

МАРКИРОВАННЫЕ ТОЧЕЧНЫЕ ПРОЦЕССЫ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ, ПОРОЖДЕННЫЕ СЛУЧАЙНЫМИ ПРОЦЕССАМИ ПРЯМЫХ НА ПЛОСКОСТИ

В. К. Оганян, А. А. Абдаллах

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
том 28, №5, 1993

Пусть задан однородный и изотропный случайный процесс прямых на плоскости. В работе исследован маркированный точечный процесс пересечений с угловыми марками на тестовой прямой. Методом интегрирования комбинаторной формулы Амбарцумяна получены формулы, связывающие конечномерные распределения точечного процесса пересечений с распределениями Пальма первого и второго порядка процесса прямых.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Случайный процесс прямых на плоскости можно определять как случайный точечный процесс в пространстве прямых $\mathbf{G}$. Прямую $g \in \mathbf{G}$, $g \subset \mathbb{R}^2$ определяют парой $g = (\varphi, p)$, где (φ, p) – полярные координаты основания перпендикуляра, опущенного из начала координат O на прямую g (φ – точка на единичной окружности S^1 , $p \in [0, \infty)$). Естественная топология на $\mathbf{G}$ – это топология листа Мебиуса (см. [1]). Обычное определение точечного процесса для пространства $\mathbf{G}$ дается следующим образом (стандартная литература для точечных процессов – [1], [2], [14]).

Обозначим через $\mathcal{M}$ множество всех подмножеств $m \subset \mathbf{G}$, удовлетворяющих условию $\text{card}(m \cap B) < \infty$ для любого ограниченного борелевского множества $B \subset \mathbf{G}$. Обозначим через $\mathcal{A}$ минимальную σ -алгебру подмножеств $\mathcal{M}$, относительно которой функции $\text{card}(m \cap B)$ измеримы для всех борелевских множеств $B \subset \mathbf{G}$. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ – некоторое вероятностное пространство. Измеримое отображение $m: \Omega \rightarrow \mathcal{M}$, $\omega \in \Omega$ называется случайным точечным процессом в $\mathbf{G}$. Вероятность P на $(\mathcal{M}, \mathcal{A})$, индуцированная $m(\omega)$, называется распределением

случайного процесса прямых на плоскости.

Группа $\mathbb{M}_2$ всех евклидовых движений плоскости индуцирует группу преобразований $\mathcal{M}$ в себя (группа движений $\mathcal{M}$). Процесс $\mathbf{m}(\omega)$ называется однородным и изотропным, если его распределение P инвариантно относительно группы движений $\mathcal{M}$ ($\mathbb{M}_2$ -инвариантно).

Хорошо известным $\mathbb{M}_2$ -инвариантным случайным процессом прямых служит пуассоновский процесс прямых, управляемый мерой $\lambda \cdot dg$, где dg – инвариантная мера на $\mathbb{G}$ (см. [1], [3] и [13]), $\lambda > 0$.

Пусть $\mathbf{m}(\omega)$ – произвольный случайный процесс прямых конечной интенсивности λ , распределение которого инвариантно относительно группы евклидовых движений $\mathbb{R}^2$. Через P будем обозначать распределение процесса $\mathbf{m}(\omega)$. Нас будут интересовать маркированные точечные процессы пересечений $\{x_i, \alpha_i\}$, индуцированные процессом $\mathbf{m}(\omega)$ на фиксированной тестовой прямой g . По определению $\{x_i\} = \mathbf{m}(\omega) \cap g$ (т. е. $\{x_i\}$ – случайное множество точек пересечений прямых случайного процесса с g); марка α_i есть угол в точке x_i , под которым прямая из реализации $\mathbf{m}$ пересекает тестовую прямую g .

Пусть $\mathcal{A}_g$ является σ -алгеброй событий, соответствующая $\{x_i, \alpha_i\}$. Очевидно, что $\mathcal{A}_g \subset \mathcal{A}$. Обозначим через P_* распределение маркированного точечного процесса пересечений $\{x_i, \alpha_i\}$. P_* определена на $\mathcal{A}_g$ и является сужением P на $\mathcal{A}_g$. (Из предположения инвариантности P относительно $\mathbb{M}_2$ следует, что P_* не зависит от прямой g , на которой рассматривается процесс пересечений). Продолжение P_* на $\mathcal{A}$ единственно в классе $\mathbb{M}_2$ -инвариантных распределений и совпадает с P .

И обратно, мы можем начать со случайной последовательности $\{x_i, \alpha_i\}$, где $\{x_i\}$ – случайный точечный процесс на g , марки α_i принадлежат $(0, \pi)$. Через ρ обозначим распределение $\{x_i, \alpha_i\}$, которое является вероятностью на $\mathcal{A}_g$. Пусть $\{g_i\}$ – случайный процесс прямых, соответствующий $\{x_i, \alpha_i\}$: в множестве g_i есть прямая, пересекающая ось X в точке x_i , под углом α_i . Через P_0 обозначим распределение построенного таким способом процесса прямых $\{g_i\}$. Результаты работы касаются следующей общей проблемы стохастической геометрии: каков

класс распределений процесса $\{x_i, \alpha_i\}$, для которого P_0 $\mathbb{M}_2$ -инвариантно? Иными словами: когда $\{g_i\}$, построенный по $\{x_i, \alpha_i\}$ будет однородным и изотропным случайным процессом прямых?

В работе изучаются $\mathbb{M}_2$ -инвариантные распределения P второго порядка процессов прямых на $\mathbb{R}^2$. Рассматриваются конечномерные распределения $\{x_i\}$:

$$p_{k_1, \dots, k_m}(\tau_1, \dots, \tau_m) = P \{m : \text{card}(m \cap \tau_i) = k_i, i = 1, \dots, m\},$$

где $\tau_1, \dots, \tau_m$ – произвольные непересекающиеся интервалы прямой g , а $k_1, \dots, k_m$ – неотрицательные целые числа.

Мы будем использовать метод усреднения комбинаторных разложений, который ранее применялся при изучении процессов прямых в [4–6], [11] (см. также [2,3] и [9]). Однако там были рассмотрены только одномерные распределения $p_k(t) (m = 1)$.

Настоящее обобщение на многомерные распределения стало возможным, благодаря новой версии комбинаторной формулы Р. В. Амбарцумяна (см. [7]), где условие отсутствия коллинеарных точек не обязательно.

Основной результат работы суть формулы, связывающие конечномерные распределения точечного процесса пересечений с распределениями Пальма первого (Π_g) и второго (Π_{g_1, g_2}) порядков. Оба распределения Пальма впервые рассматривались в [1]. В частности, в [1] было показано, что Π_g и Π_{g_1, g_2} можно вычислить в терминах распределения ρ маркированного случайного точечного процесса $\{x_i, \alpha_i\}$. Следовательно, полученные нами формулы служат необходимыми условиями, для того чтобы P_0 описывала бы $\mathbb{M}_2$ -инвариантный случайный процесс прямых.

§2. КОМБИНАТОРНАЯ ФОРМУЛА Р. В. АМБАРЦУМЯНА

Предположим, что дано конечное множество точек $\{P_i\}$ на плоскости. Обозначим через ρ_{ij} отрезок с концами P_i и P_j (или его длину) и $[\rho_{ij}] = \{g \in \mathbb{G} : g \cap \rho_{ij} \neq \emptyset\}$. Пусть $\mathfrak{a}\{P_i\}$ – минимальная (конечная) алгебра подмножеств $\mathbb{G}$, содержащая все множества $[\rho_{ij}]$. Бьюффовым кольцом $Br\{P_i\}$ называется кольцо ограниченных элементов алгебры $\mathfrak{a}\{P_i\}$ (см. [2], [3], [12]).

Определение 1. Две точки P_i и P_j называются соседними, если отрезок ρ_{ij} не содержит других точек из множества $\{P_i\}$.

Через μ обозначим M_2 -инвариантную меру на $\mathbf{G}$.

Теорема. (Р. В. Амбарцумян [7]). Инвариантная мера любого множества C из кольца $B\tau\{P_i\}$ представляется линейной комбинацией расстояний ρ_{ij} между соседними точками P_i и P_j с целочисленными коэффициентами :

$$\mu(C) = \sum_{i < j} c_{ij}(C) \rho_{ij}, \quad (2)$$

где сумма $\sum_{i < j}$ берется по всем парам соседних точек множества $\{P_i\}$. Целочисленные коэффициенты c_{ij} могут быть вычислены по формуле "четыре индикаторов" :

$$c_{ij}(C) = I_C(\bar{i}^+, \bar{j}^-) + I_C(\bar{i}^-, \bar{j}^+) - I_C(\bar{i}^-, \bar{j}^-) - I_C(\bar{i}^+, \bar{j}^+), \quad (2')$$

где

$$\begin{aligned} I_C(\bar{i}^+, \bar{j}^+) &= \lim_{\substack{g \rightarrow g_{ij} \\ g \in B_1}} I_C(g), & I_C(\bar{i}^-, \bar{j}^-) &= \lim_{\substack{g \rightarrow g_{ij} \\ g \in B_2}} I_C(g), \\ I_C(\bar{i}^+, \bar{j}^-) &= \lim_{\substack{g \rightarrow g_{ij} \\ g \in B_3}} I_C(g), & I_C(\bar{i}^-, \bar{j}^+) &= \lim_{\substack{g \rightarrow g_{ij} \\ g \in B_4}} I_C(g), \end{aligned}$$

g_{ij} - прямая, проходящая через точки P_i, P_j , направленная от P_i к P_j

$B_1 = \{g \in \mathbf{G} : \text{ все точки, лежащие на прямой } g_{ij}, \text{ расположены в правой полуплоскости, относительно прямой } g_{ij}\},$

$B_2 = \{g \in \mathbf{G} : \text{ все точки, лежащие на прямой } g_{ij}, \text{ расположены в левой полуплоскости, относительно прямой } g_{ij}\},$

$B_3 = \{g \in \mathbf{G} : \text{ точка } P_i \text{ принадлежит правой полуплоскости, относительно прямой } g_{ij}, \text{ а } P_j - \text{ в левой}\}.$

$B_4 = \{g \in \mathbf{G} : \text{ точка } P_i \text{ принадлежит левой полуплоскости, ограниченной относительно прямой } g_{ij}, \text{ а } P_j - \text{ в правой}\}.$

Коэффициенты в (2') не зависят от выбора направления прямой g_{ij} .

Здесь и далее $I_A(g) = 1$, если $g \in A$ и 0 - в остальных случаях.

§3. ПЛАН ДЕЙСТВИЙ

Нижеприведенное геометрическое построение обобщает построение, использованное при изучении одномерных распределений $\{x_i, \alpha_i\}$ в [1].

Ввиду однородности и изотропности P , мы можем предполагать, что отрезки $\tau_1, \dots, \tau_m$ берутся на оси X , а левый конец отрезка τ_1 совпадает с началом координат O . (см. Рис. 1).

Заметим, что вероятность $p_{k_1, \dots, k_m}(\tau_1, \dots, \tau_m)$ на самом деле является функцией $(2m - 1)$ числовых переменных

$$p_{k_1, \dots, k_m}(t_1, \dots, t_m, \delta_1, \dots, \delta_{m-1}) = p_{\bar{k}}(\bar{t}, \bar{\delta}) = P\{\mathbf{m} : \text{card}(\mathbf{m} \cap \tau_i) = k_i, i = 1, \dots, m\}, \quad (1)$$

где $t_1, \dots, t_m$ — длины интервалов τ_i , δ_i — расстояния между τ_i (см. Рис. 1).

Рассмотрим прямоугольник R , основанием которого является объединение отрезков $\tau_1, \delta_1, \dots, \delta_{m-1}, \tau_m$ (см. Рис. 1), ширина R равна

$$|Q_1, Q_2| = |\nu_1| = |Q_3, Q_4| = |\nu_2| = l.$$

Вершины прямоугольника R обозначим через Q_i , $i = 1, \dots, 4$. Обозначим через $D_i \subset R$ прямоугольник, лежащий в R , одна из сторон которого есть отрезок τ_i , а длина другой стороны равна l (см. Рис. 1), а остальные отрезки, перпендикулярные оси X и являющиеся границами $D_1, \dots, D_m$, будем обозначать через $a_1, \dots, a_{2m-1}$ (см. Рис. 1).

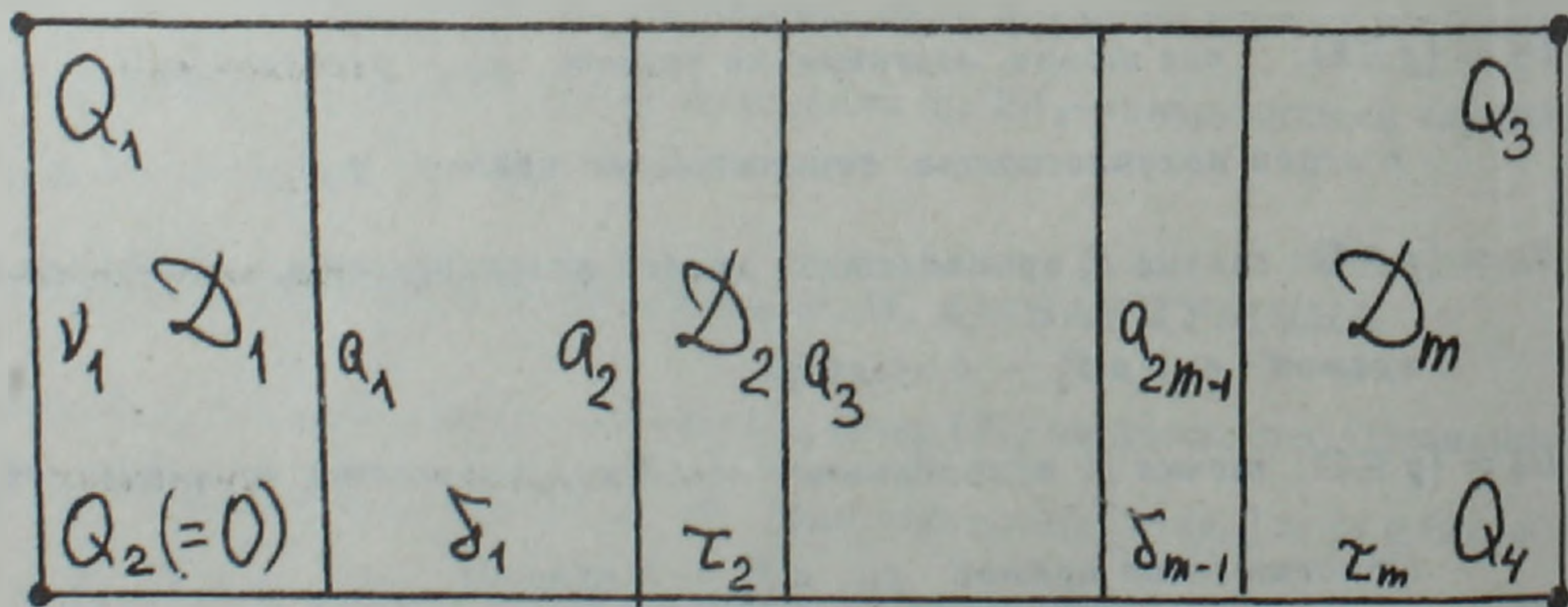


Рис. 1

Обозначим через $\mathbf{m}_R(\omega) = \{g_1, \dots, g_M\}$ прямые из реализации $\mathbf{m}(\omega)$, которые пересекают R (M – число прямых, пересекающих R). Пусть $\chi_i(g_k) = g_k \cap D_i$ – случайные хорды прямоугольника D_i , порожденные прямыми из $\{g_k\}_{k=1}^M$. Далее, пусть $\{P_j\}_{j=1}^s$ – множество точек пересечения прямых из $\mathbf{m}_R(\omega)$ с отрезками $a_1, \dots, a_{2m-1}$ и сторонами прямоугольника R . Пусть $A = [\nu_1] \cap [\nu_2]$, где $[\nu] = \{g \in \mathbf{G} : g \cap \nu \neq \emptyset\}$ и

$$B_{k_1, \dots, k_m} = B_{\bar{k}} = \{g \in \mathbf{G} : \text{card}(\mathbf{m}_R(\omega) \cap \chi_i(g)) = k_i, i = 1, \dots, m\}.$$

Легко видеть, что

$$A \cap B_{\bar{k}} \in Br\{\{P_j\} \cup \{Q_i\}\}.$$

В следующем параграфе мы запишем комбинаторную формулу (2) для инвариантной меры $A \cap B_{\bar{k}}$. В §5 мы усредним это комбинаторное разложение относительно распределения P $\mathbf{M}_2$ -инвариантного процесса прямых второго порядка. Процесс прямых называется процессом второго порядка, если первая и вторая моментные меры $\Lambda_1(\cdot)$ и $\Lambda_2(\cdot)$ локально конечны. Результат усреднения мы будем разлагать в ряд Тейлора по параметру l и выделять члены порядка l^2 ($l \rightarrow 0$). Таким способом мы приходим к требуемому результату для $p_{\bar{k}}(\bar{t}, \bar{\tau})$.

Ниже, при интегрировании комбинаторного представления, мы будем использовать следующие две формулы, которые связывают математические ожидания случайных сумм с распределениями Пальма этих процессов (случай произвольного пространства можно найти в [2], [8], [10]) :

$$E_P \sum_{g_i \in \mathbf{m}} \varphi_1(g_i, \mathbf{m}) = \int_{\mathbf{G}} d\Lambda_1(g) \int_{\mathcal{M}} \varphi_1(g, \mathbf{m}) \Pi_g(d\mathbf{m}), \quad (3)$$

$$E_P \sum_{g_i, g_j \in \mathbf{m}} \varphi_2(g_i, g_j, \mathbf{m}) = \int_{\mathbf{G} \times \mathbf{G}} \Lambda_2(dg_1, dg_2) \int_{\mathcal{M}} \varphi_2(g_1, g_2, \mathbf{m}) \Pi_{g_1, g_2}(d\mathbf{m}). \quad (4)$$

Здесь $\varphi_1 : \mathbf{G} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^1$ и $\varphi_2 : \mathbf{G} \times \mathbf{G} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^1$ – неотрицательные измеримые функции, Π_g и Π_{g_1, g_2} – распределения Пальма $\mathbf{m}(\omega)$ первого и второго порядков. В действительности, тождества (3) и (4) могут служить определениями Π_g и Π_{g_1, g_2} , соответственно. Заметим, однако, что Π_g и Π_{g_1, g_2} имеют интуитивное толкование как условные распределения процесса прямых $\mathbf{m}(\omega)$ при условии, что в $g \in \mathbf{G}$ (или в $(g_1, g_2) \in \mathbf{G} \times \mathbf{G}$) имеются прямые из $\mathbf{m}(\omega)$.

Так как первая моментная мера наследует свойство $\mathbb{M}_2$ -инвариантности, то

$$\Lambda_1(B) = \lambda \mu(B), \quad (5)$$

где μ – инвариантная мера в $\mathbf{G}$, $\lambda > 0$ называется интенсивностью P .

Мы предполагаем также, что вторая моментная мера $\Lambda_2(\cdot)$ абсолютно непрерывна относительно $dg_1 dg_2$:

$$\Lambda_2(dg_1 dg_2) = f(g_1, g_2) dg_1 dg_2, \quad (6)$$

где плотность $f(g_1, g_2)$ непрерывна.

§4. КОМБИНАТОРНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ

Теперь в (2) мы возьмем $C = A \cap B_{\bar{k}}$, а сумма в правой части (2) распространяется на все пары соседних точек множества $\{P_j\}_{j=1}^2 \cup \{Q_i\}_{i=1}^4$. Это множество пар соседних точек разбивается на четыре непересекающиеся подмножества, на которых коэффициенты $c_{ij}(A \cap B_{\bar{k}})$ вычисляются по одной и той же формуле. Следовательно

$$\mu(A \cap B_{\bar{k}}) = \sum_{i=1}^4 A_i, \quad (7)$$

где

$$A_1 = \sqrt{t^2 + l^2} \cdot I(Q_1, Q_4) + \sqrt{t^2 + l^2} \cdot I(Q_2, Q_3) - t \cdot I(Q_1, Q_3) - t \cdot I(Q_2, Q_4), \quad (8)$$

$$A_2 = 2 \sum_{g_n \in A} \sum_{i=1}^m |\chi_i(g_n)| \cdot [I_{k_i-1}(\chi_i) - I(\chi_i)], \quad (9)$$

$$A_3 = \sum_{P_i, P_j} |t_{ij}| \cdot [I_d(t_{ij}) - I_s(t_{ij})] I_A(t_{ij}) w_{ij}(\bar{k}), \quad (10)$$

$$A_4 = \sum_{i=1}^4 \sum_{P_j} |\beta_{ij}| \cdot I_A(\beta_{ij}) [I_d(\beta_{ij}) - I_s(\beta_{ij})] \cdot [I_{k_i-1}(\beta_{ij}) - I(\beta_{ij})]. \quad (11)$$

Здесь t – длина интервала $Q_2 Q_4$; I_{k_i-q} – индикаторная функция множества

$$B_{\bar{k}(k_i-q)} = \{g \in \mathbf{G} : \text{card}(\mathbf{m}_R(\omega) \cap \tau_j) = k_j, j \neq i$$

и $\text{card}(\mathbf{m}_R(\omega) \cap \tau_i) = k_i - q\}$, $q = 1, 2$,

I_{k_i-1, k_j-1} – индикаторная функция множества

$$B_{\bar{k}(k_i-1)(k_j-1)} = \{g \in \mathbf{G} : \text{card}(\mathbf{m}_R(\omega) \cap \tau_n) = k_n, n \neq i, j \\ \text{и } \text{card}(\mathbf{m}_R(\omega) \cap \tau_s) = k_s - 1, s = i, j\},$$

$I_{B_{\bar{k}}} \equiv I$; t_{ij} – отрезок типа $P_i P_j$ и $g_{ij} \notin \mathbf{m}$; $|\cdot|$ – лебегова длина; $w_{ij}(\bar{k})$ – алгебраическая сумма индикаторов типа I , I_{k_i-q} и I_{k_i-1, k_j-1} и зависит от расположения t_{ij} ; β_{ij} – отрезок типа $Q_i P_j$; $I_d(t_{ij}) = 1$, если хорды χ_l и χ_n прямоугольников D_l и D_n ($P_i \in \partial D_l$, $P_j \in \partial D_n$) лежат в разных полуплоскостях, ограниченных прямой g_{ij} ; $I_s(\cdot) = 1 - I_d(\cdot)$; $I_d(\beta_{ij})$ (см. на Рис. 2.)

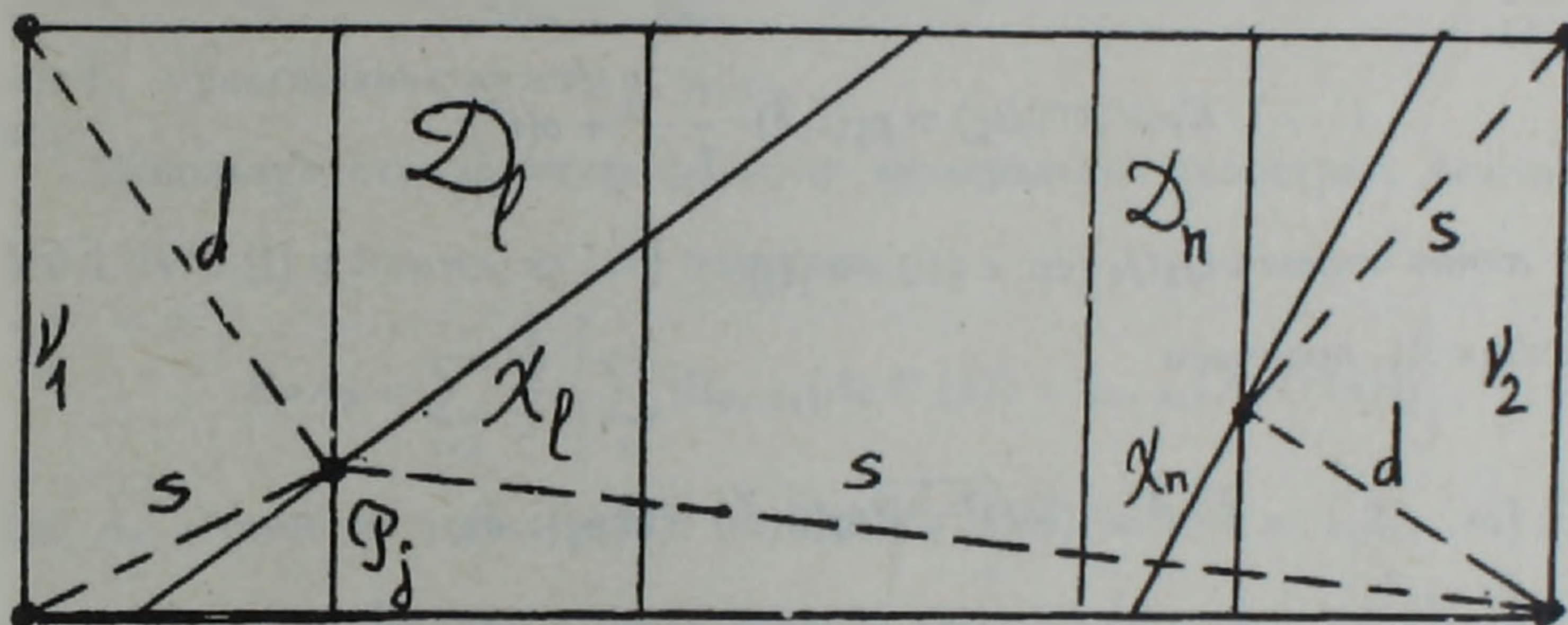


Рис. 2 P_j – конец хорды χ_l . Пунктирные линии соединяют $Q_i P_j$. Тип отрезка $Q_i P_j$ зависит от направления отрезков ν_1 (или ν_2) и χ_l , которые исходят из конца отрезка $Q_i P_j$. Отрезок $Q_i P_j$ имеет тип s , если оба последних отрезка лежат в одной полуплоскости относительно прямой $g_{Q_i P_j}$, и тип d – в противном случае.

Заметим, что последние два слагаемых в выражении A_1 являются результатом суммирования слагаемых, соответствующих соседним парам, лежащим на $Q_1 Q_3$ или $Q_2 Q_4$.

§5. ИНТЕГРИРОВАНИЕ КОМБИНАТОРНОГО РАЗЛОЖЕНИЯ (2)

Пусть P – распределение случайного процесса прямых, $\mathbf{M}_2$ -инвариантного, второго порядка и с вероятностью 1 не имеющего в реализации пар параллельных прямых. Нашей целью является усреднение относительно P комбинаторного

разложения (7), зависящего от $m \in M$. Полученные величины зависят от параметра l ($l \rightarrow 0$). Мы будем выписывать ниже главные члены, которые имеют порядок l^2 .

Интегрируя по P левую часть (7) и применяя теорему Фубини, получаем

$$E_P \mu(A \cap B_k^-) = \int_A E_P l(g) dg = \int_A p_k^-(\chi_1(g), \dots, \chi_m(g)) dg. \quad (12)$$

Здесь E_P обозначает математическое ожидание относительно распределения P и

$$p_k^-(\chi_1(g), \dots, \chi_m(g)) = E_P l(g) = P(g \in B_k^-) = p_k^-(\bar{\chi}(g), \bar{\delta}(g)). \quad (13)$$

Предполагая, что l стремится к нулю, выделим главный член в (12):

$$E_P \mu(A \cap B_k^-) = p_k^-(\bar{t}, \bar{\delta}) \cdot \frac{1}{t} \cdot l^2 + o(l^2), \quad (14)$$

где t — длина отрезка $Q_2 Q_4$ (ср. с §10.4 в [1]).

Переходя к A_1 , получаем

$$E_P A_1 = 2\sqrt{t^2 + l^2} p_k^-(\bar{d}, \bar{\delta}') - 2t p_k^-(\bar{t}, \bar{\delta}),$$

где $d_i = (Q_2, Q_3) \cap D_i$, $i = 1, \dots, m$ и $\delta'_1, \dots, \delta'_m$ пробелы между d_i .

Так как $\sqrt{t^2 + l^2} = t + \frac{l^2}{2t^2} + o(l^2)$, $d_i - t_i = \frac{t_i}{2t^2} l^2 + o(l^2)$ и $\delta'_i - \delta_i = \frac{\delta_i}{2t^2} l^2 + o(l^2)$, то

$$E_P A_1 = p_k^-(\bar{t}, \bar{\delta}) \cdot \frac{l^2}{t} + \sum_{i=1}^m \frac{\partial p_k^-(\bar{t}, \bar{\delta})}{\partial t_i} \frac{t_i}{t} \cdot l^2 + \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\partial p_k^-(\bar{t}, \bar{\delta})}{\partial \delta_i} \frac{\delta_i}{t} \cdot l^2 + o(l^2). \quad (15)$$

Используя формулы (3) и (5), находим

$$E_P A_2 = 2\lambda \int_A dg \sum_{i=1}^m |\chi_i(g)| \cdot [\pi_{k_i-1}(\bar{\chi}(g), \bar{\delta}(g)) - \pi_k(\bar{\chi}(g), \bar{\delta}(g))],$$

где

$$\pi_k(\bar{\chi}(g), \bar{\delta})(g) = \Pi_g(A_k^-), \quad \pi_{k_i-1}(\bar{\chi}(g), \bar{\delta}(g)) = \Pi_g(A_{k_i-1}^-),$$

$$A_k^- = \{m(\omega): \text{card}(m_R(\omega) \cap \chi_i(g)) = k_i, i = 1, \dots, m\},$$

$$A_{k_i-1}^- = \{m(\omega): \text{card}(m_R(\omega) \cap \chi_j(g)) = k_j, j \neq i, \text{card}(m_R(\omega) \cap \chi_i(g)) = k_i - 1\}.$$

Нетрудно выделить главный член в выражении $E_P A_2$ при $l \rightarrow 0$. Получим

$$E_P A_2 = \frac{2\lambda}{l} \sum_{i=1}^m t_i [\pi_{k_i-1}(\bar{l}, \bar{\delta} - \pi_{\bar{k}}(\bar{l}, \bar{\delta}))] l^2 + o(l^2). \quad (16)$$

Аналогично, используя формулы (4), (6), получим

$$E_P A_3 = \sum_{i < j} \int_{x_1 \in a_i} dg_1 \int_{x_2 \in a_j} dg_2 t'_{ij} [I_d(t_{ij} - I_s(t_{ij})) f(g_1, g_2) \cdot E_{g_1, g_2}(\omega_{ij}(\bar{k}))], \quad (17)$$

где $x_1 = a_i \cap g_1$, $x_2 = a_j \cap g_2$ и E_{g_1, g_2} обозначает математическое ожидание относительно распределения Пальма второго порядка Π_{g_1, g_2} , t'_{ij} — длина отрезка между x_1 и x_2 .

Лемма.

$$\int_{a_i} dx_1 \int_{a_j} dx_2 I_A t'_{ij} = \frac{t_{ij}^2}{l} l^2 + o(l^2),$$

где t_{ij} — расстояние между a_i и a_j .

Используя стандартную формулу интегральной геометрии, результат в §10.3, IV в [1] и Лемму, из (17) получаем

$$E_P A_3 = \sum_{i < j} \frac{t_{ij}^2}{l} \left[\sum_n [\Pi_{x_1, x_2}(A_n \cap \{d\}) - \Pi_{x_1, x_2}(A_n \cap \{s\})] \right], \quad (18)$$

где A_n — событие типа $\{m(\omega): \text{card}(m_R(\omega) \cap \tau_i) = k_i, i = 1, 2, \dots, m\}$; Π_{x_1, x_2} — распределение Пальма второго порядка процесса $\{x_i, \alpha_i\}$, (т.е. $\Pi_{x_1, x_2}(A)$ есть условная вероятность события A при условии, что имеются пересечения в точках x_1, x_2).

Рассуждая как в работе [6] и §10.4 в [1], получаем

$$E_P A_4 = -2E_P A_2 - 2E_P A_3 + o(l^2). \quad (19)$$

Приравнивая коэффициенты порядка l^2 в правой и левой частях усредненной формулы (7), из (14) — (18) получаем требуемый результат :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \frac{\partial p_{\bar{k}}(\bar{l}, \bar{\delta})}{\partial t_i} t_i + \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\partial p_{\bar{k}}(\bar{l}, \bar{\delta})}{\partial \delta_i} \delta_i &= 2\lambda \sum_{i=1}^m t_i [\pi_{k_i-1}(\bar{l}, \bar{\delta} - \pi_{\bar{k}}(\bar{l}, \bar{\delta}))] + \\ &+ \sum_{i < j} t_{ij}^2 \left[\sum_n [\Pi_{x_1, x_2}(A_n \cap \{d\}) - \Pi_{x_1, x_2}(A_n \cap \{s\})] \right]. \end{aligned} \quad (20)$$

Как уже упоминалось во введении это уравнение является необходимым условием для того, чтобы случайная последовательность $\{x_i, \alpha_i\}$ порождала $\mathbb{M}_2$ -инвариантный процесс прямых на плоскости.

§6. ОБСУЖДЕНИЕ

Результат (20) приводит к следующей задаче : каков класс распределений p процессов $\{x_i, \alpha_i\}$, для которых последнее слагаемое обращается в нуль? В самом деле, предположение, что $\{\alpha_i\}$ – последовательность независимых углов, является достаточным. Однако, это предположение, как показывает следующее построение, может быть слишком сильным.

Пусть p – распределение произвольного процесса $\{x_i, \alpha_i\}$, для которого последовательность $\{\alpha_i\}$, как и последовательности $\{x_i\}$ и $\{\alpha_i\}$ могут быть зависимыми. Преобразуем этот процесс в процесс $\{x_i, \alpha'_i\}$ следующим образом. Пусть $\{\varepsilon_i\}$ – последовательность Бернулли независимых случайных величин, $\varepsilon_i = 1$ с вероятностью $1/2$ и $\varepsilon_i = 0$ с вероятностью $1/2$.

1) точки x_i остаются без изменения.

$$2) \alpha'_i = \begin{cases} \alpha_i, & \text{если } \varepsilon_i = 1 \\ \pi - \alpha_i, & \text{если } \varepsilon_i = 0. \end{cases}$$

Для процесса $\{x_i, \alpha'_i\}$ последнее слагаемое в (20) обращается в нуль, т. е. (20) принимает вид

$$\sum_{i=1}^m \frac{\partial p_{\bar{k}}(\bar{t}, \bar{\delta})}{\partial t_i} t_i + \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\partial p_{\bar{k}}(\bar{t}, \bar{\delta})}{\partial \delta_i} \delta_i = 2\lambda \sum_{i=1}^m t_i [\pi_{k_i-1}(\bar{t}, \bar{\delta}) - \pi_{\bar{k}}(\bar{t}, \bar{\delta})]. \quad (21)$$

Ниже, в следующей теореме, отсутствие последнего слагаемого в (20) рассматривается как условие описания специального класса распределений p , и называется “условие (21)”.

Теорема. Если маркированный точечный процесс $\{x_i, \alpha_i\}$ удовлетворяет условию (21) и распределение Пальма первого порядка P_g совпадает с P , то точечный процесс $\{x_i\}$ является пуассоновским, т. е.

$$p_{\bar{k}}(\bar{t}, \bar{\delta}) = \prod_{i=1}^m \frac{(2\lambda t_i)^{k_i}}{k_i!} \exp(-2\lambda t_i).$$

Доказательство. Для простоты предположим, что нет пропусков между t_i . Обозначим через $\Phi(\bar{t}, \bar{z})$ производящую функцию вероятностей $p_{\bar{k}}(\bar{t})$, т. е.

$$\Phi(\bar{t}, \bar{z}) = \sum_{\bar{k}} p_{\bar{k}}(\bar{t}) \cdot \bar{z}^{\bar{k}}$$

и $\Phi(\bar{0}, \bar{z}) = 1$ для всех $\bar{z}$. Перепишем уравнение (21) для функции Φ , получаем

$$\sum_{i=1}^m \frac{\partial \Phi(\bar{t}, \bar{z})}{\partial t_i} t_i = 2\lambda \sum_{i=1}^m t_i (z_i - 1) \cdot \Phi(\bar{t}, \bar{z}). \quad (22)$$

Заметим, что для производящей функции пуассоновского точечного процесса, т.е. для $\Phi(\bar{t}, \bar{z}) = \exp \left(2\lambda \sum_{i=1}^m t_i (z_i - 1) \right)$, справедливо уравнение (22).

Будем искать решения уравнения (22) в виде

$$\Phi(\bar{t}, \bar{z}) = \exp \left(2\lambda \sum_{i=1}^m t_i (z_i - 1) \right) \cdot F(\bar{t}, \bar{z}), \quad (23)$$

где

$$F(\bar{0}, \bar{z}) = 1 \quad \text{для всех } \bar{z}. \quad (24)$$

Подставляя (23) в (22), получим уравнение для $F(\bar{t}, \bar{z})$:

$$\sum_{i=1}^m \frac{\partial F(\bar{t}, \bar{z})}{\partial t_i} t_i = 0. \quad (25)$$

Это хорошо известное уравнение Эйлера для однородных функций порядка 0, т.е.

$$F(\bar{t}, \bar{z}) = F(k\bar{t}, \bar{z}) \quad \text{для всех } k > 0$$

общее решение уравнения (24). Если $k \rightarrow 0$, то из (24) получаем, что $F(\bar{t}, \bar{z}) \equiv 1$.

Теорема доказана.

ABSTRACT. Let homogeneous and isotropic line process in the plane be given. The marked point process of intersections with angular marks generated on a test line is investigated. By the method of integration of a version Ambartzumian's combinatorial formula we obtain formulae connecting finite dimensional distributions of the point process of intersections with the first and the second order Palm distributions of the line process.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. В. Амбарцумян, Й. Мекке, Д. Штоян, Введение в Стохастическую Геометрию, М., Наука, 1989.
2. Й. Керстан, К. Маттес, Й. Мекке, Безгранично Делимые Точечные Процессы, М., Наука, 1982.
3. R. V. Ambartzumian, Combinatorial Integral Geometry with Applications to Mathematical Stereology. John Wiley and Sons, Chichester, 1982.
4. V. K. Oganian, "On Palm distributions of processes of lines in the plane," Stochastic Geometry, Geometric Statistics, stereology, eds. by R. V. Ambartzu-

- mian and W. Weil, Teubner Texte zur Mathematik, vol. 65, pp. 124 – 132, 1984.
5. В. К. Оганян, "Комбинаторные принципы в стохастической геометрии случайных процессов отрезков", ДАН Арм. ССР, т. 68, стр. 150 – 154, 1979.
 6. V. K. Oganian, "Combinatorial decompositions and homogeneous geometrical processes," Acta Applicandae Math., vol. 9, pp. 71 – 81, 1987.
 7. R. V. Ambartzumian, "Beyond the Buffon needle," Preprint, 1993.
 8. R. V. Ambartzumian, "Probability distribution in Stereology of random geometrical processes," in Recent Trends in Math., Reinhardbrunn (collection of papers), BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, vol. 50, pp. 5 – 12, 1982.
 9. R. V. Ambartzumian, "Factorization in integral and stochastic geometry," Teubner Texte zur Mathematik, vol. 65, pp. 14 – 33, 1984.
 10. O. Kallenberg, Random Measures, Akademie Verlag, Berlin, Reading, Mass., 1983.
 11. В. К. Оганян, "О распределении длины "типичного" ребра случайного разбиения", Изв. АН Армении, Математика, т. 19, стр. 248 – 256, 1984.
 12. R. V. Ambartzumian, "Stochastic geometry from the standpoint of integral geometry," Adv. Appl. Prob., vol. 9, pp. 792 – 823, 1977.
 13. Л. Сантало, Интегральная Геометрия и Геометрические Вероятности, М., Наука, 1983.
 14. D Stoyan, W. S. Kendall and J. Mecke, Stochastic Geometry and its Applications, John Wiley, Chichester, 1987.

22 Октября 1993

Ереванский государственный
университет