ЦЕНТРАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ НЕКОММУТАТИВНЫХ АНАЛОГОВ РЕШЕТЧАТЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ

В. А. Арзуманян, Б. С. Нахапетян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 28, №6, 1993

В работе рассмотрены некоторые вопросы, связанные с асимптотической нормальностью некоммутативных аналогов однородных случайных полей со слабо зависимыми компонентами. Центральная предельная теорема формулируется при некотором условии асимптотической абелевости и условия перемешивания. Метод доказательств существенно более прост, чем обычно используемый.

§0. ВВЕДЕНИЕ

В последнее время заметно возрос интерес к результатам теории операторных алгебр, формулируемых в вероятностных терминах (предельные теоремы, условия перемешивания, эргодические свойства и т.д.) и которые принято интерпретировать как результаты так называемой некоммутативной теории вероятностей. Применение вероятностных методов в операторных алгебрах обусловлено известным сходством основных конструкций, а классическая теория вероятностей рассматривается при этом как коммутативный случай. Одним из важных стимулов к развитию некоммутативной теории вероятностей служат модели квантовой статистической механики, описываемые в рамках алгебраической аксиоматики.

Как и в классической теории вероятностей, асимптотические результаты и, в частности, предельные теоремы, представляют собой важный раздел исследований. Такие теоремы обычно доказываются в классе динамических систем, удовлетворяющих различным условиям перемешивания. Подобными свойствами обладают равновесные состояния квантовой статистической механики, такие как термодинамические пределы гиббсовских состояний, КМШ состояния (см.

[1], [2], [3]). Одним из первых результатов на эту тему был анонсирован В. В. Анщелевичем в работе [4], где была приведена центральная предельная теорема в формулировке Я. Г. Синая для некоммутативного аналога стационарного случайного процесса. В дальнейшем Б. Гольдштейн, оставаясь в рамках одномерного случая, усилил эти результаты ([5], [6]), получив аналоги теорем Ибрагимова ([7]) для слабо зависимых стационарных случайных процессов.

В настоящей работе рассмотрены вопросы, связанные с асимптотической нормальностью для некоммутативных аналогов однородных случайных полей со слабо зависимыми компонентами. Центральная предельная теорема доказывается при условии перемешивания, обобщающего известные критерии [8], [9], [10], выполняющиеся для гиббсовских случайных полей. В применении к одномерному случаю оно выделяет формально более широкий класс случайных процессов.

Метод доказательства, использованный в настоящей работе существенно более прост и обозрим по сравнению с обычно используемым и восходит к работе одного из авторов [11]. Этот метод вполне эффективен и при рассмотрении случайных полей с неограниченными компонентами.

§1. ОСНОВНЫЕ ПРИНЦИПЫ И ПОСТРОЕНИЯ

Пусть $\mathbb{Z}^\nu$ – целочисленная решетка размерности ν, $\nu \geq 1$, т. е. пространство векторов $x = (x_1, x_2, \dots, x_\nu)$, где $x_i \in \mathbb{Z}$, $i = 1, 2, \dots, \nu$, с нормой $\|x\| = \max\{|x_i| : i = 1, 2, \dots, \nu\}$.

Обозначим через $\mathcal{W}$ множество конечных подмножеств $\mathbb{Z}^\nu$, и пусть $|I|$ – число элементов множества $I \in \mathcal{W}$. Через V_n обозначим ν-мерный куб с длиной стороны, равной $2n+1$, т. е. $V_n = [-n, n]^\nu$, где $[-n, n] = \{t \in \mathbb{Z} : -n \leq t \leq n\}$. При необходимости решетка $\mathbb{Z}^\nu$ будет рассматриваться как аддитивная абелева группа.

Пусть $\mathcal{A}$ – алгебра фон Неймана в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, $\mathcal{A} \subset B(\mathcal{H})$, и ω – нормальное состояние на $\mathcal{A}$. Для представления τ группы $\mathbb{Z}^\nu$ в группу $\mathrm{Aut}(\mathcal{A})$ *-автоморфизмов алгебры $\mathcal{A}$ введем понятие траектории $T_u(I)$ элемента $u \in \mathcal{A}$ во множестве $I \subset \mathbb{Z}^\nu$:

$$T_u(I) = \{\tau(x)\, u : x \in I\}.$$

Полная траектория (т. е. при $I = \mathbb{Z}^\nu$) u обозначается через T_u, а минимальная алгебра Неймана, порожденная подмножеством $A \subset \mathcal{A}$ будет обозначаться через $\mathcal{A}(A)$.

Определение 1. Состояние ω на $\mathcal{A}$ называется τ- *инвариантным*, если

$$\omega(\tau(x)u) = \omega(u)$$

для всех $u \in \mathcal{A}$, $x \in \mathbb{Z}^\nu$, т. е. если $\omega(T_u) = \text{const}$.

Легко проверить, что если ω является τ–инвариантным состоянием, то оно также τ коинвариантно, т.е. для всех $u, v \in \mathcal{A}$ и всех $x, y, z \in \mathbb{Z}^\nu$

$$\operatorname{cov}\left(\tau(x+z)\,u, \tau(y+z)\,v\right) = \operatorname{cov}\left(\tau(x)\,u, \tau(y)\,v\right),$$

где $\operatorname{cov}(u, v) = \omega(u, v) - \omega(u)\omega(v)$, $u, v \in \mathcal{A}$.

τ–инвариантное состояние ω на $\mathcal{A}$ называется центрированным по отношению к системе $(\mathcal{A}, \tau, u)$, если $\omega(T(u)) = \omega(u) = 0$. Для центрированного состояния ω, очевидно, что $\operatorname{cov}(u. v) = \omega(u, v)$, $u, v \in T_a$.

Напомним лемму [5], которая будет часто использоваться в работе.

Лемма 1. *Для любых эрмитовых* $u, v \in \mathcal{A}$

(i) $|\omega(e^{i(u+v)}) - \omega(e^{iu})| \le \|v\|$;

(ii) $\|e^{i(u+v)} - e^{iu}e^{iv}\| \le \frac{1}{2}\|[u, v]\|$,

где $[u, v]$ *коммутатор пары* $u, v \in \mathcal{A}$, $[u, v] = uv - vu$.

Обозначим через L_0 класс последовательностей неотрицательных монотонно убывающих к нулю чисел, и пусть $L \subset L_0$ – множество всех последовательностей c из L_0, для которых выполняется следующее условие :

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\nu-1} c(n) < \infty.$$

Очевидно, что это условие эквивалентно следующему :

$$\|c\| = \sum_{x \in \mathbb{Z}^\nu} c(\|x\|) < \infty.$$

Определение 2. Будем говорить, что эрмитов элемент $a \in \mathcal{A}$ удовлетворяет условию *сильного τ-перемешивания* с коэффициентом $\alpha \in L_0$ если для всех $I, V \in W$, $u \in \mathcal{A}(T_a(I))$, $v \in \mathcal{A}(T_a(V))$

$$|\operatorname{cov}(u, v)| \leq f(|I|)\,\|u\|\,\|v\|\,\alpha(\rho(I, V)),$$

где f – произвольная функция на $\mathbb{N}$, $\rho(I, V) = \min\{\|x - y\|,\ x \in I, y \in V\}$.

Определение 3. Будем говорить, что эрмитов элемент $a \in \mathcal{A}$ удовлетворяет условию *τ-асимптотической абелевости* с коэффициентом $\beta \in L_0$, если для всех $x, y \in \mathbb{Z}^\nu$

$$\|[\tau(x)a, \tau(y)a]\| \leq \beta(\|x - y\|).$$

Пусть a – фиксированный элемент $\mathcal{A}$, и пусть ω – τ-инвариантное центрированное по отношению к системе $(\mathcal{A}, \tau, u)$ состояние. Мы будем использовать следующие обозначения .

$$S(V) = \sum_{x \in V} \tau(x)a = \sum_{u \in T_a(V)} u, \qquad V \in W\ ;$$

$$Z(V) = \sigma_V^{-1}\, S(V), \text{ где } \sigma_V = \sqrt{\omega(S(V)^2)}\ ;$$

$$Z(n) = Z(V_n) = \sigma_n^{-1}\, S(V_n), \text{ где } \sigma_n = \sigma_{V_n}.$$

Функция распределения F_u для эрмитова элемента $u \in \mathcal{A}$ определяется следующим образом :

$$F_u(\lambda) = \omega(E_\lambda(u)),$$

где E_λ спектральный проектор u, отвечающий интервалу $(-\infty, \lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогда характеристическая функция $\varphi_u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}\, dF_u(\lambda)$, удовлетворяет соотношению

$$\varphi_u(t) = \omega(e^{itu}),\ t \in \mathbb{R}^1.$$

Определение 4. Пусть ω – τ-инвариантное центрированное по отношению к системе $(\mathcal{A}, \tau, u)$ состояние. Будем говорить, что для эрмитова элемента a выполнена *центральная предельная теорема*, если последовательность функций распределения для операторов $Z(n)$, $n \in \mathbb{N}$, *асимптотически нормальна*, т.е.

$$\lim_{n \to \infty} F_{Z(n)}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\lambda} e^{-t^2/2}\, dt$$

для всех $\lambda \in \mathbb{R}^1$.

Теорема. *Пусть ω – τ-инвариантное центрированное по отношению к системе $(\mathcal{A}, \tau, u)$ состояние, и пусть эрмитов элемент a удовлетворяет условиям сильного τ-перемешивания и τ-асимптотической абелевости с коэффициентами α и β соответственно (с $\alpha, \beta \in L$). Тогда ряд*

$$\sigma_0^2 = \sum_{u \in T_\circ} cov(a, u)$$

сходится . Если $\sigma_0 \neq 0$, то для a выполнена центральная предельная теорема.

Доказательство этой теоремы приведено в §3.

§2. ДВЕ ЛЕММЫ

Пусть $p = p(n)$, $q = q(n)$, $n \in \mathbb{N}$ – некоторые функции со значениями в $\mathbb{N}$. Пара таких функций будет называться *стандартной*, если $p(n), q(n) \to \infty$, $p(n) = o(n)$, $q = o(p)$ при $n \to \infty$. Введем обозначения :

$$I_n(j) = [-n + jp(n) + jq(n), -n + (j+1)p(n) + jq(n)] \subset \mathbb{Z}, \ j = 0, 1, \dots, m-1,$$

$$m = m(n) = \left[\frac{2n+1}{p(n) + q(n)}\right].$$

Очевидно, что I_n – декартово произведение ν копий множеств $\bigcup_{j=0}^{m-1} I_n(j)$ является объединением ν-мерных кубов с ребрами длины p.

Перенумеруем эти кубы в некотором порядке (общее их число равно $k = (m-1)^\nu$) и обозначим j-тый куб в этой нумерации через $\Delta_{n,j}$. Тогда

$$I_n = \bigcup_{j=1}^{k} \Delta_{n,j}.$$

Лемма 2. *Пусть ω – τ-инвариантное центрированное по отношению к системе $(\mathcal{A}, \tau, a)$ состояние, и пусть эрмитов элемент $a \in \mathcal{A}$ удовлетворяет условию τ-асимптотической абелевости с коэффициентом $\beta \in L$.*

0. Пусть для некоторого положительного $\gamma \in \mathbb{R}$,

$$\sigma_n^2 \sim \gamma^2 |V_n|, \ \text{при} \ n \to \infty.$$

Предположим, что для стандартной пары функций p, q таких, что $p(n) = o(n^{\frac{1}{2}})$ при $n \to \infty$, выполнены следующие условия :

1. Для любого $t \in \mathbb{R}$

$$T_0^{(k)} = \left| \omega \left(\prod_{j=1}^{k} e^{itZ(n,j)} \right) - \prod_{j=1}^{k} \omega \left(e^{itZ(n,j)} \right) \right| \to 0, \quad \textit{при} \quad n \to \infty,$$

где $Z(n,j) = \sigma_n^{-1} S(\Delta_{n,j})$;

2. Для любого положительного $\varepsilon \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{p(n)^\nu} \int\limits_{|\lambda| \geq \varepsilon\sigma_n} \lambda^2 \, dF_n(\lambda) = 0,$$

где $F_n = F_{S(\Delta_{n,1})}$.

Тогда для ω *выполнена центральная предельная теорема.*

Доказательство. Достаточно убедиться в сходимости соответствующих характеристических функций для любого фиксированного $t \in \mathbb{R}$, т.е.

$$|\omega(e^{itZ(n)}) - e^{-t^2/2}| \to 0, \quad \text{при } n \to \infty.$$

Обозначим

$$T_1^{(k)} = \left| \omega \left(e^{itZ(n)} \right) - \omega \left(e^{it \sum_{j=1}^{k} Z(n,j)} \right) \right|;$$

$$T_2^{(k)} = \| \, e^{it \sum_{j=1}^{k} Z(n,j)} - \prod_{j=1}^{k} e^{itZ(n,j)} \, \|;$$

$$T_3^{(k)} = \left| \prod_{j=1}^{k} \omega \left(e^{itZ(n,j)} \right) - e^{-t^2/2} \right|.$$

Очевидно

$$\left| \omega \left(e^{itZ(n)} \right) - e^{-t^2/2} \right| \leq T_1^{(k)} + T_2^{(k)} + T_0^{(k)} + T_3^{(k)}.$$

Каждое слагаемое $T_i^{(k)}$, $i = 1, 2, 3$ будем оценивать отдельно.

Из первого условия Леммы 2 получаем

$$T_1^{(k)} = \left| \omega \left(e^{it(\sum_{j=1}^{k} Z(n,j) + Z(n) - \sum_{j=1}^{k} Z(n,j))} \right) - \omega \left(e^{it \sum_{j=1}^{k} Z(n,j)} \right) \right| \leq$$

$$\leq |t| \, \| \, Z(n) - \sum_{j=1}^{k} Z(n,j) \, \| \leq |t| \sigma_n^{-1} \sum_{u \in T_a(V_n - I_n)} \| u \| \leq$$

$$\leq |t| \sigma_n^{-1} \, \| a \| \, |V_n - I_n| \sim C_1 |t| (\gamma n^{\nu/2})^{-1} \, \| a \| \, p(n)^{\nu-1} q(n) \to 0, \text{ при } n \to \infty.$$

Выделяя шаг за шагом слагаемые из $Z(n,k)$ и используя вторую оценку в Лемме 1, получим

$$T_2^{(k)} \le \| e^{it\sum_{j=1}^{k-1} Z(n,j)+itZ(n,k)} - e^{it\sum_{j=1}^{k-1} Z(n,j)} e^{itZ(n,k)} \| +$$
$$+ \| e^{it\sum_{j=1}^{k-1} Z(n,j)} e^{itZ(n,k)} - \left(\prod_{j=1}^{k-1} e^{itZ(n,j)}\right) e^{itZ(n,k)} \| \le$$
$$\le \frac{1}{2} t^2 \| [\sum_{j=1}^{k-1} Z(n,j),\ Z(n,k)] \| + T_2^{(k-1)}$$

Продолжая этот процесс, получим

$$T_2^{(k)} \le \frac{1}{2} t^2 \sum_{m=1}^{k-1} \| [\sum_{j=1}^{m} Z(n,j),\ Z(n,m+1)] \| \le$$
$$\le \frac{1}{2} t^2 \sum_{m=1}^{k-1} \sum_{j=1}^{m} \| [Z(n,j),\ Z(n,m+1)] \| \le$$
$$\le \frac{t^2}{2\sigma_n^2} \sum_{m=1}^{k-1} \sum_{j=1}^{m} \sum_{u\in T_a(\Delta_{n,j})} \sum_{v\in T_a(\Delta_{n,m+1})} \| [u,v] \| =$$
$$= \frac{t^2}{2\sigma_n^2} \sum_{m=1}^{k-1} \sum_{y\in\Delta_{n,m+1}} \sum_{j=1}^{m} \sum_{x\in\Delta_{n,j}} \beta(\|x-y\|) \le$$
$$\le \frac{t^2}{2\sigma_n^2} \sum_{m=1}^{k-1} \sum_{y\in\Delta_{n,m+1}} \sum_{x\in\mathbb{Z}^\nu,\, \|x\|\ge q(n)} \beta(\|x\|) \le$$
$$\le \frac{t^2 k\, p(n)^\nu}{2\sigma_n^2} \sum_{x\in\mathbb{Z}^\nu,\, \|x\|\ge q(n)} \beta(\|x\|) \sim$$
$$\sim C_2 \frac{t^2 p(n)^\nu}{\gamma^2 n^\nu} \left(\frac{n}{p(n)}\right)^\nu \sum_{x\in\mathbb{Z}^\nu,\, \|x\|\ge q(n)} \beta(\|x\|)$$
$$= C_2 \frac{t^2}{\gamma} \sum_{x\in\mathbb{Z}^\nu,\, \|x\|\ge q(n)} \beta(\|x\|) \to 0, \text{ при } n\to\infty.$$

Осталось доказать, что $T_3^{(k)} \to 0$, где $n\to\infty$.

Рассмотрим схему серий независимых одинаково распределенных случайных величин с функциями распределения $F_{n,j} = F_{Z(n,j)}$, где $j = 1, \dots, k = k(n)$, $n = 1, 2 \dots$.

Для нашей цели достаточно проверить *условие Линдеберга* :

$$\text{для всех } \varepsilon > 0 \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{k} \int_{|\lambda|\ge\varepsilon} \lambda^2\, dF_{n,j}(\lambda) = 0.$$

Так как ω предполагается τ-инвариантным, функции распределения $F_{n,j}$ не зависят от j и следовательно, условие Линдеберга эквивалентно условию 2 леммы.

Лемма 3. *Пусть выполнены предположения Теоремы. Тогда справедливо следующее соотношение :*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sigma_n^2}{|V_n|}=\sigma_0^2.$$

Доказательство. Имеем

$$\sigma_n^2=\omega\left(\left(\sum_{u\in T_a(V_n)}u\right)^2\right)=|V_n|\omega(a^2)+\sum_{x\in V_n}\sum_{v\in T_a(V_n-\{x\})}\operatorname{cov}(\tau(x)a,\,v)=$$

$$=|V_n|\omega(a^2)+\sum_{x\in V_n}\sum_{v\in T_a(\mathbb{Z}^\nu-\{x\})}\operatorname{cov}(\tau(x)a,\,v)-$$

$$-\sum_{u\in T_a(V_n)}\sum_{v\in T_a(\mathbb{Z}^\nu-V_n)}\operatorname{cov}(u,\,v)=|V_n|\omega(a^2)+|V_n|\sum_{u\in T_a(\mathbb{Z}^\nu-\{0\})}\operatorname{cov}(a,\,u)-$$

$$-\sum_{u\in T_a(V_n)}\sum_{v\in T_a(\mathbb{Z}^\nu-V_n)}\operatorname{cov}(u,\,v).$$

Следовательно

$$\frac{1}{|V_n|}\sigma_n^2=\sigma_0^2-\frac{1}{|V_n|}\sum_{u\in T_a(V_n)}\sum_{v\in T_a(\mathbb{Z}^\nu-V_n)}\operatorname{cov}(u,\,v).$$

Обозначая $V_n^d=\{x\in V_n:\rho(x,\mathbb{Z}^\nu-V_n)\le d\}$ для любого $d>0$, получаем

$$\frac{1}{|V_n|}\sum_{u\in T_a(V_n)}\sum_{v\in T_a(\mathbb{Z}^\nu-V_n)}|\operatorname{cov}(u,\,v)|\le\frac{f(1)\,\|a\|^2}{|V_n|}\sum_{x\in V_n}\sum_{y\in\mathbb{Z}^\nu-V_n}\alpha(\|x-y\|)\le$$

$$\le\frac{f(1)\,\|a\|^2}{|V_n|}\left(\sum_{x\in V_n^d}\sum_{y\in\mathbb{Z}^\nu-V_n}\alpha(\|x-y\|)+\sum_{x\in V_n-V_n^d}\sum_{y\in\mathbb{Z}^\nu-V_n}\alpha(\|x-y\|)\right)\le$$

$$\le\frac{f(1)\,\|a\|^2}{|V_n|}\left(|V_n^d|\sum_{y\in\mathbb{Z}^\nu}\alpha(\|y\|)+|V_n|\sum_{y\in\mathbb{Z}^\nu,\,|y|\ge d}\alpha(\|y\|)\right)=$$

$$=f(1)\,\|\alpha\|\,\|a\|^2\frac{|V_n^d|}{|V_n|}+f(1)\,\|a\|^2\sum_{y\in\mathbb{Z}^\nu,\,|y|\ge d}\alpha(\|y\|)\le$$

$$\le f(1)\,\|\alpha\|\,\|a\|^2\frac{(2n+1)^{\nu-1}d}{(2n+1)^\nu}+f(1)\,\|a\|^2\sum_{y\in\mathbb{Z}^\nu,\,|y|\ge d}\alpha(\|y\|)\sim$$

$$\sim C_1\left(\frac{d}{n}+\sum_{y\in\mathbb{Z}^\nu,\,|y|\ge d}\alpha(\|y\|)\right).$$

Положив $d=\ln n$ мы завершим доказательство леммы.

§3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ

Здесь мы приводим доказательство теоремы, которое сводится к проверке условий Леммы 2. Утверждение относительно поведения корреляций является следствием Леммы 3 (с $\gamma = \sigma_0$). Легко выбрать функцию $p(n) = o(n^{\frac{1}{2}})$, при $n \to \infty$ так, чтобы выполнялось условие 2 Леммы 2. Мы завершим доказательство Теоремы, показав, что для некоторой стандартной пары функций q и $p = o(n^{\frac{1}{2}})$, $n \to \infty$ условие 1 Леммы 2 выполнено.

Пусть условия Теоремы выполнены. Имеем

$$T_0^{(k)} < \left| \operatorname{cov} \left(\prod_{j=1}^{k-1} e^{itZ(n,j)}, e^{itZ(n,k)} \right) \right| + T_0^{(k-1)}.$$

Используя это рекуррентное соотношение, можно получить

$$T_0^{(k)} \leq \sum_{l=3}^{k} \left| \operatorname{cov} \left(\prod_{j=1}^{l-1} e^{itZ(n,j)}, e^{itZ(n,l)} \right) \right|.$$

Если I — тождественный оператор в $\mathcal{H}$, то положим

$$M_1 = \sum_{l=3}^{k} \left| \operatorname{cov} \left(\prod_{j=1}^{l-1} e^{itZ(n,j)}, e^{itZ(n,l)} - I - itZ(n,l) + \frac{t^2}{2} Z(n,l)^2 \right) \right|;$$

$$M_2 = | t | \sum_{l=3}^{k} \left| \omega \left(\prod_{j=1}^{l-1} e^{itZ(n,j)} Z(n,l) \right) \right|;$$

$$M_3 = \frac{1}{2} t^2 \sum_{l=3}^{k} \left| \operatorname{cov} \left(\prod_{j=1}^{l-1} e^{itZ(n,j)}, Z(n,l)^2 \right) \right|$$

Поскольку ω центрировано, очевидно

$$T_0^{(k)} \leq \sum_{l=3}^{k} \left| \operatorname{cov} \left(\prod_{j=1}^{l-1} e^{itZ(n,j)}, e^{itZ(n,l)} - I \right) \right| \leq M_1 + M_2 + M_3.$$

Каждое из слагаемых M_i, $i = 1, 2, 3$ оценим по отдельности.

Обозначая $|h| = (h^* h)^{\frac{1}{2}}$ для любого оператора $h \in B(\mathcal{H})$ и, используя Лемму 1 (принимая во внимание неравенство $|e^{it} - 1 - it - \frac{1}{2}(it)^2| \leq \frac{1}{6}|t|^3$), получаем для $n \to \infty$:

$$M_1 \leq C_1 t^3 k \omega(| Z(n,0) |^3) \leq \frac{C_1 t^3 n^{\nu}}{n^{3\nu/2} p(n)^{\nu}} \omega(| S_{\Delta_{n,1}} |^2) \leq \frac{C_1 t^3 p(n)^{\nu}}{n^{\nu/2}} \to 0,$$

в силу того, что для $l = 3, 4 \ldots k$ и $x \in \Delta_{n,l}$

$$\operatorname{cov}\left(\prod_{j=1}^{l-1} e^{itZ(n,j)}, \tau(x)a\right) \Bigg| \leq \sum_{r=2}^{l-1} \Bigg| \operatorname{cov}\left(\prod_{j=1}^{r-1} e^{itZ(n,j)}.(e^{itZ(n,r)} - I), \tau(x)a\right)$$

Далее, не теряя общности, мы предполагаем, что на каждом шагу выбираемый номер r таков, что соответствующее множество $\Delta_{n,r}$ является ближайшим к $\Delta_{n,l}$. Применяя условие перемешивания, получаем

$$M_2 \leq \frac{|t|}{\sigma_n} \sum_{l=3}^{k} \sum_{x \in \Delta_{n,l}} \left| \operatorname{cov}\left(\prod_{j=1}^{l-1} e^{itZ(n,j)}, \tau(x)a\right) \right| \leq$$

$$\leq \frac{|t|}{\sigma_n} \sum_{l=3}^{k} \sum_{u \in T_a(\Delta_{n,l})} \sum_{r=2}^{l-1} \left| \operatorname{cov}\left(\prod_{j=1}^{r-1} e^{itZ(n,j)}(e^{itZ(n,r)} - I), u\right) \right| \leq$$

$$\leq f(1) \frac{|t|}{\sigma_n} \sum_{l=3}^{k} \sum_{u \in T_a(\Delta_{n,l})} \sum_{r=2}^{l-1} \alpha\left(\rho(\Delta_{n,l}, \bigcup_{j=1}^{r} \Delta_{n,j})\right) \| e^{itZ(n,r)} - I \| \| u \| \leq$$

$$\leq f(1) \frac{t^2 p(n)^\nu}{\sigma_n} \sum_{l=3}^{k} \sum_{r=2}^{l-1} \alpha\left(\rho\left(\Delta_{n,l}, \Delta_{n,r}\right)\right) \| Z(n,r) \| \leq$$

$$\leq f(1) \frac{t^2 p(n)^{2\nu} k(n)}{\sigma_n^2} \sum_{l=3}^{k} \alpha\left(\rho\left(\Delta_{n,l}, \Delta_{n,2}\right)\right) \leq$$

$$\leq C_2 t^2 p(n)^\nu \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{l:(s-1)q(n) < \rho(\Delta_{n,l}, \Delta_{n,1}) \leq sq(n)} \alpha\left(\rho\left(\Delta_{n,l}, \Delta_{n,1}\right)\right) \leq$$

$$\leq C_3 t^2 p(n)^\nu \sum_{s=1}^{\infty} \alpha\left(sq(n)\right) s^{\nu-1} \leq$$

$$\leq C_3 t^2 \frac{p(n)^\nu}{q(n)^\nu} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\gamma(sq)}{s} \to 0, \text{ при } n \to \infty,$$

где функция q выбрана подходящим образом.

Таким же путем оценим M_3 :

$$M_3 \leq \frac{t^2}{2\sigma_n^2} \sum_{l=3}^{k} \sum_{u,v \in T_a(\Delta_{n,l})} \left| \operatorname{cov}\left(\prod_{j=1}^{l-1} e^{itZ(n,j)}, u\, v\right) \right| \leq$$

$$\leq \frac{t^2}{2\sigma_n^2} \sum_{l=3}^{k} \sum_{u,v \in T_a(\Delta_{n,l})} \sum_{r=2}^{l-1} \left| \operatorname{cov}\left(\prod_{j=1}^{r-1} e^{itZ(n,j)}(e^{itZ(n,r)} - I), u\, v\right) \right| \leq$$

$$\leq f(2) \frac{t^2}{2\,\sigma_n^2} \sum_{l=3}^{k} \sum_{u,v \in T_a(\Delta_{n,l})} \sum_{r=2}^{l-1} \alpha\left(\rho\left(\Delta_{n,l}, \bigcup_{j=1} \Delta_{n,j}\right)\right) \| e^{itZ(n,r)} - I \| \| u \| \| v \| \leq$$

$$\leq \frac{C_4 t^3 p(n)^{3\nu}}{n^\nu n^{\nu/2}} \sum_{l=3} \sum_{r=2}^{l-1} \alpha(\rho(\Delta_{n,l}, \Delta_{n,2})) \leq \frac{C_4 t^3 p(n)^{3\nu} k(n)}{n^\nu n^{\nu/2}} \sum_{l=3}^{k} \alpha(\rho(\Delta_{n,l}, \Delta_{n,2})) \leq$$

$$\leq \frac{C_1 t^3 p(n)^{2\nu}}{n^{\nu/2} q(n)^{\nu}} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\alpha(sq(n))}{s} = C_4 t^3 \left(\frac{p(n)}{n^{1/2}}\right)^{\nu} \left(\frac{p(n)}{q(n)}\right)^{\nu} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\alpha(sq(n))}{s} \to 0, \text{ при } n \to \infty.$$

ABSTRACT. The paper formulates some results on asymptotic normality in many dimensional case for noncommutative analogues of homogeneous random fields with weakly dependent components. A central limit theorem is obtained under a mixing condition and a condition of asymptotic abelianness. The method of proofs is essentially simplier than the standard one.

ЛИТЕРАТУРА

1. H. Araki, "Gibbs states of a one-dimensional quantum lattice", Comm. Math. Phys., vol. 14, pp. 120 – 157, 1969.
2. O. Bratteli, D. W. Robinson, Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics, vol. II, Springer, New-York – Heidelberg – Berlin, 1981.
3. Д. Рюэль, Статистическая Механика, М., Мир, 1971.
4. В. В. Аншелевич, "Центральная предельная теорема в "некоммутативной" теории вероятностей", ДАН СССР, т. 208, стр. 1265 – 1267, 1973.
5. Б. Г. Гольдштейн, "Центральная предельная теорема "некоммутативной" теории вероятностей, Теория вероятн. и прим., т. 27, стр. 657 – 666, 1982.
6. Т. А. Сарымсаков, Введение в Квантовую Теорию Вероятностей, ФАН, Ташкент, 1985.
7. И. А. Ибрагимов, Ю. В. Линник, Независимые и Стационарно Связанные Величины, М., Наука, 1971.
8. Р. Л. Добрушин, "Описание случайных полей условными вероятностями и условиями их регулярности", Теория вероятн. и прим., т. 13, стр. 197 – 224, 1968.
9. Р. Л. Добрушин, "Гиббсовские случайные поля для решетчатых систем с парным взаимодействием", Функц. анал. и прил., т. 2, стр. 292 – 301, 1968.
10. B. S. Nahapetian, Limit Theorems and Some Applications in Statistical Physics, Teubner-texte zur Math., band 123, 1991.
11. Б. С. Нахапетян, "Об одном подходе к доказательству предельных теорем для зависимых случайных величин", Теория вероятн. и прим., т. 32, стр. 589 – 595, 1987.

12 Ноября 1993

Институт математики
НАН Армении