О НОРМЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ С КОНЕЧНОГО ИНТЕРВАЛА НА КОНЕЧНЫЙ ИНТЕРВАЛ

А. В. Карабегов

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 28, №5, 1993

В работе рассматривается интегральный оператор с ядром $\exp(2\pi i x y)$, действующий из пространства $L^2(\gamma,\delta)$ в $L^2(\alpha,\beta)$. Его норма ρ_s, зависит исключительно от $s = (\alpha-\beta)\cdot(\gamma-\delta)$. Показано, что существуют постоянные C_1, C_2 такие, что для достаточно больших c справедлива оценка $\exp(-C_1 s) < 1-\rho_s < \exp(-C_2 s)$.

§0. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $A, B \subset \mathbb{R}^n$ – множества конечной лебеговой меры, а f – функция из $L^p(\mathbb{R}^n)$, $p \geq 1$, причем $f = 0$ на дополнении к B. М. Бенедикс [1] показал, что если Фурье-образ $\hat{f}$ функции f обращается в нуль на дополнении к A, то $f = 0$ почти всюду.

Для измеримого множества $E \subset \mathbb{R}^n$ определим ортогональный проектор P_E в $L^2(\mathbb{R}^n)$ формулой $P_E f = \chi_E \cdot f$, где χ_E – характеристическая функция E, и пусть F – преобразование Фурье в $L^2(\mathbb{R}^n)$.

У. Амрейн и А. Бертье [2] доказали результат М. Бенедикса методами гильбертова пространства. В их работе было использовано следующее важное наблюдение. Для множеств $A, B \subset \mathbb{R}^n$ конечной меры и функций из $L^2(\mathbb{R}^n)$ результат М. Бенедикса эквивалентен тому, что норма оператора $\rho = ||P_A F P_B||$ строго меньше единицы.

В настоящей работе оценивается норма $\rho = ||P_A F P_B||$ в случае, когда A и B – отрезки прямой в $\mathbb{R}$. Эта норма – функция площади s, где s – площадь прямоугольника $A \times B$, $\rho = \rho_s$. Мы покажем, что существуют положительные постоянные C_1 и C_2 такие, что для достаточно больших s справедлива двусторонняя оценка

$$\exp(-C_1 s) < 1 - \rho_s < \exp(-C_2 s).$$

§1. ИНВАРИАНТНАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОЦЕНКА СВЕРХУ

В пространстве $L^2(\mathbb{R})$ определим следующие унитарные операторы : преобразование F, заданное на $L^1 \cap L^2$ интегралом

$$Ff(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(2\pi i x y)\, f(y)\, dy;$$

оператор сдвига T_t определяется по формуле $T_t f(x) = f(x+t)$; оператор M_t умножения на экспоненту $\exp(2\pi i t x)$ - $M_t f(x) = \exp(2\pi i t x) f(x)$; для $\lambda \neq 0$ определим оператор растяжения Λ_λ, $\Lambda_\lambda f = |\lambda|^{1/2} f(\lambda x)$.

Пусть $E = [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ - отрезок. Положим $\lambda E + t = [\lambda\alpha + t, \lambda\beta + t]$.

Следующие соотношения между операторами F, T_t, M_t, Λ_λ и P_E проверяются непосредственно :

$$\begin{aligned} &T_t F = F M_t, \qquad M_{-t} F = F T_t, \qquad \Lambda_\lambda F = F \Lambda_{1/\lambda}, \\ &M_t P_E = P_E M_t, \quad T_t P_{E+t} = P_E T_t, \quad \Lambda_\lambda P_{\lambda E} = P_E \Lambda_\lambda. \end{aligned} \tag{1}$$

Предложение 1. *Пусть $A = [\alpha, \beta]$ и $B = [\gamma, \delta]$ - отрезки из $\mathbb{R}$. Норма оператора $P_A F P_B$ зависит только от площади $s = (\alpha - \beta)(\gamma - \delta)$ прямоугольника $A \times B$.*

Доказательство. Пользуясь соотношениями (1), можно выписать цепочку равенств

$$T_t P_{A+t} F P_B = P_A T_t F P_B = P_A F M_t P_B = P_A F P_B M_t,$$

Таким образом, $T_t (P_{A+t} F P_B) = (P_A F P_B)\, M_t$. Из унитарности операторов T_t и M_t следует, что $||P_{A+t} F P_B|| = ||P_A F P_B||$. Аналогично доказывается, что $M_{-t}(P_A F P_{B+t}) = (P_A F P_B) T_t$ и $\Lambda_\lambda \left(P_{\lambda A} F P_{1/\lambda B}\right) = (P_A F P_B) \Lambda_{1/\lambda}$. Следовательно, $||P_A F P_{B+t}|| = ||P_A F P_B||$ и $||P_{\lambda A} F P_{1/\lambda B}|| = ||P_A F P_B||$.

Площадь прямоугольника $A \times B$ инвариантна относительно трансляций $A \times B \mapsto (A+t) \times B$ и $A \times B \mapsto A \times (B+t)$ и гиперболических поворотов

$A \times B \mapsto \lambda A \times 1/\lambda B$. Заметим также, что любые два прямоугольника в $\mathbb{R}^2$ со сторонами, параллельными осям координат и одинаковой площади могут быть получены друг из друга указанными преобразованиями.

Лемма 1. *Оператор $P_A F P_B$ является оператором Гильберта-Шмидта и его норма Гильберта-Шмидта равна $\sqrt{s}$, где s - площадь $A \times B$.*

Доказательство немедленно следует из того, что ядро оператора $P_A F P_B$, равное $\chi_A(x)\ \exp(2\pi ixy)\ \chi_B(y)$, квадратично интегрируемо.

Следствие 1. Имеет место неравенство $\rho_s \leq \sqrt{s}$.

Доказательство вытекает из хорошо-известного неравенства между равномерной операторной нормой и нормой Гильберта-Шмидта.

Лемма 2. *Существует функция $f \in L^2(\mathbb{R})$ такая, что $||f|| = 1$, $||P_A F P_B f|| = = ||P_A F P_B||$, при этом и $f = P_B f$.*

Доказательство. Согласно Лемме 1, оператор $P_A F P_B$ компактен, следовательно, отображение $L^2(\mathbb{R}) \ni g \mapsto ||P_A F P_B g||$ непрерывно в слабой топологии на $L^2(\mathbb{R})$ и поэтому достигает максимума на единичном шаре на некоторой функции $f \in L^2(\mathbb{R})$, так что $||P_A F P_B|| = ||P_A F P_B f||$. Поскольку $||P_A F P_B f|| \leq \leq ||P_A F P_B|| \cdot ||f||$, то $||f|| = 1$. Если при этом $f \neq P_B f$, то $||P_B f|| < ||f|| = 1$. Тогда, пользуясь тем, что $P_B^2 = P_B$, получим

$$||P_A F P_B f|| = ||P_A F P_B P_B f|| \leq ||P_A F P_B|| \cdot ||P_B f|| < ||P_A F P_B||,$$

что противоречит выбору f. Лемма доказана.

Предложение 2. *Функция ρ_s обладает следующими свойствами :*

a) *ρ_s строго возрастающая,*

b) $\rho_s < 1$,

c) $\lim\limits_{s \to \infty} \rho_s = 1$.

Доказательство. Докажем сначала b). Для заданного s, пусть A и B – отрезки, для которых площадь $A \times B$ равна s. В силу Леммы 2, $\rho_s = ||P_A \hat{f}||$, где $\hat{f} = Ff$ – преобразование Фурье функции f.

Так как носитель функции f компактен, то из теоремы Пэли-Винера (см. [3]) следует, что $\widehat{f}$ – целая функция. С другой стороны, целая функция не может быть сосредоточена на отрезке. Следовательно, $\rho_s = ||P_A\widehat{f}|| < ||\widehat{f}|| = 1$, что доказывает b). Пусть теперь A' – интервал, строго содержащий A и s' ($s' > s$) – площадь $A' \times B$. Согласно вышеприведенному аргументу, $||P_A\widehat{f}|| < ||P_{A'}\widehat{f}||$. Следовательно, $\rho_s < ||P_{A'}FP_Bf|| \leq ||P_{A'}fP_B|| = \rho_{s'}$. Откуда следует a). Наконец, для любого $\varepsilon > 0$ можно выбрать отрезок A' такой, что $||P_{A'}\widehat{f}|| > 1-\varepsilon$ и, тем самым, $\rho_{s'} > 1-\varepsilon$, что доказывает c). Предложение доказано.

Для оценки сверху разности $1-\rho_s$, рассмотрим функцию $u(x) = \exp(-\pi x^2)$. Эта функция совпадает со своим преобразованием Фурье $u = Fu$ и $||u|| = 2^{-1/4}$ (см. [4]).

Предложение 3.

$$1-\rho_s \leq \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{2}{s}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{\pi}{2}s\right).$$

Доказательство. Пусть $E = [-\alpha, \alpha]$, $s = 4\alpha^2$ и $\rho_s = ||P_E F P_E||$. Положим $P_{E'} = 1 - P_E$. Из цепочки очевидных неравенств

$$||u|| \leq ||P_E u|| + ||P'_E u|| = ||P_E F u|| + ||P'_E u|| \leq ||P_E F P_E u|| + \\ + ||P_E F P'_E u|| + ||P'_E u|| \leq ||P_E F P_E|| \cdot ||u|| + 2||P'_E u||$$

получаем

$$1 - ||P_E F P_E|| \leq \frac{||P'_E u||}{||u||}. \tag{2}$$

Остается оценить $||P'_E u||$. Пользуясь четностью $u(x)$, получим

$$||P'_E u||^2 = 2\int_\alpha^\infty \exp(-2\pi x^2)\,dx \leq \frac{2}{\alpha}\int_\alpha^\infty x\exp(-2\pi x^2)\,dx = \frac{1}{2\pi\alpha}\exp(-2\pi\alpha^2). \tag{3}$$

Подставляя в (3) значение $\alpha = \sqrt{s}/2$ и оценивая с помощью (3) правую часть (2), получаем требуемую оценку.

Следствие 2. При достаточно больших s справедлива оценка

$$1-\rho_s < \exp\left(-\frac{\pi}{2}s\right).$$

§2. ОЦЕНКА ρ_s ЧЕРЕЗ НОРМЫ ОПЕРАТОРОВ КОНЕЧНОГО РАНГА

В данном параграфе мы получим нижнюю и верхнюю оценки ρ_s для натуральных значений s. Поскольку ρ_s монотонна, эти оценки можно будет распространить на все значения s.

Пусть n – фиксированное натуральное число, $A = [0, n]$, $B = [-1/2, 1/2]$, $C = \mathbb{R} \setminus A$, следовательно площадь прямоугольника $A \times B$ равна n. Обозначим через V образ проектора P_B и определим семейство функций $\{e_\theta(x)\}$, принадлежащих V, формулой

$$e_\theta(x) = \begin{cases} \exp(-2\pi i\theta x), & \text{если} \quad |x| \le \frac{1}{2} \\ 0, & \text{если} \quad |x| > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Для заданного $\tau \in \mathbb{R}$ функции $\{e_{l-\tau}(x)\}$, $l \in \mathbb{Z}$ образуют ортонормированный базис в V. Пусть W_τ – пространство, порожденное функциями $\{e_{l-\tau}(x)\}$, $l = 1, 2, ..., n$, а Q_τ – ортогональный проектор в $L^2(\mathbb{R})$ на W_τ. Мы будем оценивать ρ_n через нормы операторов конечного ранга $P_A F Q_\tau$. Положим

$$\eta_n(\tau) = ||P_A F Q_\tau||, \qquad \eta_n = \sup_{\tau \in [0,1]} \eta_n(\tau).$$

Лемма 3. *Справедлива оценка*

$$\eta_n \le \rho_n.$$

Доказательство. Поскольку W_τ – подпространство V, имеет место неравенство $P_B Q_\tau = Q_\tau$, и, следовательно, $\eta_n(\tau) = ||P_A F P_B Q_\tau|| \le ||P_A F P_B|| = \rho_n$, откуда сразу следует утверждение леммы.

Согласно Лемме 2, существует функция $f \in V$, удовлетворяющая условию $||f|| = 1$, и $||P_A F P_B f|| = \rho_n$. Определим функции $g_\tau = Q_\tau f$ и $h_\tau = (1 - Q_\tau)f$. Тогда $f = g_\tau + h_\tau$, $g_\tau \in W_\tau$ и g_τ ортогональна h_τ.

Лемма 4. *Разложение g_τ по базису $\{e_{l-\tau}(x)\}, l = 1, 2, ..., n$ в пространстве W_τ имеет вид*

$$g_\tau(x) = \sum_{l=1}^{n} \widehat{f}(l - \tau)\, e_{l-\tau}(x).$$

Доказательство следует из того, что коэффициенты Фурье разложения функции f по базису $\{e_{l-\tau}(x)\}, l \in \mathbb{Z}$, равны $\{\widehat{f}(l - \tau)\}$.

Норму функции $v \in L^2(\mathbb{R})$ на множество $E \subset \mathbb{R}$ обозначим через $||v||_E = = ||P_E v||$.

Лемма 5. *Имеет место формула*

$$||\widehat{f}||_A^2 = \int_0^1 ||g_\tau||^2 \, d\tau.$$

Доказательство. Поскольку

$$||\widehat{f}||_A^2 = \int_0^n |\widehat{f}(\xi)|^2 \, d\xi = \sum_{l=1}^n \int_{l-1}^l |\widehat{f}(\xi)|^2 \, d\xi,$$

то полагая $\xi = l - \tau$, получим

$$||\widehat{f}||_A^2 = \sum_{l=1}^n \int_0^1 |\widehat{f}(l-\tau)|^2 \, d\tau = \int_0^1 ||g_\tau||^2 \, d\tau.$$

Следствие 3. Существует $\tau_0 \in [0, 1]$ такое, что $||g_{\tau_0}|| \geq ||\widehat{f}||_A$. В самом деле, полагая $g = g_{\tau_0}$ и $h = h_{\tau_0}$, получим $||g|| \geq ||\widehat{f}||_A$.

Лемма 6. *Справедливо неравенство*

$$||\widehat{f}||_C \geq ||h||.$$

Доказательство. Поскольку g и h ортогональны, то $||f||^2 = ||g||^2 + ||h||^2$. С другой стороны, $||\widehat{f}||^2 = ||\widehat{f}||_A^2 + ||\widehat{f}||_C^2$. Таким образом, остается воспользоваться равенством Парсеваля $||f|| = ||\widehat{f}||$ и Следствием 3.

Лемма 7. *Справедливо неравенство*

$$||\widehat{g}||_C \geq \sqrt{1 - \eta_n^2} \, ||g||.$$

Доказательство. Так как $g_\tau \in W_\tau$, то $g_\tau = Q_\tau g_\tau$, и, следовательно, $||\widehat{g}_\tau||_A = = ||P_A F Q_\tau g_\tau|| \leq \eta_n(\tau) \, ||g_\tau||$. Полагая $\tau = \tau_0$ и учитывая, что $\tau_0 \in [0, 1]$, получим $||\widehat{g}||_A \leq \eta_n(\tau_0) \, ||g|| \leq \eta_n \, ||g||$. Теперь утверждение леммы следует из соотношения $g^2 = ||\widehat{g}||^2 = ||\widehat{g}||_A^2 + ||\widehat{g}||_C^2$.

Лемма 8. *Справедливо неравенство*

$$||\widehat{f}||_C \geq \sqrt{1 - \eta_n^2} \, ||g|| - ||h||.$$

Доказательство. Так как $\hat{f} = \hat{g} + \hat{h}$, то $||\hat{f}||_C \geq ||\hat{g}||_C - ||\hat{h}||_C$. Утверждение леммы получается теперь из Леммы 7 и того, что $||h|| \geq ||\hat{h}||_C$.

Пусть ψ – угол между векторами f и g, $\psi \in [0, \pi/2]$. Тогда $||g|| = \cos\psi$, $||h|| = \sin\psi$. Поскольку $f = P_B f$, то $||\hat{f}||_A = \rho_n$. Утверждение Лемм 6 и 8 можно записать так :

$$\sqrt{1-\rho_n^2} \geq \max\left\{\sqrt{1-\eta_n^2}\cos\psi - \sin\psi, \sin\psi\right\}. \tag{4}$$

Лемма 9. *При* $\varphi \in [0, \pi/2]$ *справедливо неравенство*

$$\sqrt{1-\rho_n^2} \geq \sqrt{\frac{1-\eta_n^2}{5-\eta_n^2}}.$$

Доказательство. При $\varphi \in [0, \pi/2]$ функция $u(\varphi) = \sqrt{1-\eta_n^2}\cos\varphi - \sin\varphi$ убывает, а функция $v(\varphi) = \sin\varphi$ возрастает. Поскольку $u(0) \geq v(0)$ и $u(\pi/2) < v(\pi/2)$, то минимальное значение $\max\{u, v\}$ достигается при $u(\varphi) = v(\varphi)$ и равно $\frac{\sqrt{1-\eta_n^2}}{\sqrt{5-\eta_n^2}}$.

Лемма 10. *Справедливо неравенство*

$$\rho_n \leq \frac{2}{\sqrt{5-\eta_n^2}}.$$

Лемма 11. *При* $x \in [0, 1]$ *справедливо неравенство*

$$\frac{2}{\sqrt{5-x^2}} \leq \frac{9+x}{10}.$$

Из Лемм 3, 10 и 11 следует

Теорема 1. *Величина* ρ_n *допускает двустороннюю оценку через* η_n :

$$\frac{1}{10}(1-\eta_n) \leq 1 - \rho_n \leq 1 - \eta_n.$$

Следствие 4. Пусть $n - 1 \leq s \leq n$, тогда

$$\frac{1}{10}(1-\eta_n) \leq 1 - \rho_s \leq 1 - \eta_{n-1}.$$

§3. ОЦЕНКА η_n ЧЕРЕЗ НОРМЫ СЕМЕЙСТВА КОНЕЧНЫХ МАТРИЦ

Для оценки нормы $\eta_n(\tau) = ||P_A F Q_\tau||$ нам предстоит сделать некоторые приготовления.

Лемма 12. *Преобразование Фурье функции $e_\theta(x)$ задается формулой*

$$\widehat{e}_\theta(\xi) = \begin{cases} \dfrac{\sin \pi(\xi-\theta)}{\pi(\xi-\theta)}, & \text{при} \quad \xi \neq \theta \\ 1, & \text{при} \quad \xi = \theta. \end{cases}$$

Доказательство. Лемма доказывается прямым вычислением.

Для $t \in \mathbb{R}$ определим бесконечную матрицу $L(t) = (L(t))_{k,l}$:

$$(L(t))_{k,l} = \begin{cases} \frac{\sin \pi(k-l+t)}{\pi(k-l+t)}, & \text{если} \quad t \notin \mathbb{Z} \\ (-1)^{k+l+t}\delta_{k+t,l}, & \text{если} \quad t \in \mathbb{Z}, \end{cases} \tag{6}$$

где $k, l \in \mathbb{Z}$ и $\delta_{k,l}$ – символ Кронекера. Подматрицу матрицы $L(t)$ в которой индексы $k, l = 1, 2, ..., n$ обозначим через $L_n(t)$.

Лемма 13. *Матрица $L(t)$ унитарна.*

Доказательство следует из того, что $L(t)$ является матрицей перехода из базиса $\{e_l(x)\}$ в базис $\{e_{k+t}(x)\}$.

Следствие 5. Норма матрицы $L_n(t)$ не превосходит единицы.

Лемма 14. *Для оператора конечного ранга $P_A F Q_\tau$ существует функция $w_\tau \in$ $\in L^2(\mathbb{R})$ такая, что $||w_\tau|| = 1$ и $||P_A F Q_\tau w_\tau|| = \eta_n(\tau)$. Более того, $w_\tau \in W_\tau$ и $\eta_n(\tau) = ||\widehat{w}_\tau||_A$.*

Доказательство аналогично доказательству Леммы 2.

Пусть $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$ – вектор, компонентами которого являются координаты w_τ в базисе $\{e_{l-\tau}(x)\}, l = 1, 2, ..., n$, т. е.

$$w_\tau(x) = \sum_{l=1}^{n} a_l e_{l-\tau}(x). \tag{7}$$

Очевидно, что $||a|| = 1$. Для $\sigma \in \mathbb{R}$ зададим вектор $b(\sigma) = (b_1(\sigma), ..., b_n(\sigma))$ с компонентами $b_k(\sigma) = \widehat{w}_\tau(k-\sigma)$.

Лемма 15. *Справедлива формула*

$$b(\sigma) = L_n(\tau - \sigma)a.$$

Доказательство следует из (6), (7) и Леммы 12.

Лемма 16. *Справедлива формула*

$$\eta_n^2(\tau) = \int_0^1 ||b(\sigma)||^2\, d\sigma.$$

Доказательство. Согласно Лемме 14 имеем

$$\eta_n^2(\tau) = ||\widehat{\omega}_\tau||_A^2 = \int_0^n |\widehat{\omega}_\tau(\xi)|^2\, d\xi = \sum_{k=1}^n \int_{k-1}^k |\widehat{\omega}_\tau(\xi)|^2\, d\xi.$$

Полагая $\xi = k - \sigma$, получаем

$$\eta_n^2(\tau) = \sum_{k=1}^n \int_0^1 |\widehat{\omega}_\tau(k-\sigma)|^2\, d\sigma = \int_0^1 ||b(\sigma)||^2\, d\sigma,$$

откуда следует утверждение леммы.

Предложение 4. *Справедлива оценка*

$$\eta_n^2 \le \sup_{\tau\in[0,1]} \int_0^1 ||L_n(\tau-\sigma)||^2\, d\sigma.$$

Доказательство. Так как $||a|| = 1$, из Леммы 15 следует $||b(\sigma)|| \le ||L_n(\tau-\sigma)||$. Применяя его к Лемме 16, получаем, что

$$\eta_n^2(\tau) \le \int_0^1 ||L_n(\tau-\sigma)||^2\, d\sigma,$$

откуда следует требуемое неравенство.

Для $t \in \mathbb{R}$ определим функцию $\kappa(t)$ соотношением :

$$\kappa(t) = \begin{cases} ||L_n^{-1}(t)||^{-1}, & \text{если} \quad L_n(t) \text{ обратима} \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Заметим, что для произвольного n-мерного вектора c имеет место неравенство $||L_n(t)c|| \ge \kappa(t)\,||c||$. Ниже мы оценим норму матрицы $L_n(t)$ через функцию $\kappa(t)$.

По вектору $c = (c_1, \ldots, c_n)$ построим вектор $\widetilde{c} = (\widetilde{c}_k)$, $k \in \mathbb{Z}$, с компонентами $\widetilde{c}_k = c_k$, при $k = 1, \ldots, n$ и $\widetilde{c}_k = 0$, при $k > n$. Пусть вектор $\widetilde{d} = \left(\widetilde{d}_k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$ такой, что $\widetilde{d} = L(t)\,\widetilde{c}$. По этому вектору $\widetilde{d}$ построим семейство n-мерных векторов, зависящее от $q \in \mathbb{Z}$, $d(q) = (d_1(q), \ldots, d_n(q))$, полагая $d_k(q) = \widetilde{d}_{k+qn}$.

Лемма 17. *Имеет место соотношение*

$$\sum_{q=-\infty}^{\infty} ||d(q)||^2 = ||c||^2.$$

Доказательство. Из унитарности $L(t)$ следует, что $||\widetilde{d}|| = ||\widetilde{c}||$, а кроме того, $||\widetilde{c}|| = ||c||$. Утверждение Леммы следует теперь из очевидной формулы $||\widetilde{d}||^2 = \sum_{q=-\infty}^{\infty} ||d(q)||^2$.

Лемма 18. *Справедлива формула*

$$d(q) = L_n(t + qn)c.$$

Доказательство проводится непосредственными вычислениями.

Пусть теперь вектор c выбран так, что $||c|| = 1$ и $||L_n(t)c|| = ||L_n(t)||$.

Предложение 5. *Справедлива оценка*

$$||L_n(t)||^2 \leq 1 - \sum_{q \neq 0} \kappa^2(t + qn).$$

Доказательство. В силу Леммы 18 $||d(0)|| = ||L_n(t)||$ и $||d(q)|| = ||L_n(t+qn)c|| \geq \geq \kappa(t + qn)$. Для завершения доказательства остается воспользоваться Леммой 17.

Для получения окончательного результата нам понадобится более слабая оценка

$$||L_n(t)||^2 \leq 1 - \kappa^2(t + n). \tag{8}$$

Теорема 2. *Справедлива оценка*

$$\eta_n \leq 1 - \frac{1}{2} \inf_{\tau \in [0,1]} \int_0^1 \kappa^2(\tau - \sigma + n)\, d\sigma.$$

Доказательство. Пользуясь оценкой (8) и Предложением 4, получим

$$\eta_n^2 \leq 1 - \inf_{\tau \in [0,1]} \int_0^1 \kappa^2(\tau - \sigma + n)\, d\sigma. \tag{9}$$

Остается применить неравенство $1 - x \leq (1 - x/2)^2$ к правой части формулы (9).

§4. СТРУКТУРА МАТРИЦЫ $L_n(t)$ И ОЦЕНКА $\kappa(t)$

В пространстве многочленов степени, меньшей n, зададим оператор сдвига $N(t)$ по формуле $N(t)\colon p(x) \mapsto p(x + t)$. В качестве координат многочлена p возьмем его значения в узлах $k = 1, 2, ..., n$. Матрицу, соответствующую оператору $N(t)$, обозначим тем же символом $N(t)$. Заметим, что $N^{-1}(t) = N(-t)$.

Лемма 19. *Элементы матрицы $N(t)$ задаются формулой*

$$(N(t))_{k,l} = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^{n} \frac{k - j + t}{l - j},$$

где $k, l = 1, 2, ..., n$.

Доказательство. Для доказательства достаточно воспользоваться формулой интерполяционного многочлена Лагранжа.

Лемма 20. *При* $k, l = 1, 2, ..., n$ *и* $t \notin \mathbb{Z}$

$$\frac{\sin \pi(k - l + t)}{\pi(k - l + t)} = \frac{\Gamma(l)\Gamma(n + 1 - l)}{\Gamma(k + t)\Gamma(n + 1 - k - t)} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^{n} \frac{k - j + t}{l - j}. \tag{10}$$

Доказательство использует функциональные уравнения $\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z)$ и $\Gamma(z)\,\Gamma(1 - z) = \pi / \sin \pi z$ (см. [5]).

Обозначим через $D(t)$ диагональную матрицу порядка n с элементами $\Gamma(k + t) \times$ $\times \Gamma(n + 1 - k - t)$, $k = 1, 2, ..., n$. Заметим, что при $t \notin \mathbb{Z}$ матрица $D(t)$ обратима. Из Лемм 19 и 20 следует

Предложение 6. *При* $t \notin \mathbb{Z}$ *имеет место формула*

$$L_n(t) = D^{-1}(t)N(t)D(0).$$

Следствие 6. При $t \notin \mathbb{Z}$ матрица $L_n(t)$ обратима и $L_n^{-1}(t) = D^{-1}(0)N(-t)D(t)$.

Утверждение Следствия 6 следует из равенства $N^{-1}(t) = N(-t)$.

Предложение 7. *При* $t \notin \mathbb{Z}$ *имеет место соотношение*

$$L_n^{-1}(t) = D^{-1}(0)D(-t)L_n(-t)D^{-1}(0)D(t).$$

Доказательство непосредственно выводится из Предложения 6, примененного к матрице $L_n(-t)$ и Следствия 6.

Лемма 21. *Имеет место равенство*

$$||D^{-1}(0)D(t)|| = ||D^{-1}(0)D(-t)||.$$

Доказательство. Норма диагональной матрицы $D^{-1}(0)D(t)$ выражается формулой

$$||D^{-1}(0)D(t)|| = \max_{1 \leq k \leq n} \left| \frac{\Gamma(k + t)\Gamma(n + 1 - k - t)}{\Gamma(k)\Gamma(n + 1 - k)} \right|. \tag{11}$$

Заменяя в (11) k на $n + 1 - k$, получим аналогичное выражение для нормы $||D^{-1}(0)D(-t)||$. Отсюда следует утверждение леммы.

Предложение 8. *При $t \notin \mathbb{Z}$ справедливо неравенство*

$$\frac{1}{\kappa(t)} \le ||D^{-1}(0)D(t)||^2.$$

Доказательство. Согласно Следствию 5 имеем $||L_n(-t)|| \le 1$. Пользуясь Предложением 7, получим

$$\frac{1}{\kappa(t)} = ||L_n^{-1}(t)|| = ||D^{-1}(0)D(-t)L_n(-t)D^{-1}(0)D(t)|| \le$$
$$\le ||D^{-1}(0)D(-t)|| \cdot ||D^{-1}(0)D(t)||.$$

Для завершения доказательства достаточно воспользоваться Леммой 21.

Нам потребуется оценить $\kappa(t)$ при $t = \alpha + n$, $0 < |\alpha| < 1$.

Лемма 22. *При $t = \alpha + n$, $0 < |\alpha| < 1$ справедливо неравенство*

$$\left|\frac{\Gamma(k+t)\Gamma(n+1-k-t)}{\Gamma(k)\Gamma(n+1-k)}\right| \le \frac{\pi}{|\sin \pi\alpha|}\,\frac{(n+k)!}{(k-1)!k!(n-k)!}. \tag{12}$$

Доказательство. Пользуясь формулой $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \pi/\sin \pi z$, получим

$$\Gamma(1-k-\alpha) = \frac{(-1)^k \pi}{\Gamma(k+\alpha)\sin \pi\alpha}. \tag{13}$$

Подставляя $t = \alpha + n$ в левую часть (12) и применяя формулу (13), получим

$$\left|\frac{\Gamma(n+k+\alpha)\Gamma(1-k-\alpha)}{\Gamma(k)\Gamma(n+1-k)}\right| = \left|\frac{\pi\Gamma(n+k+\alpha)}{\sin \pi\alpha\Gamma(k)\Gamma(k+1)\Gamma(n+1-k)}\right|. \tag{14}$$

Отношение $\Gamma(n+k+\alpha)/\Gamma(k+\alpha)$ есть многочлен от α. Легко видеть, что он монотонно возрастает и положителен при $|\alpha| < 1$. Поэтому правую часть (14) можно оценить выражением

$$\frac{\pi}{|\sin \pi\alpha|}\,\frac{\Gamma(n+k+\alpha)}{\Gamma(k)\Gamma(k+1)\Gamma(n+1-k)}.$$

Остается воспользоваться тем, что $\Gamma(m) = (m-1)!$.

Лемма 23. *Для $1 \le k \le n$ выражение*

$$\nu(k) = \frac{(n+k)!}{(k-1)!k!(n-k)!}$$

достигает максимума при $k = k_n$ таком, что

$$k_n = \frac{n}{\sqrt{2}} + O(1).$$

Доказательство. Легко проверить, что отношение

$$\frac{\nu(k+1)}{\nu(k)} = \frac{(n+k+1)(n-k)}{k(k+1)}$$

не меньше единицы при $k \le \zeta$ и строго меньше единицы при $k > \zeta$, где

$$\zeta = \frac{\sqrt{2n^2+2n+1}-1}{2}.$$

Поэтому $\nu(k)$ возрастает с ростом k, пока $k \le \zeta$, а при больших значениях k убывает, так что $\nu(k)$ достигает максимального значения при $k = k_n$ таком, что $k_n > \zeta$ и $k_n \le \zeta + 1$. Таким образом

$$k_n > \frac{n}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \qquad \text{и} \qquad k_n < \frac{n}{\sqrt{2}} + 1.$$

Из полученных оценок прямо следует утверждение леммы.

Лемма 24. *Пусть $p, q, r \in \mathbb{Z}$ таковы, что $pn + qk_n + r > 0$. При $n \to \infty$ имеет место асимптотическая формула*

$$\frac{1}{n}\ln\left((pn+qk_n+r)!\right) = \left(p + \frac{q}{\sqrt{2}}\right)\left(\ln n + \ln\left(p+\frac{q}{\sqrt{2}}\right) - 1\right) + o(1).$$

Доказательство получается прямым вычислением с использованием Леммы 23 и формулы (см. [5]) :

$$\ln n! = \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n - n + \frac{1}{2}\ln 2\pi + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Лемма 25.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\ln\nu(k_n) = 2\ln(\sqrt{2}+1).$$

Доказательство следует из Леммы 24.

Следствие 7. Для любого $C > 2\ln(\sqrt{2}+1)$ и всех $n > n(C)$ справедливо неравенство

$$\nu(k_n) < e^{Cn},$$

где $n(C)$ – некоторая величина, зависящая от C.

Лемма 26. *Пусть* $|\alpha| \leq 1$ *и* $C > 2\ln(\sqrt{2}+1)$. *Тогда для* $n \geq n(C)$ *выполняется неравенство*

$$\kappa(\alpha+n) \geq \frac{\sin^2 \pi\alpha}{\pi^2} e^{-2Cn}.$$

Доказательство. Пользуясь формулой (11), Леммой 22 и Следствием 7, получим, что при $0 < |\alpha| \leq 1$ и $n \geq n(C)$ справедлива оценка

$$||D^{-1}(0)D(\alpha+n)|| \leq \frac{\pi}{|\sin \pi\alpha|}\nu(k_n) < \frac{\pi}{|\sin \pi\alpha|}e^{Cn}.$$

Для завершения доказательства остается воспользоваться Предложением 8.

Чтобы оценить η_n с помощью Теоремы 2, нам понадобится следующая

Лемма 27. *При* $C > 2\ln(\sqrt{2}+1)$, $n \geq n(C)$ *и* $\tau \in [0,1]$

$$\int_0^1 \kappa^2(\tau-\sigma+n)\,d\sigma > \frac{3}{8\pi^4}e^{-4Cn}. \tag{15}$$

Доказательство. Отметим, что при $\sigma, \tau \in [0,1]$ разность $\alpha = \tau - \sigma$ удовлетворяет неравенству $|\alpha| \leq 1$. Поэтому, пользуясь Леммой 26, оценим снизу левую часть (15) интегралом

$$e^{-4Cn}\int_0^1 \frac{\sin^4 \pi(\tau-\sigma)}{\pi^4}\,d\sigma = \frac{3}{8\pi^4}e^{-4Cn}.$$

Лемма доказана.

Лемма 28. *Для любого* $C > 8\ln(\sqrt{2}+1)$, *начиная с некоторого* n, *выполняется оценка*

$$1-\eta_n > e^{-Cn}.$$

Доказательство. Применяя Лемму 27 к Теореме 2, мы получим, что для произвольного $C' > 2\ln(\sqrt{2}+1)$ и $n \geq n(C')$ имеет место оценка

$$1-\eta_n > \frac{3}{16\pi^4}e^{-4C'n},$$

откуда с очевидностью следует утверждение леммы.

Наконец, из Следствия 2, Леммы 28 и Следствия 4 получим наш основной результат.

Теорема 3. *Для любого* $C_1 > 8\ln(\sqrt{2}+1)$ *и* $C_2 = \frac{\pi}{2}$, *при достаточно больших* s *справедлива двусторонняя оценка*

$$\exp(-C_1 s) < 1 - \rho_s < \exp(-C_2 s).$$

ABSTRACT. The integral operator from $L^2(\gamma,\delta)$ to $L^2(\alpha,\beta)$ with the kernel $\exp(2\pi ixy)$ is considered. Its norm ρ_s depends solely on $s = (\alpha-\beta)\cdot(\gamma-\delta)$. The paper demonstrates the existence of constants C_1, C_2, such that for sufficiently large s the estimate $\exp(-C_1 s) < 1 - \rho_s < \exp(-C_2 s)$ holds.

ЛИТЕРАТУРА

1. M. Benedicks, "Fourier transforms of functions supported on sets of finite Lebesgue measure," J. Math. An. Appl., vol. 106, pp. 180 – 183, 1985.
2. W. O. Amrein, A. M. Berthier, "On support properties of L^p-functions and their Fourier transforms," J. Funct. Anal., vol. 24, pp. 258 – 267, 1977.
3. Н. Винер, Р. Пэли, Преобразование Фурье в Комплексной Области, М., 1964.
4. Л. Шварц, Математические Методы для Физических Наук, М., Мир, 1965.
5. Э. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон, Курс Современного Анализа, т. 2, М., 1963.

28 Декабря 1991

Межвузовский научный центр
по прикладным проблемам
математики