АСИМПТОТИКИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ ГАУССОВСКИХ ПОЛЕЙ : ПРИМЕНЕНИЯ

В. Р. Фаталов

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
том 28, №5, 1993

Работа посвящена применениям результатов работы [1] с целью получения асимптотик : а) предельных распределений статистик Колмогорова–Смирнова ; б) распределений максимумов винеровских полей ; в) распределения максимума l_k^p–нормы векторного гауссовского случайного процесса

§1. АСИМПТОТИКИ ПРЕДЕЛЬНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ СТАТИСТИК КОЛМОГОРОВА–СМИРНОВА ДЛЯ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ СЕМЕЙСТВ

В статистической практике критерий Колмогорова–Смирнова является одним из самых распространенных критериев для проверки (простой) гипотезы о принадлежности наблюдаемых данных распределению с конкретной функцией распределения (ф. р.) $F(x)$. Распределения статистик Колмогорова и Смирнова можно найти у этих авторов в 1933 [2] и в 1939 [3]. Однако довольно часто приходится сталкиваться с гипотезой о том, что выборка извлечена из распределения определенного типа, так что ее ф. р. $F(x, \theta)$ оказывается заданной с точностью до некоторого параметра θ. В этом случае предельные распределения статистик Колмогорова–Смирнова уже зависят от ф. р. F и до сих пор не найдены. Ниже мы укажем точные асимптотики этих предельных распределений.

Рассмотрим теперь задачу проверки сложной гипотезы

$$H_0 : \quad G \in \mathcal{F} = \{F(x, \theta),\ \theta = (\theta_1, ..., \theta_q) \in \Theta \subset \mathbb{R}^q,\ x \in \mathbb{R}^1\},$$

где $G(x)$ – неизвестная непрерывная функция распределения, $\mathcal{F}$ – семейство функций распределения $F(x,\theta)$, зависящих от параметра $\Theta = (\theta_1, ..., \theta_q)$. Предположим также, что класс распределений $\mathcal{F}$ удовлетворяет условиям регулярности по θ (см. [4], гл. 33), а $f(x,\theta) = \dfrac{\partial}{\partial x}F(x,\theta)$ – плотность распределения. Предположим, что объем N выбран из ф. р. $F(x,\theta_0)$. Тогда оценка максимального правдоподобия θ^* параметра θ_0 является асимптотически нормальной и эффективной. Обозначим через $F_N(x)$ эмпирическую функцию распределения, и пусть $F^0(x) = F(x,\theta_0)$. Хорошо известно (см. [5]), что в параметрической ситуации эмпирический процесс $\zeta_N(x) = \sqrt{N}(F_N(x) - F(x,\theta^*))$, при справедливости гипотезы H_0 после замены $t = F^0(x)$ слабо сходится (при $N \to \infty$) в метрике $D[0,1]$ к гауссовскому процессу $w(t)$ со средним нуль и ковариационной функцией

$$\mathbf{E}w(t)w(s) = \min(t,s) - ts - \left[\frac{\partial}{\partial\theta_i}F(x,\theta^0)\right]^T\Bigg|_{x=F^{-1}(t,\theta^0)} \times$$

$$\times J^{-1}\left[\frac{\partial}{\partial\theta_j}F(y,\theta^0)\right]\Bigg|_{y=F^{-1}(s,\theta^0)} \tag{1.1}$$

где $\left[\dfrac{\partial}{\partial\theta_i}F(x,\theta^0)\right]$, $i = 1, ..., q$ – q-мерный вектор-столбец,

$$J = \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial\theta_i}\ln f(x,\theta^0)\frac{\partial}{\partial\theta_j}\ln f(x,\theta^0)\, dF^0(x)\right]_{i,j=\overline{1,q}}$$

– информационная матрица Фишера размера $q \times q$, J^{-1} – обратная матрица к J, а $F^{-1}(t,\theta^0) = \inf\{x:\ F^0(x) = t\}$.

Применение статистик Колмогорова-Смирнова

$$D_N = \sup\{|\zeta_N(x)|,\ x \in \mathbb{R}^1\}, \quad D_N^+ = \sup\{\zeta_N(x),\ x \in \mathbb{R}^1\}$$

для проверки гипотезы H_0 предполагает знание предельных (при $N \to \infty$) распределений вероятностей $\mathbf{P}(D_N > u)$, $\mathbf{P}(D_N^+ > u)$. В наших условиях эти предельные распределения существуют, но до сих пор неизвестны. Процесс $w(t)$, $t \in [0,1]$ входит в класс полей, изученных в работе [1] и следовательно справедлива следующая

Теорема 1.1. *Пусть дисперсия $\sigma^2(t)$ предельного гауссовского процесса $w(t)$ достигает своего максимума σ^2 на $[0,1]$ в конечном числе внутренних точек $b_1, ..., b_l$, причем в окрестностях каждой из них существуют производные $\dfrac{d^{2p_k-1}}{dt^{2p_k-1}}\sigma^2(t)$, $k = 1, ..., l$ такие, что $\dfrac{d^i}{dt^i}\sigma^2(b_k) = 0$, $i = 1, ..., 2p_k - 1$, а*

$\frac{d^{2p_k}}{dt^{2p_k}}\sigma^2(b_k) < 0$. *Тогда*

$$\lim_{N\to\infty} \mathbf{P}(D_N > u) = \mathbf{P}\left\{\sup_{[0,1]} |w(t)| > u\right\} = 2\mathbf{P}\left\{\sup_{[0,1]} w(t) > u\right\}(1+o(1)) =$$

$$= \exp\left[-\frac{u^2}{2\sigma^2}\right] \frac{u\sqrt{2}}{\sigma^2\sqrt{\pi\sigma}} \sum_{k=1}^{l} \left(\frac{u^2}{\sigma^3}\right)^{-1/(2p_k)} \left[\frac{d^{2p_k}}{dt^{2p_k}}\sigma^2(b_k)\right]^{-1/2} \times$$

$$\times((2p_k-1)!)^{1/2} p_k^{-1/2} \Gamma\left(\frac{1}{2p_k}\right)(1+o(1)), \quad u\to\infty,$$

где величины σ, l, p_k, b_k зависят от θ_0, а $\Gamma(\cdot)$ - гамма-функция.

Заметим, что для масштабно-сдвиговых и некоторых других семейств зависимость от θ_0 исчезает. Ниже приводятся соответствующие примеры.

Доказательство основано на использовании Теоремы 1.2(i) из [1] с $p = n = 1$. Согласно формуле Тейлора в окрестностях каждой точки b_k имеем разложения

$$\sigma_t = \sigma + \frac{(t-b_k)^{2p_k}}{2(2p_k)!\sigma} \frac{d^{2p_k}}{dt^{2p_k}}\sigma^2(b_k)(1+o(1)), \quad t\to b_k, \quad k=1,\dots,l.$$

Обозначив $R(t,s) = \mathbf{E}w(t)w(s)$, при $t,s\to b_k$ по формуле Лагранжа получаем

$$R^2(t,s) - \sigma^2(t)\sigma^2(s) = -\sigma^2|t-s| + o(|t-s|).$$

Следовательно, для корреляционной функции $r(t,s)$ процесса $w(t)$ выполнено

$$r(t,s) = 1 - (2\sigma^2)^{-1}|t-s| + o(|t-s|), \quad t,s\to b_k.$$

Выполнение условия (III) Теоремы 1.2 из [1] легко проверяется :

$$\mathbf{E}(w(t)-w(s))^2 \le |t-s|, \qquad t,s\in[0,1].$$

Таким образом, вычисляя необходимые константы и применяя Замечание 1.1 и Следствие 2.1 из [1] получаем утверждение теоремы.

Перейдем к рассмотрению примеров.

Пример 1.1. *Проверка гипотезы о нормальности одномерной выборки.*

Пусть

$$\varphi(x) = (2\pi)^{-1/2}\exp[-x^2/2], \quad \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x}\varphi(t)\,dt$$

– плотность и функция распределения стандартного нормального закона. Относительно неизвестной функции распределения $F(x)$ проверяется одна из трех гипотез :

a) H_1 : $F(x) \in \mathcal{F}_1 = \left\{\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right), \ a \in \mathbb{R}^1, \ \sigma \in (0,\infty)\right\}$, оба параметра - среднее a и среднеквадратичное уклонение σ неизвестны ;

b) H_2 : $F(x) \in \mathcal{F}_2 = \left\{\Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right), \ \sigma \in (0,\infty)\right\}$, дисперсия σ^2 неизвестна ;

c) H_3 : $F(x) \in \mathcal{F}_3 = \left\{\Phi(x-a), \ a \in \mathbb{R}^1\right\}$, среднее a неизвестно.

Пусть оценками a и σ^2 выбраны, соответственно, выборочные среднее и дисперсия. Пусть $w_i(t)$, $t \in [0,1]$, $i = 1,2,3$ – предельные гауссовские процессы, возникающие при проверке гипотез H_i. Соответствующие ковариационные функции определяются по формуле (1.1) и равны :

a) $\mathbf{E}w_1(t)w_1(s) = \min(t,s) - ts - \varphi(\Phi^{-1}(t))\varphi(\Phi^{-1}(s))(1 + \Phi^{-1}(t)\Phi^{-1}(s)/2)$,

b) $\mathbf{E}w_2(t)w_2(s) = \min(t,s) - ts - \Phi^{-1}(t)\Phi^{-1}(s)\varphi(\Phi^{-1}(t))\varphi(\Phi^{-1}(s))/2$,

c) $\mathbf{E}w_3(t)w_3(s) = \min(t,s) - ts - \varphi(\Phi^{-1}(t))\varphi(\Phi^{-1}(s))$. Тогда верны следующие соотношения при $u \to \infty$:

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{[0,1]} w_1(t) > u\right\} = \exp\left[-\frac{2\pi}{\pi-2}u^2\right]\left(-\frac{2\pi}{\pi-2}\right)^{1/2}(1+o(1)), \tag{1.2}$$

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{[0,1]} w_2(t) > u\right\} = \exp[-2u^2]\frac{\sqrt{6}}{3}(1+o(1)), \tag{1.3}$$

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{[0,1]} w_3(t) > u\right\} = \exp\left[-\frac{2\pi}{\pi-2}u^2\right]\frac{\sqrt{u}}{\pi-2}\Gamma(1/4)\left(\frac{3}{2}\pi\right)^{1/4}(1+o(1)).$$

Отметим, что здесь дисперсии $\sigma_i^2(t)$, $i = 1,2,3$ во всех трех случаях достигают единственного максимума на [0,1] в точке $t = 1/2$. В случаях a) и b) вторые производные дисперсий, равные

$$\frac{d^2}{dt^2}\sigma_1^2(t) = -((\Phi^{-1}(t))^2 - 1)^2, \quad \frac{d^2}{dt^2}\sigma_2^2(t) = ((\Phi^{-1}(t))^2 - 1)(3 - (\Phi^{-1}(t))^2)$$

строго отрицательны в точке $t = 1/2$, в то время, как в случае c) дисперсия $\sigma_3^2(t)$ имеет вторую производную $-2(\Phi^{-1}(t))^2$, которая обращается в нуль в точке максимума $t = 1/2$. Подсчет высших производных дает :

$$\frac{d^3}{dt^3}\sigma_3^2(1/2) = 0, \qquad \frac{d^4}{dt^4}\sigma_3^2(1/2) = -8\pi.$$

Теперь остается сосчитать необходимые константы и воспользоваться Теоремой 1.1.

Асимптотики в случаях a) и b) впервые были получены Ю. Тюриным в работах [6, 7]. Результат случая c) впервые опубликован в [8].

Пример 1.2. *Проверка экспоненциальности и принадлежности закону Релея.* Пусть проверяется одна из двух гипотез

$$H_4: \qquad F(x) \in \left\{1 - \exp\left(-\frac{x}{\theta}\right), \quad \theta > 0\right\}$$

и

$$\widetilde{H}_4: \qquad F(x) \in \left\{1 - \exp\left(-\frac{x^2}{2\theta^2}\right), \quad \theta \neq 0\right\}.$$

В обоих случаях предельный гауссовский процесс $w_4(t)$ будет иметь среднее нуль и ковариационную функцию (см. [11], [12]) :

$$\mathbf{E}w_4(t)w_4(s) = \min(t, s) - ts - (1-t)(1-s)\ln(1-t)\ln(1-s).$$

Дисперсия $\sigma_4^2(t)$ процесса $w_4(t)$ достигает своего максимума σ_4^2 на $[0,1]$ в точке $t_0 \approx 0.3397$, являющейся корнем уравнения

$$\frac{d}{dt}\sigma_4^2(t) \equiv 1 - 2t + 2(1-t)\ln(1-t)(1 + \ln(1-t)) = 0.$$

В силу Теоремы 1.1 имеет место следующее асимптотическое разложение :

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{[0,1]} w_4(t) > u\right\} = a_4 \exp\left[-\frac{u^2}{2\sigma_4^2}\right](1 + o(1)), \quad u \to \infty, \tag{1.4}$$

где

$$\frac{1}{2\sigma_4^2} \approx 3.351, \qquad a_4 = (\sqrt{2}\sigma_4)^{-1}\left[-\frac{d^2}{dt^2}\sigma_4^2(t_0)\right]^{-1/2} \approx 1.344.$$

Этот результат был впервые получен в [7], см. также [13].

Пример 1.3. *Проверка на принадлежность закону Коши.* Проверяется гипотеза

$$H_5: \qquad F(x) \in \left\{\frac{1}{\pi}\arctan(x - \theta) + \frac{1}{2}, \quad |\theta| < \infty\right\}$$

о том, что выборка извлечена из распределения Коши с неизвестным параметром сдвига θ. Ковариационная функция предельного гауссовского процесса $w_5(t)$ имеет вид (см. [12])

$$\mathbf{E}w_5(t)w_5(s) = \min(t,s) - ts - 2\pi^{-2}\sin^2(\pi t)\sin^2(\pi s).$$

Дисперсия $\sigma_5^2(t)$ процесса $w_5(t)$ достигает своего максимума на $[0,1]$ в двух симметричных (относительно $1/2$) точках $t_1 \approx 0.2280$, $t_2 \approx 0.7720$, которые являются корнями уравнения

$$\frac{d}{dt}\sigma_5^2(t) \equiv 1 - 2t - 4\pi^{-1}\sin(2\pi t)\sin^2(\pi t) = 0.$$

Заметим, что третий корень $t_3 = 1/2$ этого уравнения есть точка минимума дисперсии. Применение Теоремы 1.1 дает нам такую асимптотику

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{[0,1]} w_5(t) > u\right\} = a_5 \exp\left[-\frac{u^2}{2\sigma_5^2}\right](1+o(1)), \quad a_5 \approx 1.503, \quad \frac{1}{2\sigma_5^2} \approx 3.614.$$

Пример 1.4. *Проверка на принадлежность гамма-распределению.*

Проверяется гипотеза $H_6: F(x) \in \{L_m(x/\theta),\ \theta > 0\}$

$$L_m(x) = \frac{1}{(m-1)!}\int_0^x t^{m-1}e^{-t}\,dt \equiv 1 - e^{-x}\sum_{i=1}^{m-1}\frac{x^i}{i!}, \quad x > 0.$$

Предположим, что $m \geq 2$. Ковариационная функция предельного гауссовского процесса равна (см. [12])

$$\mathbf{E}w_6(t)w_6(s) = \min(t,s) - ts - m^{-1}l_m(L_m^{-1}(t))l_m(L_m^{-1}(s)),$$

где

$$l_m(x) = \frac{\partial}{\partial t}L_m(x) = \frac{x^{m-1}e^{-x}}{(m-1)!}.$$

Имеют место соотношения

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{[0,1]} w_6(t) > u\right\} = a_6 \exp\left[-\frac{u^2}{2\sigma_6^2}\right](1+o(1)), \quad u \to \infty,$$

где $\sigma_6^2 = \mathbf{Var}w_6(t_0)$, а $t_0 = t_0(m)$ - единственный корень на (0.1) уравнения

а) при $m = 2$, $-1 + e^{-x}(1+3x)|_{x=L_2^{-1}(t)} = 0$, $t_0 \approx 0.5673$, $a_6 \approx 1.118$, $\frac{1}{2\sigma_6^2} \approx 2.436$;

b) при $m = 3$, $\quad -1+2e^{-x}(1+\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}x^2)|_{x=L_3^{-1}(t)} = 0$, $\quad t_0 \approx 0.5222$, $a_6 \approx 1.076$, $\frac{1}{2\sigma_6^2} \approx 2.172$;

c) при $m = 4$, $\quad -1+2e^{-x}(1+x+\frac{3}{8}x^2+\frac{5}{24}x^3)|_{x=L_4^{-1}(t)} = 0$, $\quad t_0 \approx 0.5101$, $a_6 \approx 1.046$, $\frac{1}{2\sigma_6^2} \approx 2.091$;

d) при $m = 5$, $\quad -1+2e^{-x}(1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{15}x^3+\frac{1}{20}x^4)|_{x=L_5^{-1}(t)} = 0$, $\quad t_0 \approx 0.5055$, $a_6 \approx 1.031$, $\frac{1}{2\sigma_6^2} \approx 2.057$.

Аналогичные расчеты могут быть проведены и для $m > 5$.

Приведем вид оценок максимального правдоподобия для параметров в Примерах 1.2 - 1.4 (см. [12]) :

Пример 1.2 : $\quad \theta = (N-1)^{-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - x_{(1)}), \quad x_{(1)} = \min_{1\le i\le N} x_i$;

Пример 1.3 : $\quad \theta$ – корень уравнения

$$\theta = \left(\sum_{i=1}^{N}[1+(x_i-\theta)^2]^{-1}\right)^{-1}\sum_{i=1}^{N}x_i[1+(x_i-\theta)^2]^{-1};$$

Пример 1.4 : $\quad \theta = (mN)^{-1}\sum_{i=1}^{N}x_i$.

Пример 1.5. *Проверка на принадлежность закону Вейбулла–Гнеденко (а также двойному экспоненциальному распределению).*

Проверяется гипотеза

$$H_7: \qquad F(x) \in \{1-\exp(-(x/v)^k), \quad x \ge 0, \quad v > 0, \quad k > 0\}$$

о принадлежности выборки распределению Вейбулла–Гнеденко с двумя неизвестными параметрами v (параметр масштаба) и k (параметр формы). Довольно громоздкие вычисления по формуле (1.1) дают следующий вид ковариационной функции предельного гауссовского процесса $w_7(t)$:

$$\mathbf{E}w_7(t)w_7(s) = \min(t,s) - ts - 6\pi^{-2}(1-t)(1-s)\ln(1-t)\ln(1-s)\times$$
$$\times\left[(1-C)^2+\pi^2/6+(C-1)\ln\ln\frac{1}{1-t}+(C-1)\ln\ln\frac{1}{1-s}\ln\ln\frac{1}{1-t}\ln\ln\frac{1}{1-s}\right],$$

где $C \approx 0.577216$ - постоянная Эйлера. Теорема 1.1 дает следующую асимптотику :

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{[0,1]} w_7(t) > u\right\} = a_7\exp\left[-\frac{u^2}{2\sigma_7^2}\right](1+o(1)), \quad u\to\infty, \qquad (1.5)$$

где $t_0 \approx 0.5516$ – единственная точка достижения максимума дисперсией $\sigma_7^2(t) = \mathbf{Var}\, w_7(t)$, которая является единственным на $[0,1]$ корнем уравнения

$$\frac{d}{dt}\sigma_7^2(t) \equiv 12\pi^{-2}\Bigg[1 - C - C^2 - \frac{\pi^2}{3} + \ln(1-t)(3C - 3C^2 - \frac{\pi^2}{2}) -$$

$$-\ln^2(1-t)((1-C)^2 + \frac{\pi^2}{6}) - 2C\ln\ln\frac{1}{1-t} + (3-6C)\ln(1-t)\ln\ln\frac{1}{1-t} +$$

$$+2(1-C)\ln^2(1-t)\ln\ln\frac{1}{1-t} - \left(\ln\ln\frac{1}{1-t}\right)^2(\ln^2(1-t) + 3\ln(1-t) + 1)\Bigg] = 0.$$

Соответствующие константы имеют вид $a_7 \approx 2.296$, $\dfrac{1}{2\sigma_7^2} \approx 5.852$. Разложение (1.5) уточняет Теорему 1 из [14].

Несложно применить Теорему 1.1 и для проверки гипотезы о принадлежности выборки распределению Вейбулла-Гнеденко с двумя неизвестными параметрами формы k при известном параметре масштаба v. Случай, когда неизвестен только один параметр v легко сводится к экспоненциальному (см. [14]). Напомним (см. [14]), что ξ – случайная величина, имеющая распределение Вейбулла-Гнеденко, преобразованием $\ln\xi$ превращается в случайную величину, имеющую двойное экспоненциальное распределение с ф. р. $1 - \exp[-\exp((x-a)/\theta)]$, где параметры a и θ очевидным образом связаны с k и v. Статистики Колмогорова-Смирнова при указанном переходе от ξ к $\ln\xi$ не меняются. В [14] имеются таблицы для сравнения асимптотических результатов со значениями, полученными методом Монте-Карло в [15].

Проверка гипотезы о нормальности многомерной выборки.

Пусть проверяется гипотеза

H_0 : о принадлежности выборки $x_1, \ldots, x_N$ n-мерному невырожденному нормальному распределению с ф. р. $F(x, a, \Sigma)$. Математическое ожидание a и ковариационная матрица Σ предполагаются неизвестными. Обозначим через a^* и Σ^* оценку максимального правдоподобия параметров a и Σ, соответственно, и пусть $F_N(y)$ обозначает эмпирическую ф. р., которая построена по преобразованной выборке $y_i = C(x_i - a^*)$, $i = 1, \ldots, N$, где невырожденная матрица C такова, что $C\Sigma^* C^T = I$, I – единичная матрица. Известно (см. [17], [18]), что эмпирическое случайное поле $\zeta_N(y) = \sqrt{N}(F_N(y) - F(y, 0, I))$ после замены $t_i = \Phi(y^i)$,

$i = 1, ..., n$, $y = (y^1, ..., y^n)$ при гипотезе H_0 слабо сходится в метрике $D[0,1]^n$ (при $N \to \infty$) к гауссовскому случайному полю $W(t)$ со средним нуль и ковариационной функцией

$$\begin{aligned}\mathbf{E}W(t)W(s) = &\prod_{i=1}^{n} \min(t_i, s_i) - \prod_{i=1}^{n} t_i s_i - \\ &- \sum_{i=1}^{n} \varphi(\Phi^{-1}(t_i))\varphi(\Phi^{-1}(s_i)) \left[1 + \frac{1}{2}\Phi^{-1}(t_i)\Phi^{-1}(s_i) \prod_{k=1,k\neq i}^{n} t_k s_k\right] - \\ &- \sum_{i,j=1,i<j}^{n} \varphi(\Phi^{-1}(t_i))\varphi(\Phi^{-1}(s_i))\varphi(\Phi^{-1}(t_j))\varphi(\Phi^{-1}(s_j)) \prod_{k\neq j,k\neq i} t_k s_k,\end{aligned}$$

где Φ и φ те же, что и в Примере 1.1, а $t = (t_1, ..., t_n)$, $s = (s_1, ..., s_n)$.

Рассмотрим статистику Колмогорова–Смирнова $K_N = \sup\{|\zeta_N(y)| : y \in \mathbb{R}^n\}$.

Теорема 1.2. *Пусть дисперсия $\sigma^2(t)$ предельного гауссовского поля $W(t)$ достигает своего максимума σ^2 в конечном числе точек $b_1, ..., b_l$, которые являются внутренними точками из $[0,1]^n$, причем матрицы $\Lambda_k = (\lambda_{ij}^k)_{i,j=\overline{1,n}}$, $\lambda_{ij}^k = -\dfrac{\partial^2}{\partial t_i \partial t_j}\sigma^2(b_k)$, $k = 1, ..., l$ невырождены. Тогда*

$$\lim_{N\to\infty} \mathbf{P}(K_N > u) = \mathbf{P}\left\{\sup_{[0,1]^n} |W(t)| > u\right\} = 2\mathbf{P}\left\{\sup_{[0,1]^n} W(t) > u\right\}(1 + o(1)) =$$

$$= \exp\left[-\frac{u^2}{2\sigma^2}\right] u^{n-1}\sqrt{2}\sigma^{1-2n}\pi^{(n-1)/2} \sum_{k=1}^{l}\prod_{i=1}^{n}(b_{ki})^{n-1}|\det\Lambda_k|^{-1/2}(1 + o(1)),$$
$$u \to \infty,$$

где $b_k = (b_{k1}, ..., b_{kn})$.

Следствие 1.1. При $n = 2$ дисперсия $\sigma^2(t)$ поля $W(t)$, $t = (t_1, t_2)$ достигает своего максимума на $[0,1]^2$ в двух (симметричных относительно диагонали $t_1 = t_2$) точках $t_0 = (0.579; 0.800)$ и $\bar{t}_0 = (0.800; 0.579)$. Имеет место следующее асимптотическое соотношение :

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{[0,1]^2} |W(t)| > u\right\} = 309.4\exp[-4.939u^2]u(1 + o(1)), \quad u \to \infty.$$

Доказательство Следствия 1.1 можно найти в [19].

Доказательство Теоремы 1.2. Мы используем Теорему 1.2 (iii) и Замечание 1.1 из [1]. По формуле Тейлора в точке b_k, $k = 1, ..., l$ имеем

$$\sigma(t) = \sigma - (4\sigma)^{-1}(t - b_k)\Lambda_k(t - b_k)^T + o(|t - b_k|^2), \quad t \to b_k. \tag{1.6}$$

В силу Замечания 1.1 из [1] для достаточно малых взаимно непересекающихся окрестностей V_k точек b_k справедливо соотношение

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{[0,1]^n} W(t) > u\right\} = \sum_{k=1}^{l} \mathbf{P}\left\{\sup_{V_k} W(t) > u\right\}(1 + o(1)), \quad u \to \infty. \tag{1.7}$$

Для невырожденной симметрической матрицы Λ_k найдется такая невырожденная матрица B_k, что $B_k\Lambda_k B_k^T = I$. Рассмотрим гауссовское поле $W_k(t) \equiv W(B_k t)$, определенное на компактном множестве $B_k^{-1}(V_k) = \{B_k^{-1}x : x \in V_k\}$. Дисперсия $\sigma_k^2(t) \equiv \sigma^2(B_k t)$ of $W_k(t)$ достигает своего максимума σ^2 на $B_k^{-1}(V_k)$ в единственной точке $c_k = B_k^{-1}b_k$. В окрестности этой точки в силу (1.6) имеем

$$\sigma_k(t) = \sigma - |A(t - c_k)|_{\mathbf{2}}(1 + o(1)), \quad t \to c_k, \tag{1.8}$$

где $A = \mathrm{diag}((2\sqrt{\sigma})^{-1}, ..., (2\sqrt{\sigma})^{-1})$ - диагональная матрица, а $\mathbf{2} = (2, ..., 2) \in \mathbb{R}^n$. Таким образом, здесь $f_1 = \cdots = f_n = 1$ и $\beta_1 = \cdots = \beta_n = 2$ (см. Теорему 1.2 из [1]). Обозначив $R(t,s) = \mathbf{E}W(t)W(s)$, $\mathbf{1} = (1, ..., 1) \in \mathbb{R}^n$, получим

$$R^2(t,s) - \sigma^2(t)\sigma^2(s) = -\sigma^2 \sum_{i=1}^{n} |t_i - s_i| \prod_{j=1, j\neq i}^{n} b_{kj} + o(|t - s|_{\mathbf{1}}), \quad t, s \to b_k.$$

Следовательно для корреляционной функции $r_k(t,s)$ поля $W_k(t)$, $t \in B_k^{-1}(V_k)$ справедливо разложение при $t, s \to c_k$

$$r_k(t,s) = 1 - |D_k B_k(t - s)|_{\mathbf{1}} + o(|t - s|_{\mathbf{1}}), \tag{1.9}$$

где матрица D_k также диагональна :

$$D_k = \mathrm{diag}\left((2\sigma^2)^{-1} \prod_{j=1, j\neq 1}^{n} b_{kj}, ..., (2\sigma^2)^{-1} \prod_{j=1, j\neq n}^{n} b_{kj}\right)$$

Отсюда видно, что $e_1 = \cdots = e_n = 1$ и $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 1$ (см. Теорему 1.2 из [1]). Несложно убедиться также, что для некоторых $C > 0$ и $\varepsilon > 0$ имеет место неравенство

$$\mathbf{E}(W_k(t) - W_k(s))^2 \le C|t - s|_{\mathbf{1}}, \quad t, s \in B_k^{-1}(V_k), \quad |t - s| < \varepsilon,$$

т. е. выполнено условие (III) Теоремы 1.2 из [1]. Теперь остается использовать Теорему 1.2 и Следствие 2.1 из [1], равенство (1.7) для получения доказательства утверждения Теоремы 1.2, так как

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{V_k} W(t) > u\right\} = \mathbf{P}\left\{\sup_{B_k^{-1}(V_k)} W_k(t) > u\right\} \quad \text{и} \quad |\det B_k| = |\det \Lambda_k|^{-1/2}.$$

§2. ПРОВЕРКА НЕЗАВИСИМОСТИ

Нам понадобится следующий вариант Теоремы 1.1 из [1]. Пусть гауссовское сепарабельное случайное поле $X(t)$ определено компактом $T \subset \mathbb{R}^n$ с непрерывными траекториями, удовлетворяюшими условиям (I) - (IV) из [1] и следующим условиям :

($\tilde{\mathrm{I}}$) Дисперсия $\sigma^2(t)$ поля $X(t)$ непрерывна на T и имеет место соотношение

$$\sigma(t) = \sigma - |G(t)|^\beta + o(|G(t)|^\beta), \qquad G(t) \to 0,$$

где $\beta > 0$, $T_0 = \{t \in T : \ G(t) = 0\}$.

($\widetilde{\mathrm{II}}$) Функция $G(t)$ удовлетворяет условиям теоремы о неявной функции : $G(t)$ непрерывна на множестве

$$T_o^\varepsilon = \left\{t \in T : \quad \inf_{s \in T_0} |t - s| \le \varepsilon\right\}, \qquad \varepsilon > 0,$$

и имеет место представление $T_o^\varepsilon = \bigcup_{i=1}^{M} T_i$ такое, что производная $\dfrac{\partial G(t)}{\partial t_i}$ существует и непрерывна при $t \in T_i$, $i = 1, ..., M$, а при $t \in T_0 \cap T_i$, $\dfrac{\partial G(t)}{\partial t_i} \neq 0$.

($\widetilde{\mathrm{III}}$) Выполнено включение $T_0 \subset \overline{U} \subset T$ для некоторого открытого множества $U \subset \mathbb{R}^n$ (здесь $\overline{U}$ - замыкание множества U).

Из условий ($\tilde{\mathrm{I}}$) - ($\widetilde{\mathrm{III}}$) следует, что $m_{n-1}(T_0) > 0$ и $m_n(T_0) = 0$, где m_n n-мерная мера Лебега.

Теорема 2.1. *Пусть гауссовское сепарабельное поле, определенное компактным множеством $T \subset \mathbb{R}^n$, удовлетворяет условиям ($\tilde{\mathrm{I}}$) - ($\widetilde{\mathrm{III}}$) и (I) - (IV) из [1]. Тогда, если $\beta > \max_{1 \le i \le k} \alpha_i$, то для любой функции $\delta(u)$ такой, что при $u \to \infty$*

$$\delta(u) \downarrow 0, \quad u\delta^\beta(u) \to 0, \quad u^2(\ln u)^{-1}\delta^\beta(u) \to \infty, \tag{2.1}$$

верно соотношение

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{t\in T} X(t) > u\right\} = \exp\left[-\frac{u^2}{2\sigma^2}\right]\left(\frac{u}{\sigma}\right)^{-1}\prod_{i=1}^{k}\left(\frac{u}{\sigma}\right)^{2e_i/\alpha_i}(2\pi)^{-1/2}H_\alpha\times$$

$$\times\int_{T_\delta}\exp\left[-\frac{u^2}{\sigma^3}|G(t)|^\beta\right]|\det D(t,t)|\,dt(1+o(1)),\quad u\to\infty,$$

где $T_\delta = \{t\in T:\ |G(t)|\le\delta(u)\}$, *а постоянная* H_α *определена в [1].*

Доказательство Теоремы 2.1 можно вывести из доказательства Теоремы 1.1 в [1].

Обратимся теперь к статистическим задачам. Пусть $X_1, X_2, ..., X_N$, $X_i = (X_{i1}, ..., X_{in})$, $i = 1, ..., N$ - выборка n-мерной случайной величины X с непрерывной функцией распределения $F(x)$, $x = (x_1, ..., x_n)$. Проверяется гипотеза о независимости координат вектора X, т. е. гипотеза

$$H_0:\qquad F(x)=\prod_{i=1}^{n}F^i(x_i),$$

где F^i - непрерывные одномерные ф. р. . Проверка гипотезы о независимости рассматривалась, например, в работах [11], [20]. Обозначим через $F_N(x)$ и $F_N^i(x_i)$ n-мерную и одномерные маргинальные эмпирические функции распределения, построенные по выборке. Хорошо известно (см. [20]), что случайное поле

$$\xi_N(x)=\sqrt{N}\left|F_N(x)-\prod_{i=1}^{n}F_N^i(x_i)\right|$$

после замены $t_i = F^i(x_i)$, $i = 1, ..., n$ слабо сходится (при $N\to\infty$) в метрике $D[0,1]$ к гауссовскому полю $W_0(t)$ со средним нуль и ковариационной функцией

$$\mathbf{E}W_0(t)W_0(s)=\prod_{i=1}^{n}\min(t_i,s_i)-\sum_{i=1}^{n}\min(t_i,s_i)\prod_{j\ne i}t_js_j+(n-1)\prod_{i=1}^{n}t_is_i. \qquad (2.2)$$

(Здесь $t = (t_1, ..., t_n)$, $s = (s_1, ..., s_n)$).

Удобная для проверки гипотезы H_0 статистика Колмогорова–Смирнова $D_N = \sup\{|\xi_N(x)|:\ x\in\mathbb{R}^n\}$ имеет, таким образом, предельное распределение (при $N\to\infty$), совпадающее с распределением $\sup\{|W_0(t)|:\ t\in[0,1]^n\}$.

Теорема 2.2. *Дисперсия $\sigma_0^2(t)$ гауссовского поля $W_0(t)$ достигает своего максимума σ^2 на $[0,1]^n$ в точках $b^1,\dots,b^l$, $b^k=(b_k,\dots,b_k)\in\mathbb{R}^n$, $k=1,\dots,l\le n$, где $b_k\in(0,1)$ - действительные корни уравнения*

$$(2n-2)y^n-(2n-1)y^{n-1}+1=0.$$

При $u\to\infty$ имеет место соотношение

$$\lim_{N\to\infty}\mathbf{P}(D_N>u)=\mathbf{P}\left\{\sup_{[0,1]^n}|W_0(t)|>u\right\}=2\mathbf{P}\left\{\sup_{[0,1]^n}W_0(t)>u\right\}(1+o(1))=$$

$$=\exp\left[-\frac{u^2}{2\sigma^2}\right]u^{n-1}\sqrt{2}\sigma^{1-2n}\pi^{(n-1)/2}\sum_{k=1}^{l}b_k^{n(n-1)}(1-b_k^{n-1})^n|\det\Lambda_k|^{-1/2}(1+o(1)),\tag{2.3}$$

где $\Lambda_k=(\lambda_{ij}^k)_{i,j=\overline{1,n}}$, $\lambda_{ij}^k=-\dfrac{\partial^2}{\partial t_i\partial t_j}\sigma_0^2(b_k)$, $k=1,\dots,l$ - невырожденные матрицы.

Следствие 2.1. a) При $n=2$ дисперсия $\sigma_0^2(t)$ поля $W_0(t)$ имеет одну точку максимума $(1/2,1/2)$ и справедливо асимптотическое соотношение

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{[0,1]^2}|W_0(t)|>u\right\}=8\sqrt{2\pi}u\exp[-8u^2](1+o(1)),\quad u\to\infty.$$

b) При $n=3$ дисперсия $\sigma_0^2(t)$ имеет на $[0,1]^3$ одну точку максимума $b^1=$ $=(b_1,b_1,b_1)$, $b_1\approx0.6404$ и справедливо асимптотическое соотношение

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{[0,1]^3}|W_0(t)|>u\right\}=183.9u^2\exp[-6.455u^2](1+o(1)),\quad u\to\infty.$$

Доказательство Теоремы 2.2 можно получить, применяя Теорему 1.2 (iii) из [1] с $p=n$. Мы выпишем необходимые разложения. Критические точки $t=(t_1,\dots,t_n)$ функции $\sigma_0^2(t)$, $t\in[0,1]^n$ удовлетворяют системе уравнений $\{\dfrac{\partial}{\partial t_i}\sigma_0^2(t)=0,\ i=1,\dots,n\}$. Решение этой системы - множество точек

$$Q=\{t\in[0,1]^n:\quad t_1=\dots=t_n=y,\quad(2n-2)y^n-(2n-1)y^{n-1}+1=0\}.$$

Пусть $b^1=(b_1,\dots,b_1)\in Q$ - точка максимума функции $\sigma_0^2(t)$. Применяя формулу Тейлора, получим

$$\sigma_0(t)=\sigma-(4\sigma)^{-1}(t-b^1)\Lambda_1(t-b^1)^T+o(|t-b^1|^2),\quad t\to b^1.$$

Используя формулу (2.2) несложно показать, что для корреляционной функции $r_0(t,s)$ поля $W_0(t)$ имеет место разложение

$$r_0(t,s) = 1 - \frac{1}{2}\sigma^{-2}(b_1)^{n-1}(1-(b_1)^{n-1})\sum_{i=1}^{n}|t_i - s_i| + o(|t-s|_1), \quad t,s \to b^1.$$

При некоторых $C > 0, \varepsilon > 0$ верно также неравенство

$$\mathbf{E}(W_0(t) - W_0(s))^2 \le C|t-s|_1, \quad |t-s| < \varepsilon.$$

Рассмотрим теперь поле $W^1(t) = W_0(Bt)$, заданное на компактном множестве $B^{-1}(V_1)$, где V_1 - компактная окрестность b^1 (см. Замечание 1.1 из [1]), а B - невырожденная матрица такая, что $B\Lambda_1 B = I$. Применим теперь Теорему 1.2 (iii) из [1] с $p = n$ к полю $W^1(t)$. В обозначениях Теоремы 1.2 из [1] имеем

$$f_1 = \cdots = f_n = 1, \quad \beta_1 = \cdots = \beta_n = 2, \quad e_1 = \cdots = e_n = 1, \quad \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 1.$$

Для матриц A и D имеем (ср. (1.8) и (1.9)) :

$$A = (2\sqrt{\sigma})^{-1}I, \qquad D = \frac{1}{2}\sigma^{-2}(b_1)^{n-1}(1-(b_1)^{n-1})I.$$

Соответствующие постоянные можно вычислить по формуле (2.3).

Утверждение a) Следствия 2.1 вытекает из Теоремы 2.3, приведенной ниже, так как при $n = 2$ соотношение (2.2) принимает вид

$$\mathbf{E}W_0(t)W_0(s) = \prod_{i=1}^{2}[\min(t_i, s_i) - t_i s_i].$$

Утверждение b) легко вывести из (2.3), так как при $n = 3$ уравнение для точек максимума дисперсии $\sigma_0^2(t)$ принимает вид $4y^2 - y - 1 = 0$ и имеет единственный корень $b_1 \in (0,1)$, $b_1 = (1+\sqrt{17})/8 \approx 0.6404$.

Отметим, что при произвольном n нужно будет решать уравнение

$$(2n-2)y^{n-1} - (y^{n-2} + y^{n-3} + \cdots + y + 1) = 0.$$

Численные расчеты по формуле (2.3) могут быть приведены и для $n > 3$.

В некоторых задачах статистики (например, при проверке той же гипотезы о независимости, см. [11, стр. 47], [20, стр. 45], [21, стр. 23]) возникает гауссовское случайное поле $W_1(t)$, $t = (t_1, ..., t_n) \in [0,1]^n$ со средним нуль и ковариационной функцией

$$\mathbf{E}W_1(t)W_1(s) = \prod_{i=1}^{n}[\min(t_i, s_i) - t_i s_i].$$

Поле $W_1(t)$ является одним из многомерных аналогов броуновского моста, так как распределение W_1 совпадает с условным распределением поля $\{W(t)/W(s) = 0, s \in J\}$, где

$$J = \left\{s = (s_1, ..., s_n) \in [0,1]^n : \text{ существует } i,\ 1 \le i \le n \text{ такое, что } s_i = 1\right\},$$

а $W(t)$, $t \in [0,1]^n$ - винеровское поле, введенное Н. Н. Ченцовым [22] (см также Дж. Йех [23]). Заметим, что $W(t)$ - гауссовское поле с непрерывными траекториями, нулевым средним и ковариационной функцией $\mathbf{E}W(t)W(s) = \prod_{i=1}^{n} \min(t_i, s_i)$, называемой многопараметрическим броуновским движением.

Теорема 2.3. *Для поля $W_1(t)$ справедливо следующее асимптотическое разложение :*

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{[0,1]^n} |W_1(t)| > u\right\} = 2\mathbf{P}\left\{\sup_{[0,1]^n} W_1(t) > u\right\}(1 + o(1)) =$$

$$= \exp(-2^{2n-1}u^2)u^{n-1}\pi^{(n-1)/2}(\sqrt{2})^{2n^2-n+1}(1 + o(1)), \quad u \to \infty. \tag{2.4}$$

Доказательство вновь основано на Теореме 1.2(i) из [1] с $p = n$. Дисперсия $\sigma_1^2(t) = \prod_{i=1}^{n} t_i(1 - t_i)$ поля $W_1(t)$ достигает своего максимума $\sigma_1^2 = 2^{-2n}$ на $[0,1]^n$ в единственной точке $\frac{1}{2}\mathbf{1} = (\frac{1}{2}, ..., \frac{1}{2})$. Справедливы следующие разложения : для дисперсии

$$\sigma_1(t) = 2^{-n} - 2^{1-n}\sum_{i=1}^{n}(t_i - \frac{1}{2})^2 + o\left(|t - \frac{1}{2}\mathbf{1}|^2\right), \quad t \to \frac{1}{2}\mathbf{1}$$

и для корреляционной функции $r_1(t, s)$ поля $W_1(t)$

$$r_1(t, s) = 1 - 2\sum_{i=1}^{n}|t_i - s_i| + o(|t - s|_1), \qquad t, s \to \frac{1}{2}\mathbf{1}.$$

Имеет место также неравенство

$$\mathbf{E}(W_1(t) - W_1(s))^2 \le \sum_{i=1}^{n}|t_i - s_i|, \quad t, s \in [0,1]^n.$$

Как видим, здесь $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 1$, $\beta_1 = \cdots = \beta_n = 2$, $A = (\sqrt{2})^{-n-1}I$, $D = 2I$. Применяя Теорему 1.2(i) из [1], получаем (2.4).

Другой способ проверки гипотезы о независимости H_0. В работе [24] (см. также [21, стр.22]) доказано, что при гипотезе H_0 предельное (при $N \to \infty$) распределение статистики

$$K_N = \sqrt{N} \sup \left\{ |F_N(x) - F(x)|, \quad x \in \mathbb{R}^n \right\}$$

совпадает с распределением случайной величины $\sup\{|W_2(t)|,\ t \in [0,1]^n\}$. Здесь $W_2(t)$ – другое распространенное в статистике гауссовское поле с нулевым средним и ковариационной функцией

$$\mathbf{E} W_2(t) W_2(s) = \prod_{i=1}^{n} \min(t_i, s_i) - \prod_{i=1}^{n} t_i s_i .$$

Это так называемый броуновский (винеровский) лист или многопараметрический броуновский мост. Это поле может быть рассмотрено как условное винеровское поле вида $W_2(t) = \{W(t)/W(\mathbf{1}) = 0\}$. Это гауссовское поле интересно тем, что его дисперсия достигает своего максимума на $(n-1)$-мерном множестве.

Теорема 2.4. *Имеет место соотношение*

$$\lim_{N\to\infty} \mathbf{P}(K_N > u) = \mathbf{P}\left\{ \sup_{[0,1]^n} |W_2(t)| > u \right\} = 2\mathbf{P}\left\{ \sup_{[0,1]^n} W_2(t) > u \right\} (1 + o(1)) =$$

$$= \exp(-2u^2) u^{2n-2} 2 (4 \ln 2)^{n-1} (1 + o(1)), \quad u \to \infty. \tag{2.5}$$

Доказательство основано на Теореме 2.1. Дисперсия

$$\sigma_2^2(t) = \mathrm{Var} W_2(t) = \prod_{i=1}^{n} t_i - \prod_{i=1}^{n} t_i^2$$

достигает своего максимума $\sigma_2^2 = 1/4$ на $(n-1)$-мерном многообразии $T_0 = \{t \in \in [0,1]^n : \prod_{i=1}^{n} t_i = 1/2\}$. В окрестности этого множества справедливы разложения

$$\sigma_2(t) = \frac{1}{2} - \left(\prod_{i=1}^{n} t_i - \frac{1}{2} \right)^2 + o\left(\left(\prod_{i=1}^{n} t_i - \frac{1}{2} \right)^2 \right), \quad \prod_{i=1}^{n} t_i \to \frac{1}{2}$$

для корреляционной функции $r_2(t,s)$ поля W_2

$$r_2(t,s) = 1 - \sum_{i=1}^{n} (t_i s_i)^{-1/2} |t_i - s_i| + o(|t-s|_1), \quad t - s \to 0.$$

Имеет место неравенство

$$\mathbf{E}(W_2(t) - W_2(s))^2 \leq \sum_{i=1}^{n} |t_i - s_i|, \quad t, s \in [0,1]^n.$$

Условия Теоремы 2.1 выполнены для поля W_2 с

$$\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 1, \quad \beta = 2, \quad D(t,s) = \operatorname{diag}((t_1 s_1)^{-1/2}, \ldots, (t_n s_n)^{-1/2}),$$

$$G(t) = \prod_{i=1}^{n} t_i - \frac{1}{2}.$$

Для функции $\delta(u)$, удовлетворяющей (2.1) с $\beta = 2$, асимптотика интеграла из формулировки Теоремы 2.1 легко вычисляется и равна $(\ln 2)^{n-1}\sqrt{\pi/2}u^{-1}$. Применение Теоремы 2.1 завершает доказательство.

Приведем таблицу квантилей статистик D_N и K_N $(n = 2)$, вычисленных по асимптотикам (2.4) и (2.5) и методом статистического моделирования (см. [25, стр. 30]) ; $\mathbf{P}(D_N > u_\gamma) = \gamma$, $\mathbf{P}(K_N > v_\gamma) = \gamma$.

Статистики	Квантили \ γ	0.30	0.25	0.20	0.15	0.10	0.05	0.025
D_N	моделир. u_γ	0.75	0.76	0.78	0.80	0.85	0.90	1.02
D_N	асимпт. u_γ	0.69	0.71	0.73	0.76	0.80	0.85	0.91
K_N	моделирv_γ	1.34	1.39	1.45	1.52	1.60	1.72	1.79
K_N	асимпт.v_γ	1.31	1.36	1.42	1.48	1.56	1.68	1.81

Таким образом, асимптотики являются достаточно хорошим приближением, начиная с уровня $\gamma = 0.2$.

Наконец, приведем последний результат этого раздела, касающийся многопараметрического броуновского движения $W(t)$, который был установлен В. И. Питербаргом.

Теорема 2.5. *Для гауссовского поля*

$$W(t), \quad t \in [0,1]^n, \quad \mathbf{E}W(t) = 0, \quad \mathbf{E}W(t)W(s) = \prod_{i=1}^{n} \min(t_i, s_i)$$

имеет место соотношение

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{[0,1]^n} |W(t)| > u\right\} = 2\mathbf{P}\left\{\sup_{[0,1]^n} W(t) > u\right\}(1 + o(1)) =$$

$$= \exp(-u^2/2)u^{-1}2^{n+1}(2\pi)^{-1/2}(1+o(1)), \quad u \to \infty. \tag{2.6}$$

Доказательство. Дисперсия $\sigma^2(t) = \prod_{i=1}^{n} t_i$ поля $W(t)$ достигает на $[0,1]^n$ своего максимума, равного 1 в единственной точке $\mathbf{1}$, которая является граничной точкой единичного куба $[0,1]^n$. В окрестности этой точки имеет место разложение

$$\sigma(t) = 1 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(1-t_i) + o(|\mathbf{1} - t|_1), \quad t \to \mathbf{1}.$$

Для корреляционной функции $r(t,s)$ поля W выполнено условие

$$r(t,s) = 1 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}|t_i - s_i| + o(|t-s|_1), \quad t,s \to \mathbf{1}.$$

Справедливо неравенство

$$\mathbf{E}(W(t) - W(s))^2 \leq \sum_{i=1}^{n}|t_i - s_i|, \qquad t,s \in [0,1]^n.$$

Следовательно, для поля $W(t)$ имеем $\alpha_1 = \beta_1 = 1, \ldots, \alpha_n = \beta_n = 1$ (см. условия (I), (II) из [1]). Граничный характер точки максимума $\mathbf{1}$ требует слегка изменить рассуждения, связанные с появлением константы H_α^b (см доказательство Теоремы 1.2 (ii) из [1]). Асимптотика будет зависеть теперь от новой константы $\widetilde{H}_\mathbf{1}^\mathbf{1} = \lim_{S\to\infty} H_\mathbf{1}^\mathbf{1}((0,\mathbf{S}); I)$, $\mathbf{S} = (S, \ldots S)$:

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{[0,1]^n} W(t) > u\right\} = \exp(-u^2/2)u^{-1}\widetilde{H}_\mathbf{1}^\mathbf{1}(2\pi)^{-1/2}(1+o(1)), \quad u \to \infty.$$

Используя тождество (2.4) из [1] и известную формулу распределения максимума винеровского процесса ($n = 1$), получаем $\widetilde{H}_\mathbf{1}^\mathbf{1} = 2^n$. Теорема доказана.

При $n = 2$ соотношение (2.6) было получено в [26] посредством рассмотрения броуновского движения со значениями в банаховом пространстве. Теоремы 2.3 2.5 впервые доказаны в [27] в результате непосредственного асимптотического анализа. Теорема 2.2 и Следствие 2.1(b) новые.

§3. АСИМПТОТИКИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ВЫСОКИХ ВЫБРОСОВ

Теорема 3.1. *Пусть $X_1(t), \ldots, X_k(t)$, $t \in [0,T]$ - гауссовские сепарабельные, дифференцируемые в среднем квадратичные, независимые одинаково распределенные случайные процессы. Пусть дисперсия $\sigma^2(t)$ процесса $X_1(t)$ достигает своего максимума σ^2 в конечном числе точек $b_1, \ldots, b_l$, $b_i \in (0,T)$, причем*

$$\frac{d^2}{dt^2}\sigma(b_i) = \sigma''(b_i) < 0, \quad \mathbf{E}(X_1'(b_i))^2 > 0, \quad i = 1, \ldots, l,$$

где X_1' обозначает производную в ср. кв. процесса $X_1(t)$. Тогда для процесса

$$Z_{p,a}(t) \equiv Z(t) = \left(\sum_{i=1}^k |a_i X_i(t)|^p\right)^{1/p}, \quad a_i > 0, \quad i = 1, \ldots, k$$

имеют место соотношения при ($u \to \infty$) :

(i) Если $p > 2$ и $a_1 = \cdots = a_m > a_{m+1} \geq a_{m+2} \geq \cdots \geq a_k$, $k \geq m \geq 1$, то

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{t\in[0,T]} Z(t) > u\right\} = \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma^2 a_1^2}\right) u^{-1} \frac{2m\sigma a_1}{\sqrt{2\pi}} \times$$
$$\times \sum_{i=1}^l \left[1 - \frac{\mathbf{E}(X_1'(b_i))^2}{\sigma\sigma''(b_i)}\right]^{1/2} (1 + o(1));$$

(ii) Если $2 > p > 1$, то

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{t\in[0,T]} Z(t) > u\right\} = \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma^2 d^2}\right) u^{-1} \frac{\sigma d}{\sqrt{2\pi}} 2^k (2-p)^{(1-k)/2} \times$$
$$\times \sum_{i=1}^l \left[1 - \frac{\mathbf{E}(X_1'(b_i))^2}{\sigma\sigma''(b_i)}\right]^{1/2} (1 + o(1)),$$

где $d = \left[\sum_{i=1}^k a_i^{2p/(2-p)}\right]^{(2-p)/2p}$

Случай $p = 2$ исследован в работе [28].

Изучение вероятностей больших уклонений процесса $Z(t)$ будем проводить основываясь на следующем приеме. Рассмотрим обычную норму

$$||x||_p = \left(\sum_{i=1}^k |x_i|^p\right)^{1/p} \qquad p > 1$$

в пространстве $l_k^p = \{x = (x_1, \ldots, x_k) : ||x||_p < \infty\}$. Из общего вида непрерывного линейного функционала на пространстве l_k^p получим

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{[0,T]} Z(t) > u\right\} = \mathbf{P}\left\{\sup_{[0,T]\times S} Y(t,x) > u\right\},$$

где $Y(t,x) = \sum\limits_{i=1}^{k} x_i a_i X_i(t)$ – гауссовское поле, заданное на цилиндре $[0,T] \times S$, $S = \{x \in \mathbb{R}^k : \|x\|_q = 1\}$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Наша цель – преобразовать поле $Y(t,x)$ и к преобразованному полю применить Теорему 1.2 из [1]. Для простоты изложения будем считать $l = 1$, $b_1 = b$ (версия Замечания 1.1 из [1] справедлива и в условиях Теоремы 3.1 из [1]).

Лемма 3.1. *Дисперсия* $\sigma^2(t,x) = \sigma^2(t) \sum\limits_{i=1}^{k} a_i^2 x_i^2$ *поля* $Y(t,x)$ *достигает своего максимума* $\sigma^2 d^2$ *на множестве* $[0,T] \times S$ *:*

(i) при $p > 2$ *в* $2m$ *точках* (b, y_+^i), (b, y_-^i), $i = 1, \ldots, m$, *где* $y_+^i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ *(единица на i-том месте),* $y_-^i = (0, \ldots, 0, -1, 0, \ldots, 0)$ *(-1 на i-том месте),* $d = a_1$ *;*

(ii) при $2 > p > 1$ *в* 2^k *точках* (b, z), *где*

$$z = (z_1, \ldots, z_k), \quad z_i = \pm(a_i/d)^{2/(q-2)}, \quad d = \left[\sum_{i=1}^{k} a_i^{2p/(2-p)}\right]^{(2-p)/2p}$$

(берутся все возможные 2^k *комбинации знаков "+" и "-").*

Доказательство леммы легко проводится с помощью метода множителей Лагранжа аналогично Лемме 1 из [29].

Обозначим через $R(t,s)$ ковариационную функцию процесса $X_1(t)$. Тогда ковариационная функция процесса $Y(t,x)$ будет иметь вид $R(t,s) \sum\limits_{i=1}^{k} a_i^2 x_i v_i$. По формуле Лагранжа имеем

$$R(t,s) - \sigma(t)\sigma(s) = (t-s)^2[(\sigma'(\xi_1))^2 - \mathbf{E}(X_1'(\xi_2))^2]$$

для некоторых точек ξ_1, ξ_2, лежащих между t и s. Отсюда несложно вывести следующее неравенство :

$$\mathbf{E}(Y(t,x) - Y(s,v))^2 \le C\left[(t-s)^2 + \sum_{i=1}^{k}(x_i - v_i)^2\right] \tag{3.1}$$

для некоторого $C > 0$. Далее, имеем

$$\sigma(t) = \sigma + \frac{1}{2}\sigma''(b)(t-b)^2 + o((t-b)^2), \quad t \to b. \tag{3.2}$$

Пусть

$$T_\delta = \{t \in [0,T] : \sigma^2 - \sigma^2(t) \le \delta\}, \quad S_\delta = \{x \in S : d^2 - \sum_{i=1}^{k} a_i^2 x_i^2 \le \delta\}, \quad \delta > 0$$

и $h_\delta = T_\delta \times S_\delta$ – объединение непересекающихся (при достаточно малом δ) компактных окрестностей $h_\delta(b, z^i)$ точек максимума (b, z^i), $i = 1, \dots, N$ дисперсии $\sigma^2(t, x)$.

Лемма 3.2. *Имеет место соотношение*

$$\lim_{u\to\infty} \mathbf{P}\left\{\sup_{[0,T]\times S} Y(t,x) > u\right\} / \mathbf{P}\left\{\sup_{h_\delta} Y(t,x) > u\right\} = 1.$$

Доказательство леммы проводится аналогично доказательству Леммы 3.1 из [1].

Принимая во внимание Лемму 3.2, применяя неравенство Бонферрони и оценивая двойную сумму в нем с помощью Леммы 2.1 из [1], получим

$$\lim_{u\to\infty} \mathbf{P}\left\{\sup_{[0,T]\times S} Y(t,x) > u\right\} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{P}\left\{\sup_{h_\delta(b,z^i)} Y(t,x) > u\right\}(1 + o(1)). \qquad (3.3)$$

Перейдем к доказательству Теоремы 3.1 и начнем с утверждения (ii). Перейдем к нахождению асимптотики правой части формулы (3.3).

Доказательство Теоремы 3.1(ii). Итак, $1 < p < 2$ и $N = 2^k$. Достаточно ограничиться нахождением асимптотики одного слагаемого в сумме (3.3), например, для точки (b, z), $z = (z_1, \dots, z_k)$, $z_i = (d/a_i)^{2/(2-q)}$, $h_\delta(b, z) = T_\delta \times U_\delta$. В окрестности $U_\delta \subset S_\delta$ точки z имеем

$$x_k = \left(1 - \sum_{i=1}^{k-1} x_i^q\right)^{1/q}$$

следовательно поле Y можно локально представить как

$$Y_1(t, \tilde{x}) = \sum_{i=1}^{k-1} x_i a_i X_i(t) + \left(1 - \sum_{i=1}^{k-1} x_i^q\right)^{1/q} a_k X_k(t), \quad \tilde{x} = (x_1, \dots, x_{k-1}),$$

которое определено в окрестности $T_\delta \times \widetilde{U}_\delta$ точки $(b, \tilde{z})$, $\tilde{z} = (z_1, \dots, z_{k-1})$ в k-мерном пространстве точек $(t, \tilde{x})$, где

$$\widetilde{U}_\delta = \left\{\tilde{x} : \quad (x_1, \dots, x_{k-1}, \left(1 - \sum_{i=1}^{k-1} x_i^q\right)^{1/q}) \in U_\delta\right\}$$

– малая окрестность точки $\tilde{z}$. Применим Теорему 1.2 (ii) из [1] к полю $Y_1(t, \tilde{x})$, $(t, \tilde{x}) \in T_\delta \times \widetilde{U}_\delta$. Дисперсия

$$\sigma_1^2(t, \tilde{x}) = \sigma^2(t)\left[\sum_{i=1}^{k-1} a_i^2 x_i^2 + a_k^2 \left(1 - \sum_{i=1}^{k-1} x_i^q\right)^{2/q}\right]$$

поля $Y_1(t,\tilde{x})$ достигает максимума $\sigma^2 d^2$ в точке $(b,\tilde{z})$, которая является внутренней точкой множества $T_\delta \times \tilde{U}_\delta$. Принимая во внимание (3.2), в окрестности точки $(b,\tilde{z})$ имеем разложение Тейлора функции $\sigma_1(t,\tilde{x})$

$$\sigma_1(t,\tilde{x}) = \sigma d + \frac{d}{2}\sigma''(b)(t-b)^2 - \frac{\sigma(q-2)}{2d}(\tilde{x}-\tilde{z})\Lambda(\tilde{x}-\tilde{z})^T + \\ + o((t-b)^2 + |\tilde{x}-\tilde{z}|^2), \quad t \to b, \quad \tilde{x} \to \tilde{z}, \tag{3.4}$$

где $\Lambda = (\lambda_{ij})_{i,j=\overline{1,k-1}}$ – неотрицательно определенная матрица с элементами

$$\lambda_{ij} = -(2(q-2))^{-1}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\left[\sum_{i=1}^{k-1} a_i^2 x_i^2 + a_k^2\left(1-\sum_{i=1}^{k-1} x_i^q\right)^{2/q}\right]\Bigg|_{\tilde{x}=\tilde{z}},$$
$$i,j = 1,\dots,k-1.$$

Для корреляционной функции поля $Y_1(t,\tilde{x})$ имеем разложение $r_1(t,\tilde{x};s,\tilde{v})$

$$r_1(t,\tilde{x};s,\tilde{v}) = 1 - (2\sigma^2)^{-1}\mathbf{E}(X_1'(b))^2(t-s)^2 - (2d)^{-1}(\tilde{x}-\tilde{v})\Lambda(\tilde{x}-\tilde{v})^T + \\ + o((t-s)^2 + |\tilde{x}-\tilde{v}|^2), \quad t,s \to b, \quad \tilde{x},\tilde{v} \to \tilde{z}. \tag{3.5}$$

Существует такая невырожденная матрица Q, что $Q\Lambda Q^T$ – диагональная матрица. Поле $Y_2(t,\tilde{x}) = Y_1(t,Q\tilde{x})$, заданное на множестве $T_\delta \times Q^{-1}(\tilde{U}_\delta)$, удовлетворяет условиям Теоремы 1.2 (ii) из работы [1] с $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 2$, $\beta_1 = \dots = \beta_k = 2$, $\gamma = 2$ (см. условия (I) – (III) из [1]). Применяя эту теорему и учитывая (3.4) и (3.5), получаем

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{T_\delta \times \tilde{U}_\delta} Y_1(t,\tilde{x}) > u\right\} = \exp\left[-\frac{u^2}{2\sigma^2 d^2}\right]u^{-1}\frac{\sigma d}{\sqrt{2\pi}} H_{\mathbf{2}}^{\frac{1}{2}\mathbf{1}}(C)(1+o(1)), \quad u \to \infty,$$

где

$$C = \begin{pmatrix} \left[-\frac{\mathbf{E}(X_1'(b))^2}{\sigma^2 d\sigma''(b)}\right]^{1/2} & 0 \\ 0 & (\sigma d(q-2))^{-1/2} I \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{2} = (2,\dots,2) \in \mathbb{R}^k, \quad \mathbf{1} = (1,\dots,1) \in \mathbb{R}^k.$$

В силу неравенства (2.4) из [1] и тождества $H_2^1(\mu) = \sqrt{1+\mu^2}$, $\mu \in \mathbb{R}^1$ (см. Лемму 3 из [28]), имеем

$$H_{\mathbf{2}}^{\frac{1}{2}\mathbf{1}}(C) = [1 - (\sigma\sigma''(b))^{-1}\mathbf{E}(X_1'(b))^2]^{1/2}\left(\frac{q-1}{q-2}\right)^{(k-1)/2}.$$

Из последних двух соотношений и (3.3) получаем требуемое утверждение.

Доказательство Теоремы 3.1(i). Соотношение (3.3) верно и при $p > 2$. Найдем асимптотику одного слагаемого из (3.3), а именно, для точки максимума (b, y_+^1), $y_+^1 = (1, 0, ..., 0)$ дисперсии $\sigma^2(t, x)$. Поле $Y(t, x)$ вновь локально представимо как поле

$$Y_1(t, \widetilde{x}) = \sum_{i=2}^{k} x_i a_i X_i(t) + \left(1 - \sum_{i=2}^{k} |x_i|^q\right)^{1/q} a_1 X_1(t), \quad \widetilde{x} = (x_2, ..., x_k),$$

заданное в окрестности $T_\delta \times \widetilde{U}_\delta$ точки $(b, \widetilde{0})$, $\widetilde{0} = (0, ..., 0) \in \mathbb{R}^k$. Теперь уже дисперсия $\sigma_1^2(t, \widetilde{x})$ поля $Y_1(t, \widetilde{x})$ удовлетворяет соотношению

$$\sigma_1(t, \widetilde{x}) = \sigma a_1 + \frac{a_1}{2}\sigma''(b)(t-b)^2 - \frac{\sigma a_1}{q}\sum_{i=2}^{k}|x_i|^q + o\left((t-b)^2 + \sum_{i=2}^{k}|x_i|^q\right)$$

при $t \to b$, $\widetilde{x} \to \widetilde{0}$ и показатели равны : $\beta_1 = 2$, $\beta_2 = \cdots = \beta_k = q < 2$. Разложение корреляционной функции $r_1(t, \widetilde{x}; s, \widetilde{v})$ поля $Y_1(t, \widetilde{x})$ при $t, s \to b$, $\widetilde{x}, \widetilde{v} \to \widetilde{0}$ имеет вид

$$r_1(t, \widetilde{x}; s, \widetilde{v}) = 1 - (2\sigma^2)^{-1}\mathbf{E}(X_1'(b))^2(t-s)^2 -$$
$$- (2a_1^4)^{-1}\sum_{i=2}^{k} a_i^2(x_i - v_i)^2 + o((t-s)^2 + |\widetilde{x} - \widetilde{v}|^2),$$

откуда заключаем, что $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 2$. Поэтому, можем применить Теорему 1.2 (iv) из [1]. Теорема доказана.

Заметим, что подход к доказательству Теоремы 3.1 применим и в некоторых иных аналогичных ситуациях, например, когда процессы $X_i(t)$, $i = 1, ..., k$ стационарны, или когда их дисперсии достигают своего максимума на множествах ненулевой лебеговой меры.

§4. АСИМПТОТИКА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ l_k^p-НОРМЫ ГАУССОВСКОГО КОНЕЧНОМЕРНОГО ВЕКТОРА

Теорема 4.1. *Пусть $(X_1, ..., X_k)$ – гауссовский вектор со средним нуль и невырожденной ковариационной матрицей $B = (b_{ij})_{i,j=\overline{1,k}}$. Пусть $z^1, ..., z^m$ – точки из множества*

$$S = \left\{t = (t_1, ..., t_k) \in \mathbb{R}^k : \quad \sum_{i=1}^{k}|t_i|^q = 1\right\}, \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

в которых достигается $\max\{<Bt,t>:\ t\in S\}=\sigma^2>0$, $z^i=(z_{i1},...,z_{ik})$, $<\cdot,\cdot>$ *– обычное скалярное произведение в* $\mathbb{R}^k$. *Тогда*

(i) Если $p>2$, *то имеет место асимптотическое соотношение*

$$\mathbf{P}\left\{\left(\sum_{i=1}^{k}|X_i|^p\right)^{1/p}>u\right\}=\exp\left[-\frac{u^2}{2\sigma^2}\right]\frac{\sigma}{u\sqrt{2\pi}}\sqrt{|p-2|}\sum_{i=1}^{m}|\det C_i|^{-1/2}(1+O(u^{-2})),$$
$$u\to\infty, \tag{4.1}$$

где $C_i=I-((q-1)\sigma^2)^{-1}B\ diag(|z_{i1}|^{2-q},...,|z_{ik}|^{2-q})$.

(ii) Если $1<p<2$, *то все компоненты* z_{ij} *векторов* z^i *ненулевые и справедлива формула (4.1).*

Доказательство теоремы основано на Теореме 1.2(ii) из [1] и проводится аналогично доказательству Теоремы 3.1. Укажем на основные моменты. Имеет место равенство

$$\mathbf{P}\left\{\left(\sum_{i=1}^{k}|X_i|^p\right)^{1/p}>u\right\}=\mathbf{P}\left\{\sup_{t\in S}Y(t)>u\right\},$$

где $Y(t)=\sum_{i=1}^{k}t_iX_i$ – гауссовское поле, заданное на множестве S, со средним нуль.

Лемма 4.1. *Пусть дисперсия* $\sigma^2(t)=\sum b_{ij}t_it_j$ *поля* $Y(t)$ *достигает своего максимума* σ^2 *на* S *в точке* $z=(z_1,...,z_k)$. *Тогда координаты вектора* z *удовлетворяют условию*

$$\sum_{j=1}^{k}b_{ij}z_j=\sigma^2|z_i|^{q-1}\operatorname{sign}z_i,\quad i=1,...,k;\quad \sum_{i=1}^{k}|z_i|^q=1, \tag{4.2}$$

и матрица $-C=((q-1)\sigma^2)^{-1}B\ diag(|z_1|^{2-q},...,|z_k|^{2-q})-I$ *отрицательно определена.*

Доказательство проводится методом множителей Лагранжа.

Далее можно показать, что для поля $Y(t)$ верно неравенство типа (3.3), поэтому достаточно найти асимптотику вероятности $\mathbf{P}\{\sup_V Y(t)>u\}$, где $V\subset$ $\subset S$ – малая компактная окрестность точки максимума $z=(z_1,...,z_k)$. Для простоты, полагая, что $z_k>0$ и $t_k>0$, при $t=(t_1,...,t_k)\in V$, имеем локальное представление поля $Y(t)$:

$$Y_1(\tilde{t})\doteq\sum_{i=1}^{k-1}t_iX_i+X_k\left(1-\sum_{i=1}^{k-1}|t_i|^q\right)^{1/q}$$

где $\widetilde{t} = (t_1, ..., t_{k-1})$ принадлежит компактной $(k-1)$-мерной окрестности

$$\widetilde{V} = \left\{ \widetilde{t}: \quad (t_1, ..., t_{k-1}, \left[1 - \sum_{i=1}^{k-1} |t_i|^q\right]^{1/q}) \in V \right\}$$

точки $\widetilde{z} = (z_1, ..., z_{k-1})$. Разложение дисперсии поля $Y_1(\widetilde{t})$ имеет вид

$$\sigma_1(\widetilde{t}) = \sigma - (2\sigma)^{-1}(\widetilde{t} - \widetilde{z})\Lambda(\widetilde{t} - \widetilde{z})^T + o(|\widetilde{t} - \widetilde{z}|^2), \quad \widetilde{t} \to \widetilde{z}, \tag{4.3}$$

где $\Lambda = (\lambda_{ij})_{i,j=\overline{1,k-1}}$ – положительно определенная матрица с элементами

$$\lambda_{ij} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial t_i \partial t_j}\sigma_1^2(\widetilde{t})\Big|_{\widetilde{t}=\widetilde{z}}, \quad i, j = 1, ..., k-1.$$

В силу (4.2) можем записать разложение дисперсии $r_1(\widetilde{t}, \widetilde{s})$ of $Y_1(\widetilde{t})$:

$$r_1(\widetilde{t}, \widetilde{s}) = 1 - (2\sigma^2)^{-1}(\widetilde{t} - \widetilde{s})M(\widetilde{t} - \widetilde{s})^T + o(|\widetilde{t} - \widetilde{s}|^2), \quad \widetilde{t}, \widetilde{s} \to \widetilde{z}, \tag{4.4}$$

где $M = (q-1)\sigma^2 z_k^{-q}\Gamma - \Lambda$ – положительно определенная матрица,

$$\Gamma = (\gamma_{ij})_{i,j=\overline{1,k-1}}, \quad \gamma_{ii} = \gamma_i^2 + |z_i|^{q-2} z_k^q, \quad \gamma_{ij} = \gamma_i\gamma_j, \quad i \neq j, \quad \gamma_i = |z_i|^{q-1} \operatorname{sign} z_i.$$

Известно (см., например, [30, p. 80]), что найдется такая невырожденная матрица Q такая, что $QMQ^T = I$ и $Q\Gamma Q^T = \operatorname{diag}(g_1, ..., g_{k-1})$, где $g_1, ..., g_{k-1}$ – собственные числа матрицы $M^{-1}\Gamma$. Гауссовское поле $Y_2(\widetilde{t}) = Y_1(Q\widetilde{t})$, $\widetilde{t} \in Q^{-1}(\widetilde{V})$ удовлетворяет условиям Теоремы 1.2 (ii) из [1] с $\alpha_i = \beta_i = 2$, $i = 1, ..., k-1$. Применение этой теоремы с учетом (4.3) и (4.4) дает

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{\widetilde{V}} Y_1(\widetilde{t}) > u\right\} = \exp\left[-\frac{u^2}{2\sigma^2}\right]\frac{\sigma}{u\sqrt{2\pi}} H_2^{1/\sigma 1}(DA^{-1})(1 + o(1)),$$

где

$$D = (\sqrt{2}\sigma)^{-1} I,$$

$$A = (2\sigma)^{-1/2} \operatorname{diag}(\sqrt{(q-1)g_1}\sigma z_k^{-q/2} - 1, ..., \sqrt{(q-1)g_{k-1}}\sigma z_k^{-q/2} - 1).$$

Несложные вычисления показывают, что

$$H_2^{1/\sigma 1}(DA^{-1}) = \sqrt{|p-2|}\, |\det C|^{-1/2}.$$

Оценку остаточного члена в (4.1) можно получить на основе метода Лапласа для кратных интегралов (ср. [29]). Теорема доказана.

В заключение отметим, что для диагональной матрицы B Теорема 4.1 была доказана в [29] методом Лапласа, включая случаи $0 < p \leq 1$, $p = 2$. Можно доказать, что асимптотика типа (4.1) справедлива и при $0 < p \leq 1$ (подробности см. в [31], где найдена асимптотика $P_B(u\Delta)$, $u \to \infty$ для гауссовской меры P_B в гильбертовом пространстве H при некоторых ограничениях на множество $\Delta \in H$).

ABSTRACT. The article is devoted to applications of the results of [1] in the following problems : a) the asymptotics of the limiting distributions of Kolmogorov–Smirnov statistic, b) the asymptotics of the limiting distributions of the maxima of Wiener fields, c) the asymptotics of the limiting distributions of maximum of l_k^p–norm of vector-valued Gaussian stochastic process.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Р. Фаталов, "Асимптотики вероятностей больших уклонений гауссовских полей", Изв. АН Армении, Математика, т. 27, №6, стр. 59 – 85, 1992.
2. A. N. Kolmogorov, "Sulla determinazione empirica di una legge di distribuzione", Giorn. dell'Inst. Ital. degli Att., vol. 4, pp. 83 – 91, 1933.
3. Н. В. Смирнов, "Об уклонениях эмпирической кривой распределения", Мат. сборн., т. 6(48), №1, стр. 3 – 24, 1939.
4. H. Cramer, Mathematical Methods of Statistics, 1946.
5. J. Durbin, "Weak convergence of the sample distribution function when parameters are estimated", Ann. Math. Statist., vol. 1, pp. 279 – 290, 1973.
6. Г. А. Несененко, Ю. Н. Тюрин, "Асимптотика статистики Колмогорова для параметрического семейства", ДАН СССР, т. 239, №6, стр. 1292 – 1294, 1978.
7. Ю. Н. Тюрин, "О предельном распределении статистик Колмогорова–Смирнова", Изв. АН СССР, сер. математика, т. 48, №6, стр. 1314 – 1343, 1984.
8. В. Р. Фаталов, "Асимптотики вероятностей больших уклонений гауссовских полей и их применения в теории статистик Колмогорова–Смирнова", Теория вероятн. и ее примен., т. 29, №1, стр. 178 – 180, 1984.
9. M. A. Stephens, "Use of Kolmogorov–Smirnov, Cramer–von Mises and related statistics – without extensive tables", J. R. Stat. Soc., vol. 32, pp. 115 – 122, 1970.
10. Biometrika Tables for Statisticians (Edit. E. S. Pearson, H. O. Hartley), vol. 2, Cambridge Univ. Press, 1972.
11. Г. В. Мартынов, Критерии Омега-Квадрат, М., Наука, 1978.
12. К. О. Джапаридзе, М. С. Никулин, "Распределения вероятностей статистик Колмогорова и омега-квадрат для непрерывных распределений с параметрами сдвига и масштаба", Записки научн. семин. ЛОМИ АН СССР, т. 85, стр. 46 – 74, 1979.
13. J. Durbin, "Kolmogorov–Smirnov tests when parameters are estimated with applications to tests of exponentiality and tests of spacings", Biometrika, vol. 62, no. 1, pp. 5 – 22, 1975.
14. Н. Е. Саввушкина, Ю. Н. Тюрин, "Критерий согласия для распределения Вейбулла–Гнеденко", Изв. АН СССР, сер. Техн. кибернетика, №3, стр. 109-

- 112, 1984.

15. M. Chandra, N. D. Singpurwalla, M. A. Stephens, "Kolmogorov statistics for test of fit for the extreme-value and Weibull distribution", JASA, vol. 76, p. 375, 1981.
16. С. Р. Рао, Линейные Статистические Методы и их Применения, М., Наука, 1968.
17. M. D. Burke, M. Csörgő, S. Csörgő, P. Révész, "Approximations of the empirical process when parameters are estimated", Ann. Probab., vol. 7, pp. 790 - 810, 1979.
18. Э. Н. Кривякова, "О критерии Крамера-фон Мозеса-Смирнова в многомерном случае", в сб. Математическая статистика и ее приложения, вып. 4, Изд. Томского универ., стр. 14 - 28, Томск, 1976.
19. В. Р. Фаталов, "Асимптотика распределения статистики Колмогорова--Смирнова в задаче проверки гипотезы о нормальности двумерной выборки", в сб. Труды Первого Всемирного Конгресса Общества им. Бернулли, т. 2, стр. 269 - 274, МИАН СССР, Москва-Тула, 1988.
20. P. Deheuvels, "Multivariate tests of independence", Lect. Notes Math. vol. 861, pp. 42 - 50, 1981.
21. Ю. Н. Тюрин, "Линейная модель в многомерной непараметрической статистике ", в сб. Многомерный статистический анализ в социально-экономических исследованиях, М., Наука, 1974.
22. Н. Н. Ченцов, "Винеровские случайные поля от нескольких параметров", ДАН СССР, т. 106, №4, стр. 607 - 609, 1956.
23. J. Yeh, "Wiener measure in a space of functions of two variables", Trans. Amer. Math. Soc., vol. 95, pp. 443 - 450, 1960.
24. R. M. Dudley, "Weak convergence of probabilities on nonseparable metric spaces and empirical measure on Euclidean spaces", Illinois J. Math., vol. 10, pp. 109 - - 126, 1966.
25. Практикум по теории вероятностей и математической статистике (Ред. Ю. К. Беляев, В. П. Носко), изд. МГУ, М., 1988.
26. V. Goodman, "Distribution estimates for functionals of the two-parameter Wiener process", Ann. Prob., vol. 4, no. 6, pp. 977 - 983, 1976.
27. В. И. Питербарг, В. Р. Фаталов, " Точные асимптотики для вероятностей больших уклонений некоторых, используемых в статистике гауссовских полей," в сб. Вероятностно-статистические методы исследования, стр. 123 - - 140, изд. МГУ, М., 1983.
28. V. I. Piterbarg, "High excursions for nonstationary generalized chi-square processes", Preprint of Lund Inst. of Technology, 1991.
29. В.-Д. Рихтер, В. Р. Фаталов, " Гауссовские вероятности больших уклонений для фиксированной и возрастающей размерностей", Изв. АН Армении, Математика, т. 27, №1, стр. 3 - 21, 1992.
30. Р. Беллман, Введение в Теорию Матриц, М., Наука, 1976.
31. В. Р. Фаталов, " Точные асимптотики больших уклонений гауссовских мер в гильбертовом пространстве", Изв. АН Армении, Математика, т. 27, №5, стр. 43 - 61, 1992.

2 Октября 1992

Ереванский государственный университет