{\lambda(j)}) \right\|_\infty \le 64\|P\|_\infty,$$

$$\{\lambda(M_{n-1}+1), \lambda(M_{n-1}+2), \ldots, \lambda(M_n)\} = \{M_{n-1}+1, M_{n-1}+2, \ldots, M_n\};$$

2) $$\|P_n\|_\infty \le 2\|\widetilde{\chi}_n\|_\infty, \qquad |P_n(t)| \le \varepsilon_n \quad \textit{при } t \in \bigcup_{j=1}^{n-1} U_j,$$

$$\textit{где} \quad U_j = \{t: |P_j(t) - \widetilde{\chi}_j(t)| \ge \varepsilon_j\}, \qquad \textit{mes}\left(\bigcup_{j=1}^{n} U_j\right) \le \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j;$$

3) $$\left\| \delta_{n,j} P_n - \sum_{i=R_{j-1}+1}^{R_j} \varphi_i \langle P_n, d\mu_i \rangle \right\|_X \le \varepsilon_n \varepsilon_j$$

для любых натуральных чисел n и j.

Доказательство. В случае $X = L^p$ $(1 \le p < \infty)$ доказательство простое. Поэтому мы докажем лемму, когда $X = C[0,1]$. Построим последовательности $\{M_n\}$, $\{R_n\}$, $\{P_n(t)\}$ и $\{\widetilde{\chi}_n(t)\}$ по индукции. Возьмем

$$M_0 = -1, \quad M_1 = 1, \quad P(t) \equiv 1, \quad \widetilde{\chi}_1(t) \equiv 1, \quad R_0 = 0.$$

Выберем R_1 так, чтобы

$$\left\| P_1 - \sum_{i=1}^{R_1} \varphi_i \langle P_1, d\mu_i \rangle \right\|_\infty \le \varepsilon_1,$$

$$\left\| \sum_{i=l}^{\infty} \varphi_i \langle P_1, d\mu_i \rangle \right\|_\infty \le \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{4}, \quad \text{для любых } l > R_1.$$

Предположим, что мы уже построили перестановку λ, $\{M_k\}_{k=1}^{n-1}$, $\{R_k\}_{k=1}^{n-1}$, $\{P_k(t)\}_{k=1}^{n-1}$ и $\{\widetilde{\chi}_k(t)\}_{k=1}^{n-1}$ со свойствами 1 и 2 Леммы 3. Потребуем также, чтобы

$$\left\| \sum_{i=l}^{\infty} \varphi_i \langle P_1, d\mu_i \rangle \right\|_\infty \le \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{4}, \quad \text{для любых } l > R_{n-1}, \quad 1 \le k < n.$$

Мы можем предположить, что интервалы постоянства функций $\{\widetilde{\chi}_k(t)\}_{k=1}^{n-1}$ являются объединением конечного числа двоичных отрезков. Меры μ_i представляются следующим образом : $d\mu_i(t) = q_i(t) + d\widetilde{\mu}_i(t)$, где $q_i \in L^1(0,1)$ и $\widetilde{\mu}_i$ – сингулярные меры. Существует множество $\Omega \subset [0,1]$, $\mathrm{mes}\Omega = 0$ такое, что

$$|\mu_i|([0,1] \setminus \Omega) = 0 \quad \text{для любых } i \in N, \tag{19}$$

где мера $|\mu_i|$ вариация меры μ_i.

Пусть $n = 2^p + s$, $1 \le s \le 2^p$. Возьмем множество $E_p^{(s)}$. Оно состоит из конечного числа двоичных отрезков. Из (19) следует, что существует множество $\mathcal{M}$, состоящее из конечного числа двоичных отрезков, для которого имеем

$$\mathcal{M} \subset E_p^{(s)} \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} U_i, \qquad |\mu_i|(\mathcal{M}) < \delta, \tag{20}$$

$$\mathrm{mes}\left(E_p^{(s)} \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} U_i \right) < \mathrm{mes}\, \mathcal{M} + \frac{\varepsilon_n}{2}, \quad i = 1, \dots, n-1, \tag{21}$$

где

$$\delta = \frac{\varepsilon_n^2}{4 \sum_{i=1}^{R_{n-1}} \|\varphi_i\|_\infty \|P_n\|_\infty}. \tag{22}$$

Выберем полиномы $\{\widetilde{q}_i\}_{i=1}^{R_{n-1}}$ так, чтобы

$$\|\widetilde{q}_i - q_i\|_1 \le \varepsilon, \quad \text{где} \quad \varepsilon = \frac{\varepsilon_n^2}{4\sum\limits_{i=1}^{R_{n-1}} \|\varphi_i\|_\infty(\|P_n\|_\infty + \|\widetilde{\mu}_i\|)}, \quad i = 1, 2, \dots R_{n-1}. \tag{23}$$

Возьмем

$$M > \max\{M_{n-1},\ \deg \widetilde{q}_i, \quad i = 1, 2, \dots, R_{n-1}\}. \tag{24}$$

Используя Лемму 2 получаем, что существуют множества $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$, состоящие из двоичных интервалов, полином

$$P_n(t) = \sum_{j=M+1}^{M'} c_j \cos(2\pi jt + \alpha_j),$$

и перестановка λ натуральных чисел $\{M+1, M+2, \dots, M'\}$ со свойствами

a) $\quad |P_n(t)| \le \varepsilon, \quad$ для любых $t \in [0,1] \setminus \mathcal{M}$,

b) $\quad \operatorname{mes}\{t : |P_n(t) - \sqrt{2^p}(\chi_{\mathcal{M}_1}(t) - \chi_{\mathcal{M}_2}(t))| \ge \varepsilon\} < \delta$,

c) $\quad \max\limits_{M<N\le M'} \left| \sum\limits_{j=M+1}^{N} c_{\lambda(j)} \cos(2\pi\lambda(j)t + \alpha_{\lambda(j)}) \right| \le 64\sqrt{2^p}$.

Оценим

$$\begin{aligned} A(t) &= \sum_{i=1}^{R_{n-1}} |\varphi_i(t)\langle P_n, d\mu_i\rangle| = \\ &= \sum_{i=1}^{R_{n-1}} |\varphi_i(t)\langle P_n, \widetilde{q}_i\rangle + \varphi_i(t)\langle P_n, q_i - \widetilde{q}_i\rangle + \varphi_i(t)\langle P_n, d\widetilde{\mu}_i\rangle| \le \\ &\le A_1(t) + A_2(t) + A_3(t), \end{aligned}$$

где

$$A_1(t) = \sum_{i=1}^{R_{n-1}} |\varphi_i(t)\langle P_n, \widetilde{q}_i\rangle|, \qquad A_2(t) = \sum_{i=1}^{R_{n-1}} |\varphi_i(t)\langle P_n, q_i - \widetilde{q}_i\rangle|,$$

$$A_3(t) = \sum_{i=1}^{R_{n-1}} |\varphi_i(t)\langle P_n, d\widetilde{\mu}_i\rangle|.$$

Согласно (24), $A_1(t) \equiv 0$. Из (23) имеем

$$A_2(t) \le \sum_{i=1}^{R_{n-1}} \|\varphi_i\|_\infty \|P_n\|_\infty \|q_i\widetilde{q}_i\|_1 \le \varepsilon \sum_{i=1}^{R_{n-1}} \|\varphi_i\|_\infty \|P_n\|_\infty \le \frac{\varepsilon_n^2}{2}.$$

Согласно (22), a) и b)

$$\begin{aligned} |A_3(t)| &\le \sum_{i=1}^{R_{n-1}} \|\varphi_i\|_\infty \left| \int_{\mathcal{M}} P_n\, d\widetilde{\mu}_i \right| + \sum_{i=1}^{R_{n-1}} \|\varphi_i\|_\infty \left| \int_{[0,1]\setminus\mathcal{M}} P_n\, d\widetilde{\mu}_i \right| \le \\ &\le \delta \sum_{i=1}^{R_{n-1}} \|\varphi_i\|_\infty + \sum_{i=1}^{R_{n-1}} \|\varphi_i\|_\infty \varepsilon \|\widetilde{\mu}_i\|. \end{aligned}$$

Имеем

$$\left\| \delta_{n,j} P_n - \sum_{i=R_{j-1}+1}^{R_j} \varphi_i(P_n, d\mu_i) \right\|_\infty \le \varepsilon_n \varepsilon_j, \quad 1 \le j \le n-1.$$

Так как $\{\varphi_n\}$ - базис, получаем, что существует R_n такое, что

$$\left\| P_k - \sum_{i=R_{j-1}+1}^{R_j} \varphi_i(P_k, d\mu_i) \right\|_\infty \le \varepsilon_n \varepsilon_k, \quad 1 \le k \le n,$$

$$\left\| \sum_{i=l+1}^{\infty} \varphi_i(P_k, d\mu_i) \right\|_\infty \le \frac{\varepsilon_{n+1}\varepsilon_k}{2}, \quad 1 \le k \le n, \quad \text{для любых } l > R_j.$$

Пусть $M_n = M'$, а перестановка λ представляет $(M_{n-1}, M_n]$ таким образом, чтобы имело место b) . Определим $\widetilde{\chi}_n(t)$, Разобьем множество $E_p^{(s)} \setminus M$ на два подмножества M_3, M_4 одинаковой меры, состоящие из двоичных отрезков. Определим

$$E_{p+1}^{(2s-1)} = M_1 \cup M_3, \quad E_{p+1}^{(2s)} = M_2 \cup M_4.$$

Этот шаг индукции доказывает Лемму 3.

§4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ 1, 2

Доказательство Теоремы 1. Для последовательности $\varepsilon_n = 4^{-n}$ построим полиномы $P_n(t)$ как в Лемме 3 и рассмотрим функцию

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n P_n(t),$$

где $\{a_n\}$ - та же последовательность, что и в Следствии 1. Докажем, что ряд $\sum_{n=1}^{N} a_n P_n(t)$ равномерно сходится к $f(t)$. Оценим

$$\left\| \sum_{n=N'+1}^{N''} a_n P_n \right\|_\infty$$

Обозначим

$$\widetilde{U}_j = U_j \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} U_i, \quad \widetilde{U}_\infty = [0,1] \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i.$$

Если $t \in \widetilde{U}_j$, то

$$\left| \sum_{n=N'+1}^{N''} a_n P_n(t) \right| \le \left| \sum_{n=N'+1}^{j-1} [a_n P_n(t) - a_n \widetilde{\chi}_n(t) + a_n \widetilde{\chi}_n(t)] \right| +$$

$$+|a_j P_j(t)| + \left|\sum_{n=j+1}^{N''} a_n P_n(t)\right| \le \sum_{n=N'+1}^{j-1} \varepsilon_n +$$

$$+\left|\sum_{n=N'+1}^{j-1} a_n \widetilde{\chi}_n(t)\right| + \sum_{n=j+1}^{N''} \varepsilon_n \le \max_{N>N'} \left\|\sum_{n=N'+1}^{N} a_n \widetilde{\chi}_n(t)\right\|_\infty + \sum_{n=N'+1}^{\infty} \frac{1}{4^n}.$$

При $t \in \widetilde{U}_\infty$, имеем

$$\left|\sum_{N'}^{N''} a_n P_n(t)\right| \le \left|\sum_{n=N'+1}^{N''} a_n \widetilde{\chi}_n(t)\right| + \sum_{n=N'+1}^{\infty} \frac{1}{4^n}.$$

Так как $\sum a_n \widetilde{\chi}_n(t)$ сходится равномерно, то ряд $\sum a_n P_n$ также сходится равномерно к $f(x)$.

Докажем, что на множестве $\widetilde{U}_\infty$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} P_{\sigma(n)}(t)$ расходится почти всюду. В самом деле, при $t \in \widetilde{U}_\infty$ получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_{\sigma(n)}(\widetilde{\chi}_{\sigma(n)}(t) - P_{\sigma(n)}(t))| \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{3}.$$

Так как $\sum a_{\sigma(n)} \widetilde{\chi}_{\sigma(n)}$ расходится почти всюду, то расходится почти всюду и ряд $\sum a_{\sigma(n)} P_{\sigma(n)}(t)$. Докажем, что

$$\sup_N \left\|\sum_{n=1}^{N} a_{\sigma(n)} P_{\sigma(n)}(t)\right\|_\infty < \infty. \tag{25}$$

Так как

$$\sum_{n=N_{m-1}+1}^{N_m} |a_n P_n(t)| \le \sum_{n=N_{m-1}+1}^{N_m} |a_n \widetilde{\chi}_n(t)| + \sum_{n=N_{m-1}+1}^{N_m} \varepsilon_n \le 2,$$

то получаем (25). Переставляя полиномы P_n по перестановке λ, получаем, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} \sum_{j=N_{\sigma(n)-1}+1}^{N_{\sigma(n)}} c_{\lambda(j)} \cos(2\pi\lambda(j)t + \alpha_{\lambda(j)}) \tag{26}$$

расходится на множестве $\widetilde{U}_\infty$ почти всюду и

$$\sup_N \left\|\sum_{n=1}^{N} c_{\sigma(n)} \cos[2\pi\sigma(n)t + \alpha_{\sigma(n)}]\right\|_\infty < \infty.$$

Теорема 1 для тригонометрической системы доказана.

Для базисов $C[0,1]$ ряд $\sum a_n P_n(t)$ заменим рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \widetilde{P}_n, \quad \text{где} \quad \widetilde{P}_n = \sum_{i=R_{n-1}+1}^{R_n} \varphi_i(P_n, d\mu_i). \tag{27}$$

Из пункта 3) Леммы 3 следует, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} ||a_n P_n - a_n \widetilde{P}_n||_\infty < \infty,$$

поэтому $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} \widetilde{P}_{\sigma(n)}$ расходится почти всюду и

$$\sup_N \left\| \sum_{n=1}^{N} a_{\sigma(n)} \widetilde{P}_{\sigma(n)} \right\|_\infty < \infty.$$

Так как φ_n - базис пространства $C[0,1]$, то существует $B > 0$ такое, что

$$\sup_{N \le R_n} \left\| \sum_{i=R_{n-1}+1}^{N} \varphi_i \langle \widetilde{P}_n, \varphi_i \rangle \right\|_\infty \le B ||\widetilde{P}_n||_\infty.$$

Поэтому ряд (27) удовлетворяет условию Теоремы 1. Теорема 1 доказана.

Доказательство Теоремы 2. Для ПОНС $\{\varphi_n\}$, применяя Лемму 3, получим многочлены P_n. Так же как при доказательстве Теоремы 1 составим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n P_n, \tag{28}$$

где $\{a_n\}$ – та же самая последовательность, что и в Следствии 1. Поступая так же как при доказательстве Теоремы 1, мы можем доказать, что ряд (28) равномерно сходится к некоторой функции $f(t)$ и

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} P_{\sigma(n)}(t) \tag{29}$$

расходится почти всюду и его частичные суммы равномерно ограничены. Наша цель показать, что ряд Фурье функции $f(t)$ искомый, т.е. существует перестановка τ натурального ряда такая, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\tau(n)}(f) \varphi_{\tau(n)} \tag{30}$$

расходится почти всюду и для его мажоранты имеем

$$||S_\tau^*(f, \{\varphi_n\})||_2 < \infty.$$

Переставим ряд Фурье функции $f(t)$ следующим образом :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=R_{\sigma(n)-1}+1}^{R_{\sigma(n)}} \varphi_{\tau(i)} \langle f, \varphi_{\tau(i)} \rangle, \tag{31}$$

где $\tau([R_{\sigma(n)-1}+1, R_{\sigma(n)}]) = [R_{\sigma(n)-1}+1, R_{\sigma(n)}]$, получаем

$$||S_\tau^*(\widetilde{P}_{\sigma(n)})||_2 = \left\| \max_{N \le R_{\sigma(n)}} \left| \sum_{i=R_{\sigma(n)-1}}^{N} \varphi_{\tau(i)}(t)\langle f, \varphi_{\tau(i)}\rangle \right| \right\|_2 \le$$

$$\le C \left(\sum_{i=R_{\sigma(n)-1}+1}^{R_{\sigma(n)}} |\langle f, \varphi_i\rangle|^2 \right)^{1/2} \tag{32}$$

(следует из теоремы Гарсиа). Здесь

$$\widetilde{P}_n = \sum_{i=R_{n-1}+1}^{R_n} \varphi_i \langle f, \varphi_i\rangle.$$

Докажем, что перестановка τ искомая. Оценим

$$||\widetilde{P}_n - a_n P_n||_2 = \left\| \sum_{i=R_{n-1}+1}^{R_n} \varphi_i \langle \sum_{j=1}^{\infty} a_j P_j, \varphi_i\rangle - a_n P_n \right\|_2 =$$

$$= \left\| \sum_{j=1}^{\infty} a_j \sum_{i=R_{n-1}+1}^{R_n} \varphi_i \langle P_j, \varphi_i\rangle - a_n P_n \right\|_2 \le$$

$$\le \sum_{j=1, j\ne n}^{\infty} |a_j| \left\| \sum_{i=R_{n-1}+1}^{R_n} \varphi_i \langle P_j, \varphi_i\rangle \right\|_2 + \left\| a_n \sum_{i=R_{n-1}+1}^{R_n} \varphi_i \langle P_n, \varphi_i\rangle - a_n P_n \right\|_2$$

Используя пункт 3) Леммы 3 получаем

$$||\widetilde{P}_n - a_n P_n||_2 \le \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_n \varepsilon_j \le \varepsilon_n.$$

Поэтому

$$\sum_{n=1}^{\infty} ||\widetilde{P}_n - a_n P_n||_2 < 1. \tag{33}$$

Следовательно, $\sum(\widetilde{P}_n - a_n P_n)$ сходится безусловно почти всюду. Поэтому ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{P}_{\sigma(n)}$ расходится почти всюду, так как расходится почти всюду ряд (29).

Оценим мажоранту частичных сумм ряда (31) :

$$S_\tau^*(f) = \sup_N \left| \sum_{n=1}^{N} \widetilde{P}_{\sigma(n)} \right| + \sup_n S_\tau^*(P_{\sigma(n)}) \le$$

$$\le \sup_N \left| \sum_{n=1}^{N} a_{\sigma(n)} P_{\sigma(n)} \right| + \sum_{n=1}^{\infty} |\widetilde{P}_{\sigma(n)} - a_{\sigma(n)} P_{\sigma(n)}| + \left[\sum_{n=1}^{\infty} (S_\tau^*(P_{\sigma(n)}))^2 \right]^{1/2}$$

Используя (29), (33) и (32), получаем

$$||S_\tau^*(f)||_2 \le D + 1 + \left[\int_\Pi^1 \sum_{n=1}^{\infty} S_\tau^*(P_{\sigma(n)}(t))^2\, dt\right]^{1/2} \le$$

$$\le D + 1 + \left(\sum_{n=1}^{\infty} C \sum_{i=R_{\sigma(n)-1}+1}^{R_{\sigma(n)}} |\langle f, \varphi_i\rangle|^2\right)^{1/2},$$

а последние разложение, согласно равенству Парсеваля равно $D + 1 + C||f||_2$. Заключаем, что $||S_\tau^*(f)||_2$ конечна. Теорема 2 доказана.

ABSTRACT. The paper proves, that the trigonometric system (or any basis of continuous functions space) has a rearrangement by which almost everywhere divergent series exists with uniformly bounded sequence of partial sums. It is shown also, that for every complete orthonormal system a rearrangement exists, by which an almost everywhere divergent series with square integrable maximal function of partial sums can be written.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Колмогоров, Избранные Труды, М., Наука, 1985.
2. Z. Zahorski, "Une serie de Fourier permutee d'une function de classe L^2 divergente presque partout," C.r. Acad. sci. Paris, vol. 251, pp. 501 – 503, 1960.
3. П. Л. Ульянов, "А. Н. Колмогоров и расходящиеся ряды Фурье", Успехи мат. наук, т. 38, №4(232), стр. 51 – 90, 1983.
4. A. M. Olevski, Fourier Series with Respect to General Orthogonal System, Springer-Verlag, B, H, NY, 1975.
5. Б. С. Кашин, А. А. Саакян, Ортогональные Ряды, М., Наука, 1984.
6. С. Ш. Галстян, "О перестановках рядов Фурье", Всесоюзная школа по теории функций, Тезисы докладов, Ереван, 1987.

9 Ноября 1993

Ереванский государственный университет