НЕРАВЕНСТВА ТИПА БЕРНШТЕЙНА ДЛЯ ПРОИЗВОДНЫХ МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ И ПРИБЛИЖЕНИЕ МЕРОМОРФНЫМИ ФУНКЦИЯМИ НА ВЕЩЕСТВЕННОЙ ОСИ

Р. А. Аветисян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 28, №6, 1993

В работе получены некоторые оценки для мероморфных функций, не имеющих полюсов на вещественной оси. Описаны классы функций, определенных на вещественной оси, которые обобщают классы Бесова.

§0. ВВЕДЕНИЕ

Изучение наилучших приближений мероморфными функциями началось два десятилетия тому назад. Равномерное приближение мероморфными функциями, голоморфными в угловых областях и эволюция их веса, были исследованы в [1] [2]. Проблема относится как к теории приближений, так и и теории распределений значений обобщенных функций. Первые результаты, связанные с наилучшими равномерными приближениями на $\mathbb{R}$, получены в работе [3]. В работе [3] рассмотрены мероморфные функции, не имеющие полюсов в некоторой угловой области, содержащей вещественную ось.

В настоящей работе рассмотрены задачи наилучшего приближения мероморфными функциями с дополнительными ограничениями на расположение их полюсов.

Наша основная цель - получить неравенства типа Бернштейна для мероморфных функций, не имеющих полюсов на вещественной оси. Мы также дадим описания новых классов функций, определенных на вещественной оси, обобщающих классы Бесова B_p^α. Эти результаты являются мероморфными аналогами наилучших приближений рациональными и целыми функциями [4 – 18].

Наши результаты основаны на теории рациональных приближений и и в этом отношении похожи на работу [19]. В доказательствах применяются методы и идеи, развитые в работах [16 – 18]. Мы также используем эквивалентность различных определений пространств Бесова, полученную в работах [20], [21].

Работа состоит из двух параграфов. В первом параграфе формулируются основные результаты. Во втором – приводятся их доказательства и вспомогательные предложения.

§1. ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТОВ

Для формулировки основных результатов нам необходимы следующие обозначения и определения.

Пусть γ – локально спрямляемая кривая в комплексной плоскости. Обозначим через $L_p(\gamma)$, $p \in (0, \infty]$ множество функций, измеримых на γ, для которых $||f||_{p,\gamma} < +\infty$. Полагаем,что

$$||f||_{p,\gamma} = \left(\int_\gamma |f(z)|^p \, |dz| \right)^{1/p}, \quad p \neq \infty,$$

$$||f||_{\infty,\gamma} = \operatorname*{ess\,sup}_{z\in\gamma} |f(z)|, \quad p = \infty.$$

Если $\gamma = (-\infty, \infty)$, то положим $||f||_{p,\gamma} = ||f||_p$, а если $\gamma = (-R, R)$, $0 < R < +\infty$, то $||f||_{p,\gamma} = ||f||_{p,R}$.

Мы используем обычное обозначение теории Неванлинны [22]. В частности, через $T(r, f)$ обозначаем характеристику Неванлинны для функции f – мероморфной в $\mathbf{C}$, $n(r, f) = n(r, \infty, f)$ – число ее полюсов в диске $|z| \leq r$ с учетом кратностей, и

$$m(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ \left| f(re^{i\varphi}) \right| d\varphi.$$

Для открытого множества $\Omega \subset \mathbf{C}$ функции, голоморфные (мероморфные) в $\overline{\Omega}$, обозначим через $A(\Omega)(M(\overline{\Omega}))$.

Через D_R, Π_+, Π_- обозначим, соответственно, диск $|z| < R$, полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ и полуплоскость $\operatorname{Im} z < 0$.

Теперь мы можем сформулировать Теорему 1 о мероморфных аналогах хорошо известного неравенства Бернштейна для производных целых функций экспоненциального типа [4 – 6]. Доказательство этой теоремы основано на идеях работ

[10], [18].

Теорема 1. *Пусть* $f \in M(\overline{D}_{\theta R})$, $\theta > 1$, $0 < R < \infty$, $\|f\|_{\infty,\theta R} < +\infty$ *и* $z_1, z_2, \ldots, z_n$ *– полюсы функции* f *в* $\overline{D}_{\theta R}$. *Если* $\theta_0 > 0$, $a > 0$, *такие, что* $1 < \theta_0 < \theta$, $a \le R\sqrt{\theta_0^2 - 1}$, *то*

$$|f'(x)| \le C_1 \|f\|_{\infty,\theta R} \left[\frac{1}{a} + \sum_{k=1}^{n} \frac{|Imz_k|}{|z_k - x|^2}\right] \exp\left[c_2 \frac{a}{R}\left(m(\theta R, f) + \ln^+ \|f\|_{\infty,\theta R}^{-1}\right)\right],$$
$$x \in (-R, R), \tag{1}$$

где $C_i = C_i(\theta, \theta_0)$, $i = 1, 2$.

Теорема 2. *Пусть* $f \in M(\overline{D}_{\theta R})$, $\theta > 1$, $0 < R < \infty$, $p \in (1, \infty]$, $m \in N$, $f \in L_{p,\theta R}$, $s = (m + p^{-1})^{-1}$. *Если* $1 < \theta_0 < \theta$, $0 < a \le R\sqrt{\theta_0^2 - 1}$, *то*

$$\|f^{(m)}\|_{s,R} \le C_3 \left(1 + \frac{a}{R^{1-1/p}}\right) \left(n^m(\theta R, f) + \left(\frac{R}{a}\right)^m\right) \times$$
$$\times \|f\|_{p,\theta R} \exp\left[c_4 \frac{a}{R}\left(m(\theta R, f) + \ln^+ \|f\|_{p,\theta R}^{-1}\right)\right], \tag{2}$$

где $C_i = C_i(\theta, \theta_0, m, p)$, $i = 3, 4$.

Через $C_1(\alpha, \beta \ldots)$, $C_2(\theta, \theta_0 \ldots)$ обозначим положительные числа без повторений, зависящие только от $\alpha, \beta, \theta, \theta_0, \ldots$.

Теперь перейдем к оценкам производных мероморфных функций из классов Бесова B_p^α. При этом важно, что мы можем определять эти классы с помощью приближенного модуля гладкости Брудного [23]. Хорошо известно, [23], [21], что в случае окружности или интервала это определение эквивалентно стандартному. Для формулировки этих результатов нам понадобятся нижеследующие определения.

Пусть γ – простая спрямляемая липшицева кривая в комплексной плоскости (замкнутая или открытая).

Для функции $f \in L_p(\gamma)$ и арки $I \subset \gamma$ обозначим через $E_m(f, I)$ наилучшее приближение функции f на множестве I посредством аналитических полиномов степени m, $m = 0, 1, \ldots$.

Пусть $\delta > 0$, $\gamma = \cup I_k$, где I_k – неперекрывающиеся арки и $\delta/2 \le |I_k| \le \delta$. Для $f \in L_p(\gamma)$, $p \in (0, \infty]$ положим

$$\omega_m(f, \delta)_p = \sup\left\{\sum_k E_m(f, I_k)_p^p\right\}^{1/p}, \quad p \ne \infty,$$

$$\omega_m(f,\delta)_\infty = \sup \sum_k E_m(f, I_k)_\infty, \quad p = \infty,$$

где sup берется по всем представлениям кривой γ, как и выше. Если $f \in L_1(\gamma)$, то положим [21]

$$\Omega_m(f,\delta)_p = \sup \left\{ \sum_k E_m(f, I_k)_1^p \, \delta^{1-p} \right\}^{1/p},$$

где sup берется по всем представлениям кривой γ.

Пусть $0 < p \le \infty$, $\alpha > \frac{1}{p} - 1$, $m = [\alpha] + 1$. Обозначим через B_p^α множество функций $f \in L_p(\gamma)$ с конечной квазинормой

$$||f||_{B_p^\alpha(\gamma)} = ||f||_{L_p(\gamma)} + \left(\int_0^\infty \left(\frac{\omega_m(f,\delta)_p}{\delta^\alpha} \right)^p \frac{d\delta}{\delta} \right)^{1/p}, \quad p \ne \infty,$$

$$||f||_{B_\infty^\alpha(\gamma)} = ||f||_{L_\infty(\gamma)} + \frac{\sup_{\delta > 0} \omega_m(f,\delta)_\infty}{\delta^\alpha}, \quad p = \infty.$$

Если $\gamma = [-R, R]$, то положим $||f||_{B_p^\alpha(\gamma)} = ||f||_{B_p^\alpha(R)}$.

Теорема 3. *Пусть* $f \in M\left(\overline{D}_{\theta R}\right)$, $\theta > 1$, $0 < R < \infty$, $p \in (1,\infty]$, $\alpha > 0$, $s = (\alpha + p^{-1})^{-1}$. *Если* $f \in L_{p,\theta R}$, $1 < \theta_0 < \theta$, $0 < a \le R\sqrt{\theta_0^2 - 1}$, *то*

$$||f||_{B_s^\alpha(R)} \le C_5 \left(1 + \frac{a}{R^{1-1/p}}\right) \left(n(\theta R, f) + \frac{R}{a}\right)^\alpha \times$$
$$\times ||f||_{p,\theta R} \exp\left[c_6 \frac{a}{R} \left(m(\theta R, f) + \ln^+ ||f||_{p,\theta R}^{-1}\right)\right], \tag{3}$$

где $C_i = C_i(\alpha, p, \theta, \theta_0)$, $i = 5, 6$.

Теорема 3 подсказывает, как, используя мероморфные приближения, можно определить и описать некоторые классы функций, определенных на $\mathbb{R}$, которые обобщают пространства Бесова B_p^α.

Положим $f \in A_\sigma^\varepsilon$, $\varepsilon \ge 0$, $\sigma > 0$, если f мероморфная функция в комплексной плоскости и

$$T(r, f) \le \sigma(r+1)^{1+\varepsilon}, \quad r \ge 0.$$

Если $\varepsilon = 0$, то полагаем $A_\sigma^0 = A_\sigma$.

Пусть $f \in L_p$, $p \in (0,\infty]$; $\varepsilon \ge 0$, $\sigma > 0$. Наилучшее приближение к f в L_p функциями $f \in A_\sigma^\varepsilon$ обозначим через $a_\sigma^\varepsilon(f)$. Затем [24] введем аппроксимативное пространство $M_{p,q}^{\alpha}(\varepsilon)$ $(\alpha > 0,\ p, q \in (0, \infty])$ функций $f \in L_p$ с конечной квазинормой

$$\|f\|_{M_{p,q}^{\alpha}(\varepsilon)} = \|f\|_{L_p} + \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(2^{k\alpha} a_{2^k}^{\varepsilon}(f)_p\right)^q\right)^{1/q}, \quad q \neq \infty,$$

$$\|f\|_{M_{p,q}^{\alpha}(\varepsilon)} = \|f\|_{L_p} + \sup_k 2^{k\alpha} a_{2^k}^{\varepsilon}(f)_p, \quad q = \infty.$$

Если $\varepsilon = 0$, то полагаем $M_{p,q}^{\alpha}(0) = M_{p,q}^{\alpha}$.

Положим $f \in K_p^{\alpha}$, $\alpha > 0$, $p > 0$, если $f \in B_p^{\alpha}(R)$ для всех R, $0 < R < \infty$ и

$$\|f\|_{K_p^{\alpha}} = \sup_{R>0} \frac{\|f\|_{B_p^{\alpha}(R)}}{(R+1)^{\alpha}} < \infty.$$

Теперь мы можем сформулировать обратную и прямую теоремы о мероморфном приближении классов K_s^{α}.

Теорема 4. *Пусть $\alpha > 0$, $p \in (1, \infty)$, $s = (\alpha + p^{-1})^{-1}$, $\varepsilon > 0$. Тогда*

$$M_{p,s}^{\alpha} \subset K_s^{\alpha} \cap L_p, \tag{4}$$

$$M_{p,s}^{\alpha}(\varepsilon) \supset K_s^{\alpha} \cap L_p. \tag{5}$$

§2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ 1 – 4

Доказательства Теорем 1 – 4 основано на нескольких леммах. Для их доказательства нам необходимы некоторые обозначения :

$D_R^+ = D_R \cap \Pi^+$, $D_R^- = D_R \cap \Pi^-$; если $f \in M(\overline{D_R^+})$, положим

$$m^+(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \ln^+ |f(re^{i\varphi})|\, d\varphi, \quad r \le R.$$

Лемма 1. *Пусть $f \in A(\overline{D}_{\theta R}^+)$, $\theta > 1$, $R > 0$. Тогда*

$$|f(z)| \le C_1(\theta) \left[\int_{-\theta R}^{\theta R} |f(t)| \frac{Im\, z}{|z-t|^2}\, dt + \frac{Im\, z}{R}\right] \times$$

$$\times \cdot \exp\left[C_2(\theta) \frac{Im\, z}{R} m^+(\theta R, f)\right], \ z \in D_R^+. \tag{6}$$

Доказательство. Пусть $z = re^{i\varphi} \in D^+_{\theta R}$. Положим

$$\mu_1(z,t) = \frac{r\sin\varphi}{|z-t|^2} - \frac{(\theta R)^2 \sin\varphi}{|(\theta R)^2 - zt|^2}, \quad t \in (-\theta R, \theta R),$$

$$\mu_2(z,\varphi) = \frac{(\theta R)^2 - r^2}{|\theta R e^{i\psi} - z|^2} - \frac{(\theta R)^2 - r^2}{|\theta R e^{-i\psi} - z|^2}, \psi \in [0,\pi].$$

Из формулы Неванлинны [22] получаем, что при $z \in D^+_{\theta R}$

$$\ln|f(z)| \le \frac{1}{\pi}\int_{-\theta R}^{\theta R} \ln|f(t)|\,\mu_1(z,t)\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \ln|f(\theta R e^{i\psi})|\,\mu_2(z,\psi)\,d\psi. \qquad (7)$$

Имеют место неравенства

$$\mu_1(z,t) \le \frac{r\sin\varphi}{|z-t|^2}, \quad z \in D^+_{\theta R},$$

$$\mu_2(z,\psi) \le C_3(\theta)\,\frac{\operatorname{Im} z}{R}, \quad z \in D^+_R.$$

Следовательно, из (7) имеем

$$\ln|f(z)| \le \frac{1}{\pi}\int_{-\theta R}^{\theta R} \ln|f(t)|\,\mu_1(z,t)\,dt + C_3(\theta)\,\frac{\operatorname{Im} z}{R}\, m^+(\theta R, f), \quad z \in D^+_R. \qquad (8)$$

Учитывая, что

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\theta R}^{\theta R} \mu_1(z,t)\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \mu_2(z,\psi)\,d\psi = 1,$$

из (8) и неравенства Йенсена получаем неравенство (6) Леммы 1.

Лемма 2. *Пусть $f \in A(\overline{D}^+_{\theta R})$, $\theta > 1$, $\gamma = [z_1, z_2] \subset D^+_R$. Если $\operatorname{Re} z \ne const$ при $z \in \gamma$, $p \in (1,\infty]$, то*

$$\|f\|_p(\gamma) \le C_4(\theta,\beta)\left(1 + \frac{Im(z_1+z_2)}{R^{1-1/p}}\right)\|f\|_{p,\theta R}\times$$
$$\times \exp\left[C_5(\theta,\beta)\cdot \frac{Im(z_1+z_2)}{R}\left(m^+(\theta R, f) + \ln^+\|f\|^{-1}_{p,\theta R}\right)\right], \qquad (9)$$

где β — угол между $[z_1, z_2]$ и вещественной осью.

Доказательство. Если $p = \infty$, то Лемма 2 следует из Леммы 1. Пусть $p \in (1,\infty)$ и $\|f\|_{p,\theta R} = 1$. Положим

$$u(z) = \int_{-\theta R}^{\theta R} |f(t)|\,\frac{\operatorname{Im} z}{|z-t|^2}\,dt, \quad z \in \Pi^+,$$

$$u^*(x) = \sup\left\{u(s): \quad \zeta = \xi + i\eta \in \Pi^+, |\xi - x| \le \eta\right\}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Так как $p \in (1, \infty)$, то имеем [25]

$$\int_{-\infty}^{\infty} (u^*(x))^p \, dx \le C(p) \int_{-\theta R}^{\theta R} |f(t)|^p \, dt.$$

Так как, то при $z = x + iy \in [z_1, z_2]$

$$u(z) \le u^*(x), \quad |dz| \le \sqrt{2} |\tan \beta| \, dx$$

получаем

$$||u||_p(\gamma) \le C_1(\beta) \left(\int_{-\infty}^{\infty} (u^*(x))^p \, dx \right)^{1/p} \le C(p, \beta) \, ||f||_{p, \theta R}.$$

Из (6) следует утверждение (9) Леммы 2.

Доказательство Теоремы 1. Пусть θ_1 удовлетворяет неравенствам $\theta_0 < \theta_1 < < \theta$. Обозначим через γ_a^+ трапецию с вершинами $\zeta_1 = \theta_1 R$, $\zeta_2 = R\sqrt{\theta_1^2 - 1} + ia$, $\zeta_3 = -R\sqrt{\theta_1^2 - 1} + ia$, $\zeta_4 = -\theta_1 R$, и пусть $\gamma_a^- = \{z \in \mathbf{C} : \bar{z} \in \gamma_a^+\}$, $\gamma_a = \gamma_a^+ \cup \gamma_a^-$. Обозначим G_a область, ограниченная кривой γ_a, $G_a^+ = G_a \cap \Pi^+$, $G_a^- = G_a \cap \Pi^-$. Сначала рассмотрим случай, когда $f(z)$ не имеет полюсов в верхней полуплоскости. Если $z_1, z_2, ..., z_n$ являются полюсами функции $f(z)$, то положим

$$\Pi(z) = \prod_{k=1}^{n} \frac{z - \bar{z}_k}{z - z_k}. \tag{10}$$

Так как $f \in A(\overline{D_{\theta R}^+})$, , f/Π, $f/\Pi^2 \in \mathring{A}(\overline{D_{\theta R}^-})$ для любой ориентации кривых γ_a^+, γ_a^-, то по формуле Коши при $x \in (-R, R)$ получаем

$$f'(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\theta R}^{\theta R} \frac{f(t)}{(t - x)^2} \left(1 - \frac{\Pi(x)}{\Pi(t)} \right)^2 dt + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_a^+} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - x)^2} \, d\zeta +$$

$$+ \frac{\Pi(x)}{\pi i} \int_{\gamma_a^-} \frac{f(\zeta)}{\Pi(\zeta)} \frac{d\zeta}{(\zeta - x)^2} + \frac{\Pi^2(x)}{2\pi i} \int_{\gamma_a^-} \frac{f(\zeta)}{\Pi^2(\zeta)} \frac{d\zeta}{(\zeta - x)^2} = \sum_{j=1}^{4} g_j(x).$$

Так как $f \in A(\overline{D_{\theta R}^+})$, , f/Π, $f/\Pi^2 \in A(\overline{D_{\theta R}^-})$, то из (9) для $x \in (-R, R)$ получаем

$$|g_j(x)| \le C_4 \frac{||f||_{\infty, \theta R}}{a} \exp\left[C_5 \left(m^+(\theta R, f) + \ln^+ ||f||_{\infty, \theta R}^{-1} \right) \right], \quad j = 2, 3, 4.$$

Теперь оценим g_1. По формуле Коши при $z \in G_a^+$ имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\theta R}^{\theta R} \frac{(\Pi(t) - \Pi(z))^2}{\Pi(t) \, (t - z)^2} \, dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_a^+} \frac{\Pi(t)}{(t - z)^2} \, dt + \frac{\Pi(z)}{\pi i} \int_{\gamma_a^-} \frac{dt}{(t - z)^2} +$$

$$+ \frac{\Pi^2(z)}{2\pi i} \int_{\gamma_a^-} \frac{dt}{\Pi(t) \, (t - z)^2} + \frac{\Pi'(z)}{\Pi(z)}.$$

Следовательно

$$|g_1(x)| \le \frac{||f||_{\infty,\theta R}}{2\pi} \int_{-\theta R}^{\theta R} \frac{|\Pi(t) - \Pi(x)|^2}{|t-x|^2}\, dt =$$

$$= ||f||_{\infty,\theta R} \left| -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\theta R}^{\theta R} \frac{(\Pi(t) - \Pi(x))^2}{\Pi(t)(t-x)^2}\, dt \right| \le$$

$$\le ||f||_{\infty,\theta R} \left[|\Pi'(x)| + \frac{1}{\pi} \int_{\gamma_*} \frac{|d\zeta|}{|\zeta - x|^2} \right] \le$$

$$\le C_6 ||f||_{\infty,\theta R} \left[\frac{1}{a} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\operatorname{Im} z_k}{|z_k - x|^2} \right], \quad x \in (-R, R).$$

Теорема 1 доказана в случае, когда $f(z)$ не имеет полюсов в верхней полуплоскости. В общем случае, если $z_1, z_2, \dots, z_k$ являются полюсами $f(z)$ в верхней полуплоскости, рассмотрим функцию

$$f_1(z) = \frac{f(z)}{\Psi_R(z)},$$

где

$$\Psi_R(z) = \prod_{j=1}^{k} \frac{(\theta R)^2 - \overline{z}_j z}{\theta R(z_j - z)} \cdot \frac{\theta R(\overline{z}_j - z)}{(\theta R)^2 - z_j z}. \tag{11}$$

Имеем

$$|f'(x)| \le |f_1'(x)| + ||f||_{\infty,\theta R} |\Psi_R'(x)|, \quad x \in (-\theta R, \theta R).$$

Так как для функций f_1 и Ψ_R Теорема 1 уже была доказана, мы получаем утверждение (1) Теоремы 1.

Для доказательства Теоремы 2 нам понадобятся некоторые определения и Лемма 3 из [18].

Если $a_1, a_2, \dots, a_n$ принадлежат D_1, то положим

$$B_n(z) = \prod_{k=1}^{n} \frac{z - a_k}{1 - \overline{a}_k z}.$$

Пусть G — дополнение интервала $[-R, R]$, $\varphi_R(\zeta)$ — функция, которая является конформным отображением G на $\mathbf{C} / \overline{D}_1$. Если $z_1, z_2, \dots, z_n$ принадлежат G, то положим

$$a_k = \frac{1}{\overline{\varphi}_R(z_k)}, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

$$Q_\alpha(\eta, x) = |B_n(\varphi_R(\eta)) - B_n(\varphi_R(x))|^{1+\alpha} \times$$

$$\times |B_n(\varphi_R(\eta)) - B_n(\overline{\varphi}_R(x))|^{1+\alpha} \times |\eta - x|^{-(1+\alpha)},$$

где $\alpha > 0$, $\eta, x \in [-R, R]$.

Лемма 3. *([18]). Пусть* $\alpha > 0$, $p \in (1, \infty]$, $s = (\alpha + p^{-1})^{-1}$, $f \in L_{p,R}$. *Если*

$$g(x) = \int_{-R}^{R} f(\eta)\, Q_\alpha(\eta, x)\, d\eta,$$

то

$$||g||_{s,R} \leq C(\alpha, p)\, n^{\alpha}\, ||f||_{p,R}.$$

Лемма 4. *Пусть* $\gamma = [z_1, z_2] \subset \Pi^+$, $\Delta \subset \mathbb{R}$, $\overline{\gamma} \cap \overline{\Delta} = \emptyset$, $f \in L_p(\gamma)$, $\alpha > 0$, $p \in (1, \infty]$, $s = (\alpha + p^{-1})^{-1}$. *Если*

$$g(x) = \int_\gamma \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta - x|^{1+\alpha}}\, |d\zeta|, \quad x \in \Delta,$$

то

$$||g||_s(\Delta) \leq C(\alpha, p) \left(\frac{|\Delta|}{\rho(\Delta, \gamma)} \right)^{\alpha} ||f||_p(\gamma),$$

где $\rho(\Delta, \gamma)$ *расстояние между* Δ *i* γ.

Доказательство Теоремы 2. Мы можем выбрать контур $\Delta_\rho = \{\zeta \in \mathbb{C}: |\varphi_R(\zeta)| = rho > 1\}$ так, чтобы полюсы $z_1, z_2, \ldots, z_n$ функции f не лежали внутри Δ_ρ. Пусть γ_a – контур, построенный в Теореме 1 и $\Gamma_\rho = \Delta_\rho \cup \gamma_a$. При любой ориентации контура Γ_ρ, по формуле Коши для $x \in [-R, R]$ имеем

$$\frac{m!}{2\pi i} \int_{\Gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - x)^{m+1}} \left[1 - \left(1 - \frac{B_n(\varphi_R(x))}{B_n(\varphi_R(\zeta))}\right)^{m+1} \times \left(1 - \frac{B_n(\overline{\varphi}_R(x))}{B_n(\varphi_R(\zeta))}\right)^{m+1} \right] d\zeta = 0.$$

Следовательно, если $\rho \to 1 + 0$, то

$$|f^{(m)}(x)| \leq C(m) \left[\int_{-R}^{R} |f(\eta)|\, Q_\alpha(\eta, x)\, d\eta + \right.$$
$$\left. + \sum_{k=1}^{m+1} \int_{\gamma_a} \frac{|f(\zeta)|}{|B_n^k(\varphi_R(\zeta))|} \frac{|d\zeta|}{|\zeta - x|^{m+1}} \right] = g_1(x) + g_2(x).$$

Заметим, что $f(\zeta) / B_n^k(\varphi_R(\zeta)) \in A\left(\overline{D_{\theta R} / \Gamma}\right)$. Следовательно, применяя Лемму 3 к g_1 и Леммы 2,4 к g_2, получаем утверждение (2) Теоремы 2.

Доказательство Теоремы 3. Сначала предположим, что f не имеет полюсов в верхней полуплоскости. Пусть γ_a^+, γ_a^- и G_a^+ – контур и область, построенные в Теореме 1. По формуле Коши при $z \in G_a^+$ имеем

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\theta_1 R}^{\theta_1 R} \frac{f(\zeta)}{\Pi(\zeta)} \frac{\Pi(\zeta) - \Pi(z)}{(\zeta - z)}\, d\zeta -$$
$$- \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_a^+} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \frac{\Pi(z)}{2\pi i} \int_{\gamma_a^-} \frac{f(\zeta)}{\Pi(\zeta)} \frac{d\zeta}{(\zeta - z)} = R_n(z) + f_1(z) + f_2(z),$$

где $\Pi(z)$ есть произведение (10) для полюсов функции f в $\overline{D}_{\theta R}$.

Так как $p \in (1, \infty)$, то из теоремы Рисса [25] получаем

$$||R_n||_{p,\theta R} \leq C(p) \left(||f||_{p,\theta R} + ||g_1||_p + ||g_2||_p \right).$$

Отсюда [16]

$$||R_n||_{B^\alpha_\tau(\theta R)} \leq C(\alpha, p)\, n^\alpha \left(||f||_{p,\theta R} + ||g_1||_p + ||g_2||_p \right).$$

Из Леммы 2 следует, что $R_n(z)$ удовлетворяет неравенству (3) Теоремы 3. Для функции $f_1(z)$ имеем

$$f_1(z) = \sum_{k=1}^{3} \Pi(z) \int_{\zeta_k}^{\zeta_{k+1}} \frac{f(\zeta)}{\Pi(\zeta)} \frac{d\zeta}{(\zeta - z)} = \sum_{k=1}^{3} g_k(z),$$

а этого достаточно для оценивания квазинорм функции g_2, так как квазинормы g_1, g_3 можно оценить тем же способом. Из [20], [21] получаем

$$\int_0^\infty \left(\frac{\omega_m(g_2, \delta)}{\delta^\alpha} \right)^s \frac{d\delta}{\delta} \leq C(\alpha, s) \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty |g_2^{(m)}(z)|^s\, y^{(m-s)\alpha - 1}\, dx\, dy, \quad m = [\alpha] + 1.$$

Для g_2 имеем

$$g_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{m} \binom{k}{m} \Pi^{(m-k)}(z) \int_{\zeta_2}^{\zeta_3} \frac{f(\zeta)}{\Pi(\zeta)} \frac{d\zeta}{(\zeta - z)^{k+1}}, \quad z \in \Pi^+.$$

Согласно Лемме 2.5 из [16] существуют функции $h_k(x)$, $k = 0, 1, ..., m - 1$ такие, что

$$||h_k||_1 \leq n, \quad h_k(x) > 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\left| \Pi^{(m-k)}(z) \right| \leq C_1(k, p) \min\left(y^{-1}, h_k(x) \right)^{m-k}, \quad z = x + iy \in \Pi^+. \tag{12}$$

Следовательно, из Леммы 4 получаем, что существуют функции φ, h такие, что

$$\left| g_2^{(m)}(x) \right| \leq C_2(\alpha, p)\, \varphi(x) \min\left(y^{-1}, h(x) \right)^m \tag{13}$$

$$||\varphi||_p \leq C_3(\alpha, p)\, ||f||_p([\zeta_2, \zeta_3]),$$

$$||h||_1 \leq C_4(\alpha, p) \left(n + \frac{R}{a} \right)$$

Теперь, применяя неравенство Гельдера, получаем

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{\infty}|g_2^{(m)}(z)|^s\, y^{(m-\alpha)s-1}\,dx\,dy \le$$

$$\le C_2(\alpha,p)\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi^s(x)\left(\int_0^{h^{-1}(x)} h^{sm}(x)\cdot y^{(m-\alpha)s-1}\,dy+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\int_{h^{-1}(x)}^{\infty} y^{-\alpha s-1}\,dy\right)dx\right)\le C_2(\alpha,p)\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi^s(x)\,h^{\alpha s}(x)\,dx \le$$

$$\le C_2(\alpha,p)\left(n+\frac{R}{a}\right)^{\alpha s}\cdot||f||_p^s([\zeta_2,\zeta_3]).$$

Принимая во внимание Лемму 2, получаем утверждение (3) Теоремы 3 в специальном классе, где f не имеет полюсов в Π^+.

В общем случае, если $z_1, z_2, \dots, z_k$ являются полюсами функции f в Π^+, положим $f_1(z) = \Psi_R(z)$, где $\Psi_R(z)$ определяются формулой (11). Легко видеть, что доказательство Теоремы 3 будет завершено, если получить (3) для функции

$$F(x) = g_2(x)\Psi_R(x), \quad x\in\mathbb{R}.$$

Из результатов [20], [21] получаем (3) для F, если распространить F на всю плоскость $\mathbf{C}$

$$\iint_{\mathbf{C}}[\varphi^*(z)]^s\;|y|^{-s(\alpha-1)-1}\,dx\,dy<+\infty,$$

где

$$\varphi^*(z)=\sup_{|\zeta-z|<\frac12\rho(z,\mathbb{R})}|\bar\partial F(\zeta)|$$

Мы можем представить функцию F в виде $F(x) = \Pi(x)\times g(x)$, где $g(x) = \dfrac{g_2(x)\Psi_R(x)}{\Pi(x)}$.

Расширим F на всю плоскость, используя формулу

$$F(z)=\begin{cases} g(z)\displaystyle\sum_{k=0}^{m-1}\Pi^{(k)}(z)\frac{(z-\bar z)^k}{k!}, & \text{если}\quad z\in\Pi^+\\ \Pi(z)\displaystyle\sum_{k=0}^{m-1}g^{(k)}(z)\frac{(z-\bar z)^k}{k!}, & \text{если}\quad z\in\Pi^-.\end{cases}$$

Следовательно

$$(m-1)!\,|\bar\partial F(z)|\le\begin{cases}|g(z)|\,\Pi^{(m)}(\bar z)|\,y^{m-1} & \text{если}\quad z\in\Pi^+\\ |g^{(m)}(z)||y|^{m-1} & \text{если}\quad z\in\Pi^-\end{cases}$$

Из последних неравенств и (11), (12) получаем (3). Теорема 3 доказана.

Для доказательства Леммы 4 нам необходимы некоторые определения из [20]. Пусть

$$I(\zeta) = \{t \in \mathbb{R}: \quad |\xi - t| \le \frac{|\eta|}{2}, \zeta = \xi + i\eta\}.$$

Если $f \in L_1$, то положим $E_m(f, \zeta) = E_m(f, I(\zeta))_1$.

Следующая лемма является модификацией Теоремы 3 из [21].

Лемма 5. *Пусть $f \in K_p^\alpha$, $p > 0$, $\alpha > \dfrac{1}{p-1}$, $l \in N$. Тогда существует функция F, определенная в комплексной плоскости такая, что для любого $R > 0$*

$$f(x) = \frac{l!}{2\pi i} \int_{\partial\Delta_R} \frac{F(\zeta)}{(\zeta - z)^{l+1}}\, d\zeta - \frac{l!}{\pi} \iint_{\Delta_R} \frac{\partial F}{\partial\bar\zeta} \frac{d\xi\, d\eta}{(\zeta - z)^{l+1}}, \quad x \in (-R, R), \tag{14}$$

$$\left|\frac{\partial F}{\partial\bar\zeta}\right| \le C_1 |Im\zeta|^{l-2} \cdot E_m(f, \zeta); \tag{15}$$

где Δ_R - квадрат со стороной $2R$ и с центром в O.

Доказательство. Если $f \in K_p^\alpha$, $\alpha > \dfrac{1}{p} - 1$, то из результатов работы [21] получаем, что $f \in L_{1,R}$ для всех $R > 0$. Следовательно, можем определить функцию

$$F(x) = \int_0^x \int_0^{x_1} \dots \int_0^{x_{l-1}} f(x_{l-1})\, dx_{l-1} \dots dx.$$

Из [20] получаем, что F можно распространить на $\mathbf{C}$ по формуле

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta_R} \frac{F(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \frac{1}{\pi} \iint_{\Delta_R} \frac{\partial F}{\partial\bar\zeta} \frac{d\xi\, d\eta}{\zeta - z}, \quad z \in \Delta_R.$$

$$\left|\frac{\partial F}{\partial\bar\zeta}\right| \le C_2 \frac{E_{m+l}(F, \zeta)}{|\mathrm{Im}\zeta|^2} \le C_2 |\mathrm{Im}\,\zeta|^{l-2} \cdot E_m(f, \zeta), \quad \zeta \in \mathbf{C}. \tag{16}$$

Пусть

$$g(x) = \frac{1}{\pi} \iint_{\Delta_R} \left|\frac{\partial F}{\partial\bar\zeta}\right| \frac{d\xi\, d\eta}{|\zeta - x|^{l+1}}. \tag{17}$$

Мы докажем, что $g \in L_{s,R}$, где $s = (\alpha + p^{-1})^{-1}$. Пусть

$$\Omega_{k,n} = \left\{\zeta = \xi + i\eta \in \Delta_R: \quad \frac{nR}{2^k} \le \xi \le \frac{(n+1)R}{2^k}, \ \frac{R}{2^{k+1}} \le |\eta| \le \frac{R}{2^{k-1}}\right\}$$

где $k = 0, 1, \dots$, $n = -2^k, \dots, 2^k - 1$. Мы можем выбрать $\zeta_{k,n} \in \Omega_{k,n}$ так, что $|\mathrm{Im}\zeta_{k,n}| = \dfrac{R}{2^{k+1}}$. Предположим также, что $s \le 1$, так как случай $s > 1$ можно доказать тем же способом, используя неравенство Гельдера. Из Теоремы 1 из [21] имеем

$$\int_{-R}^{R}|g(x)|^s\,dx \le C_3\int_{-R}^{R}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=-2^k}^{2^k-1}\frac{|\operatorname{Im}\zeta_{k,n}|^{l-2}\cdot E_m(f,4I(\zeta_{k,n}))_1}{|\zeta_{k,n}-x|^{l+1}}\right)dx <$$

$$\le C_4\sum_{k=0}^{\infty}\frac{R}{2^k}\sum_{n=-2^k}^{2^k-1}E_m(f,4I(\zeta_{k,n}))_1^s I^{1-s}(\zeta_{k,n}) \le$$

$$\le C_5\int_0^{2R}\frac{\Omega_m^s(f,\delta)}{\delta}\,d\delta \le C_6\int_0^{2R}\frac{\Omega_m^s(f,\delta)}{\delta^{\alpha s+1}}\,d\delta < +\infty.$$

В частности, получаем, что интеграл (17) сходится почти всюду на $\mathbb{R}$. Пусть $\Delta_R^1=\Delta_R\cap\Pi^+$, $\Delta_R^2=\Delta_R\cap\Pi^-$. Положим

$$f_j(z)=\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\Delta_R^j}\frac{\partial F}{\partial\bar\zeta}\frac{d\xi\,d\eta}{(\zeta-z)^{l+1}},\quad j=1,2$$

и рассмотрим эти функции в Π^- и Π^+, соответственно. Используя неравенство (16), мы можем показать, что $f_j\in B_s^\alpha(\partial\Delta_R^j)$. Из [21] заключаем, что $f_j\in E_1(\Delta_R^j)$, где $E_1(G)$ – пространство Смирнова в G. Следовательно, имеем $f_1\in H_1(\Pi^-)$, $f_2\in H_1(\Pi^+)$. Положим

$$F_j(z)=\frac{1}{\pi}\iint_{\Delta_R^j}\frac{\partial F}{\partial\bar\zeta}\frac{d\xi\,d\eta}{(\zeta-z)^{l}},\quad j=1,2.$$

Очевидно, что $F_j(z)$, $j=1,2$ непрерывные функции в Π^- и Π^+, соответственно. Далее, так как $F_1'(z)=f_1(z)$, $z\in\Pi^-$, $F_2'(z)=f_2(z)$, $z\in\Pi^+$, то по теореме братьев Рисс [25], F_j абсолютно непрерывна на $\mathbb{R}$ и $F_j'(x)=f_j^*(x)$, $x\in\mathbb{R}$ почти всюду на $\mathbb{R}$ ($f_j^*(x)$, $j=1,2$ – некасательные пределы $f_j(z)$ при $z\to x$). В точках сходимости интеграла (17) имеем

$$f_j^*(x)=\frac{1}{\pi}\iint_{\Delta_R^j}\frac{\partial F}{\partial\bar\zeta}\frac{d\xi\,d\eta}{(\zeta-x)^{l+1}},\quad j=1,2.$$

Следовательно, при $x\in(-R,R)$

$$f(x)=F^{(l)}(x)=\frac{l!}{2\pi i}\int_{\partial\Delta_R}\frac{F(\zeta)}{(\zeta-x)^{l+1}}d\zeta+F_1'(x)+F_2'(x)=$$

$$=\frac{l!}{2\pi i}\int_{\partial\Delta_R}\frac{F(\zeta)}{(\zeta-x)^{l+1}}\,d\zeta-\frac{l!}{\pi}\iint_{\Delta_R}\frac{\partial F}{\partial\bar\zeta}\frac{d\xi\,d\eta}{(\zeta-z)^{l+1}},\quad x\in(-R,R).$$

Лемма 5 доказана.

Доказательство Теоремы 4. Согласно интерполяционным теоремам [26], [17], вложение (5) будет доказано, если покажем, что

$$K_s^\alpha \cap L_p \subset M_{p,\infty}^\alpha(\varepsilon).$$

Пусть f представляется в виде (14). Пусть Δ_{2^n} квадраты со сторонами 2^{n+1} и центром в O. Положим

$$f_n(x) = \frac{l!}{\pi} \iint_{\Delta_{2^{n+1}}/\Delta_{2^n}} \frac{\partial F}{\partial \bar\zeta} \frac{d\xi\, d\eta}{(\zeta - x)^{l+1}}.$$

Выберем l так, чтобы $s(l+1) > 1$, и применим Лемму 2.5 из [17] к функциям f_n. Из [17] заключаем, что существуют рациональные функции $R_{k_n}(z)$, $k_n \le \sigma n^{2/\alpha} 2^n$, полюсы которых принадлежат $\Delta_{2^{n+1}}/\Delta_{2^n}$, такие, что

$$\|f_n - R_{k_n}\|_p \le C_1 \frac{\|f_n\|_{B_\tau^s}}{\sigma^\alpha n^2 2^{\alpha n}} \le \frac{C_2}{\sigma^\alpha n^2}.$$

Докажем, что функции

$$g_n(z) = \frac{l!}{2\pi i} \int_{\partial \Delta_{2^{n+1}}} \frac{F(\zeta)}{(\zeta - z)^{l+1}}\, d\zeta + \sum_{i=1}^{n} R_{k_i}(z)$$

сходятся к некоторой функции $g_\sigma \in A_{q\sigma}^\varepsilon$, $q > 0$.

Для любой $z \in \mathbf{C}$ мы можем выбрать $N > L$ так, чтобы $z \in \Delta_{2^L}$. Следовательно

$$|g_N(z) - g_L(z)| \le \sum_{i=L}^{N} |f_i(z) - R_{k_i}(z)| \le C_3 \sum_{i=L}^{N} \frac{1}{\sigma^\alpha i^2}.$$

Очевидно, что

$$N(r, g_\sigma) \le C_4 \sigma (r+1)^{1+\varepsilon}, \quad r \ge 0.$$

Следуя [2], находим

$$m(r, g_\sigma) \le C_5 \sigma (r+1)^{1+\varepsilon}, \quad r \ge 0.$$

Так как $p \in (1, \infty)$, то

$$\|f - g_\sigma\|_p \le \sum_{n=0}^{\infty} \|f_n - R_{k_n}\|_p \le \frac{C_6}{\sigma^\alpha}.$$

Вложение (5) доказано. Вложение (4) можно доказать так же, как в Теореме 3.1 из [16], воспользовавшись оценками (12), (13).

Теорема 4 доказана.

Автор выражает благодарность профессору Н. У. Аракеляну за полезные консультации.

ABSTRACT. **Some estimates for meromorphic functions which have no poles on the real axis are obtained. Certain classes of functions defined on the real axis which generalize the Besov classes are described.**

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. А. Тер-Исраелян, " Равномерные и касательные приближения мероморфными функциями в угле и эволюция их роста ," Изв. АН Арм. ССР, Математика, т. 6, №1, стр. 67 – 80, 1971.
2. Р. А. Аветисян, Н. У. Аракелян, " Наилучшие приближения мероморфными функциями в угловой области," Изв. АН Арм. ССР, Математика, т. 23, №6, стр. 547 – 556, 1988.
3. Р. А. Аветисян, Н. У. Аракелян, " Наилучшие приближения мероморфными функциями на вещественной оси," Изв. АН Арм. ССР, Математика, т. 25, №6, стр. 534 – 548, 1990.
4. С. Н. Бернштейн, " Об одном свойстве целых функций," Сборник трудов, т. 1, Изв. АН СССР, стр. 261 – 270, 1952.
5. Н. У. Аракелян, " " Равномерные и касательные приближения на вещественной оси целыми функциями с эволюцией их роста ," Мат. Сб., т. 133 (155), №1, стр. 3 – 40, 1980.
6. С. М. Никольский, Приближения Функций Многих Переменных и Теоремы Вложения, Наука, М., 1959.
7. И. Н. Иродова, " Свойства шкалы пространств $B_p^{\lambda\theta}$ при $0 < p < 1$", ДАН СССР, т. 21 (198), №1, стр. 53 – 55, 1980.
8. А. А. Гончар, " Порядок приближения рациональными функциями," Докл. межд. конгр. матем. (Москва), Мир, М., стр. 329 – 356, 1968.
9. Е. П. Долженко, "Оценки производных рациональных функций," Изв. АН СССР, Математика, т. 27, стр. 9 – 28, 1963.
10. В. Н. Русак, Рациональные Функции как Аппарат Приближения, Изд. Белорус. гос. унив., Минск, 1979.
11. Ю. А. Брудный, "Рациональные Приближения и Теоремы Вложения," ДАН СССР, т.247, стр. 269 – 272, 1979.
12. В. В. Пеллер, "Операторы Ганкеля классов σ_p и их приложения (рациональные приближения, гауссовские процессы, проблема мажорирования операторов)," Мат. сб., т. 113 (155), стр. 538 – 581, 1980.
13. В. В. Пеллер, "Описание операторов Ганкеля в классе σ_p при $p > 1$, исследование значений рациональных приближений и другие приложения", Мат. сб., т. 122 (164), стр. 401 – 510, 1983.
14. S. Semmes, " Trace ideal criteria for Hankel operators and applications to Besov spaces," Integral Equat. and Oper. Theory, vol. 7, no. 2, pp. 241 – 281, 1984.
15. R. A. De Vore, "Maximal functions and their application to rational approximation," CMS Conf. Proc., vol. 3, pp. 143 – 155, 1983.
16. А. А. Пекарский, "Неравенства типа Бернштейна для производных рациональных функций и обратные теоремы рациональных приближений", Мат. сб., т. 124 (166), стр. 557 – 574, 1984.

17. А. А. Пекарский, " Классы аналитических функций, определяемых наилучшими рациональными приближениям в H_p," Мат. сб., т. 127 (169), стр. 3 - 20, 1985.

18. А. А. Пекарский, " Оценки производных рациональных функций в $L_p[-1,1]$," Мат. заметки, т. 39, №3 - 4, стр. 212 - 216, 1986.

19. Р. А. Аветисян, Н. У. Аракелян, А. А. Гончар, " Асимптотические свойства мероморфных функций", Изв. АН Арм. ССР, т. 24, №3, стр. 207 - 225, 1987.

20. Е. М. Дынкин, "Конструктивная характеристика классов С. Л. Соболева и О. В. Бесова", Труды мат. инст. Стеклова, т. 155, стр. 46 - 76, 1981.

21. Е. М. Дынкин, "О классах B_p^s при $0 < p < 1$," ДАН СССР, т. 275, №5, стр. 9 - 12, 1984.

22. A. A. Goldberg and I. V. Ostrovskii, Distribution of Values of Meromorphic Functions, Nauka, Moscow, 1970.

23. Ю. А. Брудный, "Пространства, определяемые посредством локальных приближений", Труды моск. мат. общ., т. 24, стр. 69 - 132, 1971.

24. J. Peetre and G. Sparr, "Interpolation of normed Abelian groups," Ann. Math. Pure Appl., vol. (4) 92, pp. 217 - 262, 1972.

25. J. Garnett, Bounded Analytic Functions, Academic Press, 1981.

26. J. Peetre, New Thoughts on Besov Spaces, Duke Univ. Math., ser. I, Durham, 1976.

29 Сентября 1993

Институт математики
НАН Армении