МОНОТОННЫЕ СИСТЕМЫ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Э. А. Даниелян, К. Р. Таталян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 28, №5, 1993

§1. РЕЗУЛЬТАТЫ

Результаты настоящей заметки относятся к теории систем Маркова, описанной в книгах [1], [2]. Свойство монотонности, которое мы вводим для последовательности обобщенных функций многих переменных, было известно ранее и широко использовалось в линейном случае.

Пусть k – натуральное число, $(y_1, ..., y_m) \in \mathbb{R}^m$, $(z_1, ..., z_m) \in \mathbb{R}^m$. Пишем

$$(y_1, ..., y_m) \prec_k (z_1, ..., z_m), \tag{1}$$

если не существуют натуральные числа $s_1, ..., s_k$, $1 \le s_1 < \cdots < s_k \le m$ такие, что

$$(-1)^{k-i} y_{s_i} > (-1)^{k-i} z_{s_i}, \qquad i = 1, ..., k.$$

Отношение (1) означает, что в последовательности $z_1 - y_1, ..., z_m - y_m$ происходит не более $k-1$ перемен знака, причем если число перемен знака равно $k-1$, то последний знак – "+".

Матрица

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}, \tag{2}$$

где $n \le m$, называетсяis *М-матрицей* (см. [1]), если

$$\begin{vmatrix} a_{1,s+1} & a_{1,s+2} & \cdots & a_{1,s+r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r,s+1} & a_{r,s+2} & \cdots & a_{r,s+r} \end{vmatrix} > 0$$

для любых $1 \le r \le n$, $0 \le s \le m - r$.

Пусть (2) является M-матрицей. Известно [1], [2], что для системы функций

$$f_i(x_1, ..., x_m) = a_{i1}x_1 + \cdots + a_{im}x_m + b_i, \quad i = 1, ..., n,$$

имеем

$$f_k(y_1, ..., y_m) < f_k(z_1, ..., z_m), \tag{3}$$

как только

$$f_i(y_1, ..., y_m) = f_i(z_1, ..., z_m), \quad i = 1, ..., k-1, \tag{4}$$

и справедливо (1), $1 \le k \le n$.

Введем следующее

Определение. Система функций

$$f_1(x_1, ..., x_m), \ldots, f_n(x_1, ..., x_m), \quad n \le m, \tag{5}$$

определенных на множестве $V \subset \mathbb{R}^m$, называется ***монотонной***, если из (1) и равенств (4) следует (3), где $(y_1, ..., y_m) \in V$, $(z_1, ..., z_m) \in V$, $1 \le k \le n$.

Целью настоящей работы является формулировка и доказательство следующей теоремы.

Теорема. *Пусть (5) – система непрерывно дифференцируемых функций и V такое как в (a), (b) или (c) :*

$$(a) \qquad V = \{\mathbf{x} = (x_1, ..., x_m) : \quad -\infty \le a_i < x_i < b_i \le +\infty, \quad i = 1, ..., m\};$$

$$(b) \qquad V = \{\mathbf{x} = (x_1, ..., x_m) : \quad -\infty \le a < x_1 < \cdots < x_m < b \le +\infty, \};$$

$$(c) \qquad V = \{\mathbf{x} = (x_1, ..., x_m) : \quad +\infty \ge b > x_1 > \cdots > x_m > a \ge -\infty, \}.$$

Если для всех $\mathbf{x} \in V$

$$\left(\frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x_j}\right)_{i=1,...,n}^{j=1,...,m} \tag{6}$$

является M-матрицей, то система функций (5) монотонна.

Доказательство Теоремы дано в §3.

§2. ПРИМЕРЫ

1. Система функций

$$f_1(x_1,...,x_n) = x_1 + \cdots + x_n,$$

$$f_2(x_1,...,x_n) = x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_1x_n + x_2x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n,$$

$$f_3(x_1,...,x_n) = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \cdots + x_{n-2}x_{n-1}x_n,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f_n(x_1,...,x_n) = x_1x_2\cdots x_n,$$

определенных на множестве $V = \{(x_1,...,x_n) : x_1 > \cdots > x_n\}$, монотонна.

Докажем это основываясь на приведенной выше Теореме. В то же время отметим существование другого доказательства, основанного на формулах Виета. Доказательство опирается на следующие свойства :

$$(1) \qquad \frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} = f^j_{i-1}(\mathbf{x}),$$

$$(2) \qquad f^s_i(\mathbf{x}) - f^r_i(\mathbf{x}) = (x_r - x_s) f^{s,r}_{i-1}(\mathbf{x}),$$

где

$$f^j_0(\mathbf{x}) = 1, \quad f^j_i(\mathbf{x}) = f_i(x_1,...,x_{j-1},0,x_{j+1},....,x_n),$$

$$f^{s,r}_i(\mathbf{x}) = f_i(x_1,...,x_{s-1},0,x_{s+1},....,x_{r-1},0,x_{r+1},....,x_n), \qquad s<r.$$

Согласно нашей Теореме достаточно показать, что для любых $1 \le k \le n$, $1 \le j_1 < \cdots < j_k \le n$ и $\mathbf{x} \in V$ определитель

$$D = \left| \frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x_{j_r}} \right|^k_{i,r=1}$$

положителен. Доказательство проводится индукцией по k. При $k = 1, 2$ утверждение очевидно. Предположим, что положительность имеет место при $k-1$. Тогда

$$D = \left| f^{j_r}_{i-1}(\mathbf{x}) \right|^k_{i,r=1} = \prod_{s=1}^{k-1} (x_{j_k} - x_{j_s}) \left| f^{j_r,j_k}_{i-1}(\mathbf{x}) \right|^{k-1}_{i,r=1}.$$

Последний определитель положителен согласно сделанному предположению.

2. Сначала напомним [1], что функции $u_1(t),...,u_n(t)$, $t \in (a,b)$ образуют M-систему, если $\left(u_i(t_j)\right)^n_{i,j=1}$ является M-матрицей для любых $a < t_1 < \cdots < t_n < b$.

Пусть $g_1(t), ..., g_n(t)$, $t \in (a, b)$ – непрерывно дифференцируемые функции такие, что их производные $g_1'(t), ..., g_n'(t)$ образуют M-систему. Тогда система функций $m \geq n$ переменных

$$f_1(x_1, ..., x_m) = g_1(x_1) + \cdots + g_1(x_m),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$f_n(x_1, ..., x_n) = g_n(x_1) + \cdots + g_n(x_m),$$

определенных на множестве $V = \{(x_1, ..., x_m) : x_1 > \cdots > x_m\}$, монотонна. Доказательство очевидным образом следует из Теоремы.

§3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ

Существуют определенные различия в доказательствах случаев (a), (b) или (c). Начнем со случая (a).

Случай (a). Доказательство проводится индукцией по n. Пусть $n = 1$ и

$$\frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_j} > 0, \quad j = 1, ..., m, \quad \mathbf{x} \in V.$$

Тогда функция $f_1(x_1, ..., x_m)$ строго возрастает по всем переменным. Следовательно, $f_1(\mathbf{x}') < f_1(\mathbf{x}'')$, как только $\mathbf{x}' \prec_1 \mathbf{x}''$, $\mathbf{x}', \mathbf{x}'' \in V$.

Предположим, что Теорема доказана для системы $f_1(\mathbf{x}), ..., f_{n-1}(\mathbf{x})$. Докажем ее для системы (5). Допустим противное, т. е. что существуют $\mathbf{x}', \mathbf{x}'' \in V$ такие, что $\mathbf{x}' \prec_n \mathbf{x}''$, $f_1(\mathbf{x}') = f_1(\mathbf{x}''), ..., f_{n-1}(\mathbf{x}') = f_{n-1}(\mathbf{x}'')$ и $f_n(\mathbf{x}') \geq f_n(\mathbf{x}'')$.

Обозначим через V_1 множество всех точек в $\mathbb{R}^m$, компоненты которых лежат между соответствующими координатами точек $\mathbf{x}'$ и $\mathbf{x}''$:

$$V_1 = \{\mathbf{x} = (x_1, ..., x_m) : \quad x_{*j} \leq x_j \leq x_j^*, \quad 1 \leq j \leq m\},$$

где $x_j^* = \max\{x_j', x_j''\}$, $x_{*j} = \min\{x_j', x_j''\}$. Так как множество

$$V_1' = \{\mathbf{x} \in M_1 : \quad f_i(\mathbf{x}) = f_i(\mathbf{x}') = f_i(\mathbf{x}''), \quad i = 1, ..., n-1\}$$

замкнуто, то существует точка $\mathbf{x}^o = (x_1^o, ..., x_m^o)$ в V_1' такая, что

$$f_n(\mathbf{x}^o) \geq f_n(\mathbf{x}) \quad \text{для всех } \mathbf{x} \in V_1'. \tag{7}$$

Мы полагаем, что $\mathbf{x}^o \neq \mathbf{x}''$, так как если

$$f_n(\mathbf{x}') = f_n(\mathbf{x}'') = f_n(\mathbf{x}^o), \tag{8}$$

то множество $\mathbf{x}^o = \mathbf{x}'$. Из предположения индукции и

$$f_i(\mathbf{x}^o) = f_i(\mathbf{x}''), \quad i = 1, ..., n-1, \tag{9}$$

следует, что как отношение $\mathbf{x}'' \prec_{n-1} \mathbf{x}^o$, так и $\mathbf{x}^o \prec_{n-1} \mathbf{x}''$ не имеют места. Так как $\mathbf{x}^o \in V_1$, то $\mathbf{x}^o \prec_n \mathbf{x}''$. Следовательно, существуют натуральные числа $1 \le j_1 < \cdots < j_n \le m$ такие, что

$$(-1)^{n-s} x^o_{j_s} < (-1)^{n-s} x''_{j_s}, \quad s = 1, ..., n. \tag{10}$$

Таким образом

$$(-1)^{n-s} x'_{j_s} \le (-1)^{n-s} x^o_{j_s} < (-1)^{n-s} x''_{j_s}, \quad s = 1, ..., n. \tag{11}$$

Рассмотрим функции $f_i(\mathbf{x})$, $i = 1, ..., n$, как функции n переменных $x_{j_1}, ..., x_{j_n}$, определенных на множестве $\{a_{j_1} < x_{j_1} < b_{j_1}, ..., a_{j_n} < x_{j_n} < b_{j_n}\}$, при фиксированных $x_i = x_i^o$, $i \neq j_1, ..., j_n$. По теореме Фекете (см. [1]), имеем

$$A = \left| \frac{\partial f_i(\mathbf{x}^o)}{\partial x_{j_k}} \right|_{i,k=1}^{n} > 0.$$

Следовательно, для системы уравнений $y_k = f_k(\mathbf{x})$, $k = 1, ..., n$, выполнены условия теоремы об обратной функции. Мы приходим к следующему заключению :

1. Существует взаимно однозначное соответствие между достаточно малыми окрестностями X и Y точек $(x^o_{j_1}, ..., x^o_{j_n})$ и $(y^o_1, ..., y^o_n)$, соответственно, где $y^o_k = f_k(\mathbf{x}^o)$, $k = 1, ..., n$.

В частности, для точек $(y^o_1, ..., y^o_{n-1}, y^o_n + \varepsilon) \in Y$ с малыми ε существует единственная точка $(x_{j_1}(\varepsilon), ..., x_{j_n}(\varepsilon)) \in X$ такая, что

$$y^o_i = f_i(\mathbf{x}(\varepsilon)), \quad i = 1, ..., n-1, \quad y^o_n + \varepsilon = f_n(\mathbf{x}(\varepsilon)), \tag{12}$$

где $\mathbf{x}(\varepsilon) = (x_1(\varepsilon), ..., x_m(\varepsilon))$, $x_i(\varepsilon) = x^o_i$ для $i \neq j_1, ..., j_n$.

2. Обратные функции $x_{j_k} = x_{j_k}(y_1, ..., y_n)$, $k = 1, ..., n$ непрерывно дифференцируемы в точке $(y_1^o, ..., y_n^o)$. Следовательно, существуют производные

$$x'_{j_k}(0) = x'_{j_k}(\varepsilon)\big|_{\varepsilon=0} = \frac{\partial x_{j_k}(y_1^o, ..., y_n^o)}{\partial y_n}, \quad k = 1, ..., n.$$

Дифференцируя по ε равенства (12) в точке $\varepsilon = 0$, получим

$$\left(\frac{\partial f_i(\mathbf{x}^o)}{\partial x_{j_k}}\right)_{i,k=1}^{n} \begin{pmatrix} x'_{j_1}(0) \\ \vdots \\ x'_{j_n}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \qquad (13)$$

По формуле Крамера

$$x'_{j_s}(0) = (-1)^{n-s}\frac{A_s}{A}, \quad s = 1, ..., n,$$

где A_s – определитель матрицы, которая получается из матрицы в (13) удалением n-той строки s-го столбца.

Так как $A > 0$ и $A_s > 0$ для всех $s = 1, ..., n$, то

$$(-1)^{n-s}x'_{j_s}(0) > 0, \quad s = 1, ..., n. \qquad (14)$$

По определению $x_j(0) = x_j^o$ для всех $j = 1, ..., m$. Следовательно, согласно (14) и (11), существует $\delta > 0$ такое, что

$$(-1)^{n-s}x'_{j_s} \leq (-1)^{n-s}x^o_{j_s} < (-1)^{n-s}x_{j_s}(\delta) < (-1)^{n-s}x''_{j_s}, \quad s = 1, ..., n.$$

Таким образом, $\mathbf{x}(\delta) \in V_1'$ и из (12) имеем $f_n(\mathbf{x}(\delta)) = f_n(\mathbf{x}^o) + \delta$, что противоречит определению $\mathbf{x}^o$. Следовательно, Теорема в случае (a) доказана.

Случай (b). Пусть n – минимальное натуральное число, для которого Теорема не имеет места. Это означает существование точек $\mathbf{x}' = (x_1', ..., x_m')$, $\mathbf{x}'' = (x_1'', ..., x_m'')$ в V таких, что $\mathbf{x}' \prec_n \mathbf{x}''$, $f_i(\mathbf{x}') = f_i(\mathbf{x}'')$, $i = 1, ..., n-1$ и $f_n(\mathbf{x}') \geq f_n(\mathbf{x}'')$. Обозначим :

$\Delta(\mathbf{x}) = \min\{x_2 - x_1, ..., x_m - x_{m-1}\}, \quad \mathbf{x} = (x_1, ..., x_m) \in V,$

$V_0 = \{\mathbf{x} \in V : \Delta(\mathbf{x}) \geq \Delta'\}$, где $0 < \Delta' < \min\{\Delta(\mathbf{x}'), \Delta(\mathbf{x}'')\}$,

$V_1 = \{\mathbf{x} \in V_0 : x_{*j} \leq x_j \leq x_j^*, \quad 1 \leq j \leq m\}$, где $x_{*j} = \min\{x'_j, x''_j\}$, $x^*_j = \max\{x'_j, x''_j\}$, $j = 1, ..., m$;

$$V'_1 = \{\mathbf{x} \in V_1 : \quad f_i(\mathbf{x}) = f_i(\mathbf{x}') = f_i(\mathbf{x}''), \quad i = 1, ..., n-1\}.$$

Существует точка $\mathbf{x}^o = (x^o_1, ..., x^o_m)$ в V'_1, удовлетворяющая (7). Полагаем $\mathbf{x}^o \neq \mathbf{x}''$, так как в случае (8) мы определим $\mathbf{x}^o = \mathbf{x}'$. Из (9) и определения n следует, что ни отношение $\mathbf{x}'' \prec_{n-1} \mathbf{x}^o$, ни $\mathbf{x}^o \prec_{n-1} \mathbf{x}''$ не имеют места. С другой стороны, так как $\mathbf{x}^o \in V_1$, то $\mathbf{x}^o \prec_n \mathbf{x}''$. Таким образом, существуют натуральные числа $1 \leq j_1 < \cdots < j_n \leq m$, удовлетворяющие (10). Выберем эти числа так, чтобы их сумма

$$\sum_{s=1}^{n} (-1)^{n-s} j_s \tag{15}$$

была бы максимальной. Тогда

$$x^o_{j_s} < x^o_{j_s+1} - \Delta', \qquad \text{если } n-s \text{ четно и } j_s < m. \tag{16}$$

В самом деле, иначе $x^o_{j_s+1} = x^o_{j_s} + \Delta'$, следовательно, $x^o_{j_s+1} < x''_{j_s+1}$ и сумма (15) не является максимальной. Аналогично

$$x^o_{j_s-1} + \Delta < x^o_{j_s} \qquad \text{если } n-s \text{ нечетно и } j_s > 1. \tag{17}$$

Рассматривая функции $f_i(\mathbf{x})$, $i = 1, ..., n$ как функции n переменных $x_{j_1}, ..., x_{j_n}$ при фиксированных остальных, доказательство можно продолжить аналогично предыдущему случаю. Необходимо лишь отметить, что из (16) и (17) имеем $\Delta(\mathbf{x}(\delta)) \geq \Delta'$ для достаточно малых $\delta > 0$.

Случай (c) доказывается аналогично предыдущему.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ф. Р. Гантмахер, М. Г. Крейн, Осциляционные Матрицы и Ядра и Малые Колебания Механических Систем, М.-Л., Гостехиздат, 1950.
2. S. Karlin, Total Positivity and Applications, Stanford Univ. Press, Stanford, CA, 1968.

13 Июля 1993

Ереванский государственный университет