

КЛАССЫ ХАРДИ И ФОРМУЛЫ СРЕДНЕГО ЗНАЧЕНИЯ ДЛЯ ОБОБЩЕННЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ШАРЕ

А. И. Хейфиц

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
том 28, №5, 1993

Классы Харди $H^p(c)$ были введены обычным образом для непрерывных решений уравнения $\Delta u - c(x)u = 0$ в единичном круге $B \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, где Δ – лапласиан, $c \geq 0$ и $c \in L^s(B)$, $s > n$. Были получены представления для функций $u \in H^p(c)$, $1 \leq p \leq \infty$, имеющих вид обобщенного интеграла Пуассона (или интеграла Пуассона-Стилтьеса при $p = 1$). Исследовано поведение функций на границе. В частности, доказан аналог теоремы Фату о существовании почти всюду некасательных граничных значений. Получены и исследованы формулы средних значений.

1. В этой работе рассматриваем обобщенные гармонические функции, т.е. функции, гармонические относительно оператора Шредингера $L_c = -\Delta + c(x)I$, где Δ – лапласиан, I – тождественный оператор, а свойства потенциала c будут описаны ниже.

Пусть Ω – ограниченная область в евклидовом пространстве R^n , $n \geq 2$. Через $C(\Omega)$ обозначим класс неотрицательных функций $c(x)$, $x \in \Omega$ таких, что $c \in L^s_{loc}(\Omega)$ с некоторым $s > n/2$ при $n \geq 4$ и $s = 2$ при $n = 2, 3$. Если $c \in C(\Omega)$, то оператор L_c можно стандартным образом расширить с $C_0^\infty(\Omega)$ до самосопряженного в $L^2(\Omega)$. Разумеется, это продолжение возможно при значительно менее жестких ограничениях на потенциал, однако при $c \in C(\Omega)$ продолженный оператор L_c имеет в Ω функцию Грина $G(x, y)$ с необходимыми свойствами.

Непрерывная функция $u : \Omega \rightarrow R$ называется обобщенной гармонической функцией [1],[2] (о.г.ф.), если в каждой точке $x \in \Omega$ при всех r , $0 < r < r(x)$ она удовлетворяет обобщенному равенству средних значений :

$$u(x) = \int_{S(x,r)} u(y) \frac{\partial G_r(x,y)}{\partial n(y)} d\sigma(y).$$

Здесь G_r – функция Грина оператора L_c в круге $B(x, r) = \{y \in R^n : |x - y| < r\}$ с нулевыми граничными условиями на сфере $S(x, r) = \partial B(x, r)$, $d\sigma$ – поверхностная

мера на $S(x, r)$, а $\frac{\partial}{\partial n}$ — производная по внутренней нормали. Естественно назвать этот интеграл обобщенным интегралом Пуассона или s -интегралом Пуассона. Класс о.г.ф. обозначим через $H(s, \Omega)$. В случае $s = 0$, о.г.ф. — обычные гармонические функции. Как и при $s = 0$ определение о.г.ф. равносильно равенству $L_s u = 0$, понимаемому в смысле распределений. Некоторые свойства о.г.ф. как решений уравнения в частных производных рассмотрены, например, в [3]–[6], но систематическое их изучение с точки зрения теории функций началось недавно [7]–[13].

В этой работе мы вводим для о.г.ф. в единичном шаре $B = B(0, 1)$ аналоги классов Харди H^p . О.г.ф. из этих классов представляются в виде обобщенных интегралов Пуассона, либо Пуассона-Стилтьеса. С помощью этих представлений для о.г.ф. доказывается аналог теоремы Фату о существовании почти всюду некасательных граничных значений. Наконец, мы выводим из этих представлений формулы средних значений для о.г.ф.. Эти формулы дополняют результаты Г. Р. Оганесяна [14].

2. Для $x \in R^n$ обозначим $r = |x|$, $\theta = x/r \in S = \partial B$.

Классы Харди о.г.ф. определим обычным образом, а именно, обозначим через $H^p(s)$ семейство тех функций $u \in H(s, B)$, для которых

$$\|u\|_{H^p(s)} = \sup_{0 < r < 1} \left\{ \int_S |u(r, \theta)|^p d\sigma(\theta) \right\}^{1/p} < \infty.$$

Отметим, что монотонность и выпуклость различных усреднений о.г.ф. рассматривались в [2], [7], [8].

В этом параграфе будут получены представления в виде обобщенных интегралов Пуассона для функций из классов $H^p(s)$. Тем самым, дается решение некоторой задачи Дирихле в шаре для оператора L_s . Однако известно [6], что если потенциал s при приближении к границе области достаточно быстро растет, то эта задача Дирихле может не иметь решения. В то же время определение класса $C(\Omega)$ не накладывает никаких ограничений на поведение входящих в этот класс функций вблизи границы. Поэтому далее мы сузим рассматриваемую совокупность потенциалов. Через $C_1(B)$ обозначим класс таких $s \in C(B)$, что $s \in L^1(B)$ с некоторым $\alpha > n$.

Нижеследующие доказательства в существенном следуют рассуждениям в случае $c(x) = 0$ (см., например [15], гл. 1). Однако появляется принципиальное отличие, состоящее в том, что c -ядро Пуассона не является аппроксимативной единицей.

Связанная с этим трудность преодолевается благодаря тому, что при $c \in C_1(B)$ шар B является регулярной областью для задачи Дирихле относительно оператора L_c . Необходимые в дальнейшем свойства функции Грина G изложены в [3],[8],[11]. Отметим лишь следующее :

при $x \in B, \theta \in S \quad G(x, \theta) = 0$;

при $|x - y| \rightarrow 0, G$ нормирована условием

$$G(x, y) \sim \begin{cases} -\gamma_2 \ln |x - y|, & n = 2 \\ \gamma_n |x - y|^{2-n}, & n \geq 3, \end{cases}$$

где $\gamma_2 = (2\pi)^{-1}$, $\gamma_n = ((n-2)\sigma_n)^{-1}$, при $n \geq 3$ и σ_n - площадь поверхности единичной сферы S в $\mathbb{R}^n$;

если $c \in C_1(\bar{B})$, то $\frac{\partial G(x, \theta)}{\partial n(\theta)}$ положительна и непрерывна при $x \in B$ и $\theta \in S$;

$G(x, y) \leq g(x, y)$, где g - функция Грина лапласиана.

Пусть $y_0 \in S$ - граничная точка, а $y \in B$ лежит на внутренней нормали к y_0 .

Переписывая последнее неравенство в виде $G(x, y) - G(x, y_0) \leq g(x, y) - g(x, y_0)$

(напомним, что $G(x, y_0) = g(x, y_0) = 0$), деля на $|y - y_0|$ и устремляя $y \rightarrow y_0$,

приходим к неравенству

$$\frac{\partial G(x, \theta)}{\partial n(\theta)} \leq \frac{\partial g(x, \theta)}{\partial n(\theta)}. \quad (1)$$

Иными словами, c -ядро Пуассона мажорируется гармоническим ядром Пуассона.

Лемма 1. Если $c \in C_1(B)$, то для любой функции $u \in H^p(c)$, $1 \leq p \leq \infty$,

найдется функция $f \in L^p(S)$ такая, что при всех $x \in B$

$$u(x) = \int_S f(\theta) \frac{\partial G(x, \theta)}{\partial n(\theta)} d\sigma(\theta). \quad (2)$$

Если $u \in H^1(c)$, то существует конечная (не обязательно положительная)

борелевская мера μ такая, что при всех $x \in B$

$$u(x) = \int_S \frac{\partial G(x, \theta)}{\partial n(\theta)} d\mu(\theta). \quad (3)$$

Доказательство. Сначала рассмотрим случай $p > 1$. Пусть $\{r_l\}_{l=1}^{\infty}$ – последовательность положительных чисел, монотонно возрастающих к 1: $0 < r_1 < r_2 < \dots < r_l \uparrow 1, l \rightarrow \infty$. Положим $u_l(\theta) = u(x)$ для $|x| = r_l, \theta \in S, l = 1, 2, \dots$. Так же как в [15] доказывается, что для некоторой подпоследовательности $\{l_j\}_{j=1}^{\infty}$ и для каждой функции $k \in L^q(S), p^{-1} + q^{-1} = 1$ существует предел $Lk = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_S k(\theta) u_{l_j}(\theta) d\sigma(\theta)$, который является ограниченным линейным функционалом на $L^q(S)$. Поэтому найдется функция $f \in L^p(S)$ такая, что

$$Lk = \int_S k(\theta) f(\theta) d\sigma(\theta). \quad (4)$$

Рассмотрим функции $v_l(x) = u(r_l x)$, которые являются c_l -гармоническими с потенциалом $c_l(x) = r_l^2 c(r_l x), |x| < 1$ в большом шаре $B(O, r_l^{-1})$. Отметим, что $v_l(\theta) = u_l(\theta), \theta \in S$. Представим $v_{l_j}(\theta), j = 1, 2, \dots$ в B по обобщенной формуле Пуассона-Иенсена [11], [13]:

$$v_{l_j}(x) = \int_S v_{l_j}(\theta) \frac{\partial G^{[l_j]}(x, \theta)}{\partial n(\theta)} d\sigma(\theta).$$

Здесь $G^{[l_j]}$ – функция Грина оператора L_{c_l} в B . В силу неравенства (1), $k_o(\theta) = \frac{\partial G^{[l_j]}(x, \theta)}{\partial n(\theta)} \in L^q(S)$ при любом фиксированном $x \in B$. Следовательно, по формуле (4)

$$Lk_o = \int_S f(\theta) \frac{\partial G^{[l_j]}(x, \theta)}{\partial n(\theta)} d\sigma(\theta).$$

С другой стороны, по определению функционала L имеем

$$\begin{aligned} Lk_o &= \lim_{j \rightarrow \infty} \int_S u_{l_j}(\theta) \frac{\partial G^{[l_j]}(x, \theta)}{\partial n(\theta)} d\sigma(\theta) = \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \int_S v_{l_j}(\theta) \frac{\partial G^{[l_j]}(x, \theta)}{\partial n(\theta)} d\sigma(\theta). \end{aligned}$$

Но последний интеграл равен $v_{l_j}(x)$ по определению о.г.ф.. Ввиду непрерывности последних получаем $Lk_o = \lim_{j \rightarrow \infty} v_{l_j}(x) = u(x)$, т.е.

$$u(x) = \int_S f(\theta) \frac{\partial G^{[l_j]}(x, \theta)}{\partial n(\theta)} d\sigma(\theta).$$

Переходя здесь к пределу при $j \rightarrow \infty$ под знаком интеграла, с учетом (1) и теоремы о мажорированной сходимости, приходим к представлению (2).

При $p = 1$, ввиду непрерывности $\frac{\partial G}{\partial n}$, рассуждения аналогичны случаю $c = 0$.

Лемма 2. Если $s \in C_1(B)$, $u \in H(s, B)$ и $u > 0$, то u представима по формуле (3), где μ — положительная мера.

Доказательство. По теореме Zhao [16] найдется постоянная $A > 0$ такая, что $G(x, y) \geq Ag(x, y)$ для всех $x, y \in B$. И, следовательно, аналогично неравенству (1), для всех $x \in B$, $\theta \in S$, имеет место неравенство

$$\frac{\partial G(x, \theta)}{\partial n(\theta)} \geq A \frac{\partial g(x, \theta)}{\partial n(\theta)}.$$

Теперь по определению о.г.ф. и формуле Пуассона–Йенсена [8],[13] при всех r , $0 < r < 1$, получаем (см. доказательство Леммы 1)

$$\begin{aligned} u(0) &= \int_S u(r, \theta) \frac{\partial G^{[r]}(0, \theta)}{\partial n(\theta)} d\sigma(\theta) = \int_S |u(r, \theta)| \frac{\partial G^{[r]}(0, \theta)}{\partial n(\theta)} d\sigma(\theta) \geq \\ &\geq A \int_S |u(r, \theta)| \frac{\partial g^{[r]}(0, \theta)}{\partial n(\theta)} d\sigma(\theta) \geq A_1 \int_S |u(r, \theta)| d\sigma(\theta), \end{aligned}$$

где постоянный множитель можно, очевидно, выбрать не зависящим от r , $0 < r < 1$. Таким образом, $u \in H^1(s)$, т. е. согласно Лемме 1 1, u Допускает представление (3), где мера μ положительна.

Утверждения, обратные к Леммам 1 и 2, непосредственно следуют из аналогичных свойств обычных гармонических функций, неравенства (1) и того факта, что интегралы (2)-(3) являются s -гармоническими функциями [8],[13]. Поэтому справедлива

Теорема 1. Пусть $s \in C_1(B)$. Для того, чтобы о.г.ф. $u \in H^p(s)$, $1 \leq p \leq \infty$ необходимо и достаточно, чтобы u можно было представить в виде (3) с конечной мерой μ . При $p > 1$ эта мера абсолютно непрерывна: $d\mu(\theta) = f(\theta)d\sigma(\theta)$, где $f \in L^p(S)$, а в случае $u > 0$ эта мера положительна.

3. Изучим граничные свойства о.г.ф. классов $H^p(s)$, $1 \leq p \leq \infty$.

Теорема 2. Пусть $s \in C_1(B)$ и о.г.ф. u задается формулой (2). Тогда

1) если f непрерывна на S , то для всех $\theta \in S$ существует равномерный на S предел

$$\lim_{r \rightarrow 1} u(x) = f(\theta), \quad (5)$$

2) если $f \in L^1(S)$, то предел (5) существует почти всюду на S .

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} u(x) - f(\theta) &= \int_{\psi \in S: |\psi - \theta| < \delta} [f(\psi) - f(\theta)] \frac{\partial G(x, \psi)}{\partial n(\psi)} d\sigma(\psi) + \\ &+ \int_{\psi \in S: |\psi - \theta| \geq \delta} [f(\psi) - f(\theta)] \frac{\partial G(x, \psi)}{\partial n(\psi)} d\sigma(\psi) + \\ &+ f(\theta) \left\{ \int_S \frac{\partial G(x, \psi)}{\partial n(\psi)} d\sigma(\psi) - 1 \right\} \equiv I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

Слагаемые I_1 и I_2 мажорируются аналогичными интегралами

$$\int |f(\psi) - f(\theta)| \frac{\partial g(x, \psi)}{\partial n(\psi)} d\sigma(\psi),$$

которые, если $f \in L^1(S)$, стремятся к нулю при $r \rightarrow 1$. Тогда так как $c \in C_1$, то шар B c -регулярен относительно задачи Дирихле для оператора L_c [6],[11].

Поэтому

$$\lim_{r \rightarrow 1} \int_S \frac{\partial G(x, \psi)}{\partial n(\psi)} d\sigma(\psi) = 1.$$

Это означает, что $\lim_{r \rightarrow 1} I_3 = 0$, если $|f(\theta)| < \infty$, т.е. почти всюду в случае 2).

Следствие. Пусть $c \in C_1(B)$ и о.г.ф.

$$u(x) = \int_S \frac{\partial G(x, \theta)}{\partial n(\theta)} d\mu(\theta),$$

где μ — мера (не обязательно положительная) конечной вариации на S . Пусть $d\mu(\theta) = f(\theta)d\sigma(\theta) + d\lambda(\theta)$ — ее лебегово разложение на абсолютно непрерывную и сингулярную компоненты относительно поверхностной меры на S . Тогда для почти всех $\theta \in S$ существует предел $\lim_{r \rightarrow 1} u(x) = f(\theta)$.

Доказательство. Положим $u(x) = u_f(x) + u_\lambda(x)$, где

$$u_\lambda(x) = \int_S \frac{\partial G(x, \theta)}{\partial n(\theta)} d\lambda(\theta),$$

а u_f имеет вид (2). Так как $f \in L^1(S)$, то согласно Теореме 2 существует предел $\lim_{r \rightarrow 1} u_f(x) = f(\theta)$ для почти всех $\theta \in S$. Тогда $|\lambda|$ — сингулярная мера вместе с λ , и благодаря (1) $|u_\lambda(x)| \leq \int_S \frac{\partial g(x, \theta)}{\partial n(\theta)} |d\lambda(\theta)| \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 1$, почти всюду на S [15].

Теорема 2 справедлива также для всех ψ , удовлетворяющих условию $|f(\psi)| = \infty$.

Теорема 3. Если $s \in C_1(B)$ и о.г.ф. u имеет место представление (2) с $f \in L^1(S)$, причем $\lim_{\theta \rightarrow \psi} f(\theta) = \infty$. Тогда $\lim_{r \rightarrow 1} u(x) = \infty$.

Доказательство. При фиксированном $\delta > 0$ запишем

$$u(x) = \int_{|\psi - \theta| < \delta} f(\theta) \frac{\partial G(x, \theta)}{\partial n(\theta)} d\sigma(\theta) + \int_{|\psi - \theta| \geq \delta} f(\theta) \frac{\partial G(x, \theta)}{\partial n(\theta)} d\sigma(\theta) \equiv I_1 + I_2.$$

Пусть $f(\psi) = +\infty$. Для произвольного числа $M > 0$ выберем такое $\delta > 0$, что $f(\theta) > M$ при $|\theta - \psi| < \delta$. Вновь используя результат [16], получаем оценку

$$I_1 \geq A M \int_{|\psi - \theta| < \delta} \frac{\partial g(x, \theta)}{\partial n(\theta)} d\sigma(\theta) \geq A \frac{M}{2},$$

и последняя величина может быть сделана сколь угодно большой вместе с M . С другой стороны, соотношение

$$|I_2| \leq \int_{|\psi - \theta| \geq \delta} |f(\theta)| \frac{\partial g(x, \theta)}{\partial n(\theta)} d\sigma(\theta) = o(1), \quad r \rightarrow 1,$$

при любом фиксированном $\delta > 0$ для гармонического интеграла Пуассона хорошо известно.

Заметим, что доказательство Теоремы 2 опирается на два обстоятельства: существование нулевых предельных значений у некоторых интегралов с обычным ядром Пуассона и регулярность точек сферы S относительно задачи Дирихле для оператора L_c . Однако по определению регулярной области внутренняя точка может стремиться к границе произвольным образом, а вышеупомянутые интегралы имеют нулевые граничные значения не только по нормали (при $r \rightarrow 1$), но и по некасательным путям. Поэтому заключения Теоремы 2 и Следствия справедливы и при некасательном стремлении точки $x \in B$ к граничной $\theta \in S$. В частности, справедливо следующее обобщение теоремы Фату.

Теорема 4. Пусть $s \in C_1(B)$, $u \in H^p(s)$, $1 \leq p \leq \infty$, в частности $u > 0$ в B . Тогда почти всюду на S u имеет некасательные граничные значения $f \in L^p(S)$.

Разумеется, все утверждения справедливы в шарах любого радиуса, и мы получаем следующее

Следствие. Пусть $s \in C(\Omega)$ и $u \in H(s, \Omega)$ в произвольной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq$

≥ 2 . Если для почти каждой точки $x_0 \in \partial\Omega$ найдется такой шар $B(x_1, r_1) \subset \Omega$, что $x_0 \in S(x_1, r_1)$, $c \in C_1(B(x_1, r_1))$ и $u \in H^p(c, B(x_1, r_1))$, $1 \leq p \leq \infty$, то почти всюду на $\partial\Omega$ и имеет некасательные граничные значения.

Докажем также, что при $1 \leq p < \infty$ о.г.ф. стремится к своим граничным значениям в среднем.

Теорема 5. Пусть $c \in C_1(B)$ и о.г.ф. u представима в виде (2) с $f \in L^p(S)$, $1 \leq p < \infty$. Тогда $\|u(x) - f(\theta)\|_{L^p(S)} \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 1$.

Доказательство. Вновь рассмотрим разность

$$u(x) - f(\theta) = \int_S [f(\psi) - f(\theta)] \frac{\partial G(x, \psi)}{\partial n(\psi)} d\sigma(\psi) + f(\theta) \left\{ \int_S \frac{\partial G(x, \psi)}{\partial n(\psi)} d\sigma(\psi) - 1 \right\} \equiv I_1 + I_2.$$

Как и прежде, $0 < 1 - \int_S \frac{\partial G(x, \psi)}{\partial n(\psi)} d\sigma(\psi) \leq 1$ при $x \in \bar{B}$, т.е. эта разность ограничена равномерно по x . Но $f \in L^p(S)$ и по теореме о мажорированной сходимости $\lim_{r \rightarrow 1} \|I_2\|_{L^p(S)} = 0$.

Для оценки I_1 вновь используем неравенство (1):

$$|I_1| \leq \int_S |f(\psi) - f(\theta)| \frac{\partial g(x, \psi)}{\partial n(\psi)} d\sigma(\psi) \equiv I_{11}.$$

Осталось учесть, что соотношение $\|I_{11}\|_{L^p(S)} = o(1)$, $r \rightarrow 1$, доказано в [15]. Заметим, что в [15] рассмотрен лишь плоский случай $n = 2$, но аналогичное доказательство справедливо при любых $n \geq 2$.

4. Формулы (2) и (3) непосредственно приводят к соотношениям для средних значений о.г.ф. Например, полагая в (2) $x = 0$ и учитывая Теорему 2, получаем для любой функции $u \in H^p(c)$, $1 < p \leq \infty$, $c \in C_1(B)$ равенство

$$u(0) = \int_S u(\theta) \frac{\partial G(0, \theta)}{\partial n(\theta)} d\sigma(\theta), \quad (6)$$

где $u(\theta)$, $\theta \in S$ — это существующие почти всюду граничные значения u . Разумеется, аналогичные формулы можно написать для любого шара $B(x, r)$, в котором выполнены условия Леммы 1.

Теоремам о среднем посвящена работа Г. Р. Оганесяна [14], в которой рассмотрены q -гармонические функции класса C^2 в открытом шаре радиуса ρ в $\mathbb{R}^n$,

$n \geq 3$, причем потенциал $q > 0$, непрерывный, радиальный (т.е. зависящий лишь от $r = |x|$) и неограниченно возрастает при $r \uparrow \rho$. С другой стороны, потенциал класса $C_1(B)$ не может расти слишком быстро, при $r \rightarrow 1$, в частности, может быть и ограниченным. А s -гармонические функции непрерывные, но могут не принадлежать классу C^2 . В этом смысле наши результаты о средних значениях о.г.ф. дополняют утверждения [14].

Для радиальных потенциалов $q(r) \in C_1(B)$ в [10] доказано равенство $\frac{\partial G(0, \theta)}{\partial n(\theta)} = -W'(1)$, где $W(r)$ — главное (убывающее при $0 < r \uparrow 1$) решение уравнения

$$y'' + (n-1)r^{-1}y' - q(r)y = 0, \quad 0 < r < 1,$$

нормированное при $W(r) \sim -(2\pi)^{-1} \ln r$ при $r \rightarrow 0$, $n = 2$ и $W(r) \sim \gamma_n r^{2-n}$ при $n \geq 3$. Формула (6) в этом случае принимает вид

$$u(0) = \{-W'(1)\} \int_S u(\theta) d\sigma(\theta). \quad (7)$$

Рассмотрим два примера. Пусть $q_1(r) = q_1 r^\rho$, где $q_1 \geq 0$ и $\rho > -2$. Для определенности предположим, что $n \geq 3$ и число $\nu = \frac{n-2}{2+\rho}$ — нецелое. Тогда общее решение уравнения $y'' + (n-1)r^{-1}y' - q_1(r)y = 0$ имеет вид [17]

$$y(r) = Ar^{1-n/2} J_\nu(i\delta r^\gamma) + Br^{1-n/2} J_{-\nu}(i\delta r^\gamma),$$

где $\gamma = 1 + \rho/2$, $\delta = \gamma^{-1} \sqrt{q_1}$, а $J_{\pm\nu}$ — функция Бесселя. Вычисляя коэффициенты A и B из условий $W(1) = 0$, $W(r) \sim \gamma_n r^{2-n}$, $r \rightarrow +0$ получаем теорему о среднем для $q(r)$ -гармонических функций

$$u(0) = B(\rho) \int_S u(\theta) d\sigma(\theta), \quad (8)$$

где $B(\rho) = q_1^{\nu/2} (2+\rho)^{1-\nu} \{\Gamma(\nu) I_\nu(\delta)\}^{-1}$, а I_ν — модифицированная функция Бесселя. Заметим, что $B(0) = q_1^{(n/2-1)/2} \{(2\pi)^{n/2} I_{n/2-1}(q_1^{1/2})\}^{-1}$, и из (8) получается известное соотношение средних значений для решений уравнения $\Delta u - q_1 u = 0$, $q_1 = \text{const}$ (см. [18]).

В качестве второго примера рассмотрим неограниченный потенциал $q_2(r) = q_2/(r(1-r))$, $q_2 = \text{const} \geq 0$. Общее решение уравнения $y'' + (n-1)r^{-1}y' -$

$-q_2(r)y = 0$, $0 < r < 1$, имеет вид [17]

$$y(r) = A F(\alpha - 1, n - 1 - \alpha; n - 1; r) + B(1 - r)F(n - \alpha, \alpha; 2; 1 - r),$$

где $F = {}_2F_1$ – гипергеометрическая функция Гаусса, $\alpha = (n + ((n - 2)^2 - 4q_2)^{1/2})/2$, A и $B = B(q_2)$ – произвольные постоянные. Пусть $n \geq 4$ и $0 \leq q_2 < n - 3$. Условия при $r = 1$ и $r \rightarrow +0$ для главного решения дают $A = 0$, $B = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(n-\alpha)}{(n-4)!(n-3-q_2)}\gamma_n$, и из (7) получаем формулу средних значений для $q_2(r)$ -гармонических функций

$$u(0) = B \int_S u(\theta) d\sigma(\theta).$$

Заметим, что $B(0) = \frac{1}{\sigma_n}$.

ABSTRACT. Hardy classes $H^p(c)$ are introduced in the usual way for continuous solutions of the equation $\Delta u - c(x)u = 0$ in the unit ball $B \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ where Δ is the Laplacian, $c \geq 0$ and $c \in L^s(B)$, $s > n$. Representations are obtained for the functions $u \in H^p(c)$, $1 \leq p \leq \infty$, which have the form of generalized Poisson integrals (or Poisson-Stieltjes integral when $p = 1$). The boundary behavior of the functions is investigated. In particular an analogue of the Fatou theorem on the almost everywhere existence of boundary values is proved. Some mean value identities are derived and examples considered.

ЛИТЕРАТУРА

1. L. I. Myrberg, "Über subelliptische Funktionen", *Suomalais. tied. toim. Ser. AI*, vol. 290, pp. 1 - 9, 1960.
2. A. Dinghas, "Über einige konvexitäts Fragen bei partiellen Differentialgleichungen vom Sturmschen typus", *Math. Ann.*, vol. 155, pp. 397 - 421, 1964.
3. J. Stampacchia, "Le probleme de Dirichlet pour les equations elliptiques du second ordre á coefficients discontinus", *Ann. Inst. Fourier*, vol. 15, pp. 189 - 257, 1965.
4. R. M. Herve, M. Herve, "Les fonctions surharmoniques associees á un operateur elliptique du second ordre á coefficients discontinus", *Ann. Inst. Fourier*, vol. 19, pp. 305 - 359, 1969.
5. F. Y. Maeda, "Boundary value problems for the equation $\Delta u - q u = 0$ with respect to an ideal boundary", *J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A, Div. 1*, vol. 32, pp. 85 - 146, 1968.
6. F. Y. Maeda, "On regularity of boundary points for Dirichlet problems of the equation $\Delta u = q u$ ($q \geq 0$)", *Hiroshima Math. J.*, vol. 1, pp. 373 - 404, 1971.
7. Б. Я. Левин, А. И. Хейфиц, "Асимптотическое поведение субфункций оператора Шредингера в n -мерном конусе", *ДАН СССР*, т. 301, стр. 540 - 543, 1988.
8. А. И. Хейфиц, "Субфункция оператора Шредингера", Ростов-на-Дону, РГУ, 137 стр., 1988. Рукопись депонирована в ВИНТИ 19.10.1988, № 7544-В88, РЖМат. 1989, 2В484Деп.
9. А. М. Руссаковский, "Об асимптотическом поведении субфункций оператора Шредингера конечного нижнего порядка", *Сиб. Матем. журн.*, т. 30, стр.

160 – 170, 1989.

10. А. И. Хейфиц, "Субфункция оператора Шредингера $I\Gamma$ ", Ростов-на-Дону, РГУ, 42 стр., 1989. Рукопись депонирована в ВИНТИ 9.01.1989, № 199-B89, РЖМат. 1989, 4B541Деп.
11. А. И. Хейфиц, "Субфункция оператора Шредингера III ", Ростов-на-Дону, РГУ, 101 стр., 1990. Рукопись депонирована в ВИНТИ 26.06.1990, № 3650-B90, РЖМат. 1990, 11B383Деп.
12. А. И. Хейфиц, "Распределение значений и представление обобщенных субгармонических функций", ДАН СССР, т. 314, стр. 568 – 572, 1990.
13. А. И. Хейфиц, "Устранимые множества, регулярные граничные точки и формула Пуассона-Иенсена для обобщенных субгармонических функций", ДАН СССР, т. 318, стр. 288 – 290, 1991.
14. Г. Р. Оганесян, "Весовая теорема о среднем для сингулярно возмущенного уравнения Лапласа", Изв. АН Армении, Математика, т. 23, №4, стр. 325 – 335, 1988.
15. П. Кусис, Введение в Теорию Пространств H^p , М., Мир, 1984.
16. Zhongxin Zhao, "Green Function for Schrödinger Operator and Conditioned Feynman-Kac Gauge", J. Math. Anal. and Appl., vol. 116, pp. 309 – 334, 1986.
17. Г. Бейтмен, А. Эрдейи, Высшие Трансцендентные Функции, т. 1, М., Наука, 1965.
18. Р. Курант, Уравнения в Частных Производных, М., Мир, 1964.

3 Июля 1991

Ростовский государственный
университет