ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НЕ РАЗРЕШЕННЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО СТАРШЕЙ ПРОИЗВОДНОЙ ПО t

А. А. Андрян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 28, №5, 1993

Пусть $\Pi_\alpha = \{t| \ 0 < \arg t < \alpha < \pi\}$ – угол в комплексной плоскости , а $A(\xi)$, $B(\xi)$ – полиномы от $\xi \in \mathbb{R}^n$ порядка m. В работе рассматривается следующая система :

$$A\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = B\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x,t), \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^n \times \Pi_\alpha, \tag{*}$$

$u(x,t)$ предполагается бесконечно дифференцируемой по $x \in \mathbb{R}^n$, аналитичной по $t \in \Pi_\alpha$ и имеет полиномиальный рост по (x,t). Пусть $\rho(\xi)$ обозначает число корней $P(\xi,\lambda) = \det(\lambda A(\xi) - B(\xi)) \not\equiv 0$, принадлежащих области $\Pi_\alpha^* = \{\lambda| \ \frac{\pi}{2} \le \arg\lambda \le \frac{3}{2}\pi - \alpha\}$. Предполагается, что либо a) $\det A(\xi)$ имеет конечное число нулей, либо b) $\det A(\xi) \equiv 0$ и порядок $P(\xi,\lambda)$ не зависит от ξ. В обоих случаях предполагается, что $\rho(\xi) = \text{const} = r$ за исключением, быть может, конечного числа точек. Рассматривается граничная задача

$$C\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x,0) = f(x), \tag{**}$$

где $\xi \in \mathbb{R}^n$, $C(\xi)$ – матрица размерности $r \times m$. В зависимости от предположений b) или a) даны некоторые условия на $A(\xi)$, $B(\xi)$ и $C(\xi)$, при которых задача (*), (**) либо разрешима для любых $f(x)$, либо для ее разрешимости необходимо и достаточно выполнение конечного числа условий ортогональности на $f(x)$. Рассмотрена также однородная задача ($f \equiv 0$).

§0. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\Pi_\alpha = \{t| \ 0 < \arg t < \alpha < \pi\}$ – угол в комплексной плоскости Π, а $A(\xi)$, $B(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ – полиномиальные матрицы порядка m с постоянными коэффициентами.

В двугранной области $\mathbb{R}^n \times \Pi_\alpha$ рассматривается система вида

$$A\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = B\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \Pi_\alpha, \tag{1}$$

где $u = (u_1, \ldots, u_m) \in M$ – искомая вектор-функция из класса M. Этот класс состоит из функций $u(x,t) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \overline{\Pi}_\alpha)$, аналитических по $t \in \Pi_\alpha$, удовлетворяющих оценкам

$$\left| \frac{\partial^j}{\partial t^j} \left(i \frac{\partial}{\partial x} \right)^k u(x,t) \right| \leq c_k (1 + |x|)^\gamma (1 + |t|)^\beta, \quad j = 0, 1; \quad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \overline{\Pi}_\alpha, \quad (2)$$

где $k = (k_1, \ldots, k_n)$ – мультииндекс, $\left(i \frac{\partial}{\partial x}\right)^k = i^{|k|} \frac{\partial^{|k|}}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}$, $|k| = k_1 + \ldots + k_n$, $\frac{\partial}{\partial t}$, γ, $\beta \in R$ зависят от u. Система (1) была исследована в [1] в предположении, что $\det A(\xi) \neq 0$ для любого $\xi \in \mathbb{R}^n$. В настоящей работе предполагается, что либо $\det A(\xi)$ имеет конечное число нулей, либо $\det A(\xi) \equiv 0$, но в обоих случаях для любого фиксированного $\xi \in \mathbb{R}^n$ характеристический многочлен

$$P(\xi, \lambda) = \det(\lambda A(\xi) - B(\xi)) = a_o(\xi)\lambda^m + \cdots + a_m(\xi) \not\equiv 0, \quad (3)$$

что эквивалентно следующему :

$$\sum_{j=0}^{m} |a_j(\xi)| \neq 0 \quad \text{для любых} \quad \xi \in \mathbb{R}^n \quad (4)$$

Пусть $\rho(\xi)$ обозначает число корней $P(\xi, \lambda)$, принадлежащих области $\Pi_\alpha^* = \{\lambda | \ \frac{\pi}{2} \leq \arg \lambda \leq \frac{3}{2}\pi - \alpha\}$.

Исследование граничных задач для системы (1) проводится в каждом из следующих качественно различных предположений :

a) $\det A(\xi)$ имеет конечное число нулей, а $\rho(\xi) = \text{const} = r$, за исключением конечного числа точек ;

b) $\det A(\xi) \equiv 0$, порядок s полинома (3) на зависит от ξ, функция $\rho(\xi) = \text{const} = r$, за исключением конечного числа точек.

Задача А. Найти решение $u \in M$ системы (1), удовлетворяющее граничному условию

$$C\left(i \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x,0) = f(x), \quad (5)$$

где $C(\xi)$ – полиномиальная матрица размерности $r \times m$ с постоянными коэффициентами, а $f(x) \in M$ – заданная вектор-функция.

В работе указываются условия типа Лопатинского, при выполнении которых Задача A имеет решение для любой $f \in M$ в случае b). В случае a) для

разрешимости Задачи A необходимо и достаточно выполнение конечного числа условий ортогональности на $f(x)$. Исследуется и однородная ($f \equiv 0$) Задача A. Задача (1), (5) в случае b) с $\rho(\xi) \equiv \text{const}$ для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$ и с $\Pi_\alpha = R^+ = \{t \mid t > 0\}$ была изучена в [4].

§1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ

Рассмотрим дифференциальное уравнение первого порядка вида

$$\frac{\partial u(t)}{\partial t} - \lambda u(t) = f(t), \quad t \in \Pi_\alpha, \tag{1.1}$$

где $u \in M$ – искомая, а $f \in M$ – заданная функции, λ – комплексное число. Следующая лемма была доказана в [1].

Лемма 1.1. *Уравнение (1.1) имеет решение для любых $f(t)$. Если $\lambda \in \Pi_\alpha^*$, то однородное уравнение имеет одно линейно независимое решение, если же $\lambda \in C\Pi_\alpha^* = \Pi \setminus \Pi_\alpha^*$, то однородное уравнение не имеет нетривиальных решений.*

Рассмотрим теперь систему вида

$$A\frac{\partial u(t)}{\partial t} = B\,u(t) + f(t), \quad t \in \Pi_\alpha, \tag{1.2}$$

где A, B – постоянные квадратные матрицы порядка m, а $f \in M$ – заданная m–мерные вектор–функции. Предполагаем также, что (см. (3))

$$P(\lambda) = \det(\lambda A - B) \not\equiv 0. \tag{1.3}$$

Полиномиальную матрицу $\lambda A - B$ представим в виде (см. [2])

$$\lambda A - B = M(\lambda)D(\lambda)N(\lambda), \tag{1.4}$$

где $M(\lambda)$, $D(\lambda)$, $N(\lambda)$ – полиномиальные матрицы с $\det M(\lambda) = \det N(\lambda) = 1$ и $D(\lambda) = \text{diag}(d_1(\lambda), \ldots, d_m(\lambda))$ – диагональная матрица с элементами $d_j(\lambda)$ на диагонали. Очевидно, что $\det(\lambda A - B) = \prod_{j=1}^m d_j(\lambda)$ и система (1.2) эквивалентна следующей, расщепленной

$$d_j(\frac{\partial}{\partial t})w_j(t) = g_j(t), \quad j = 1, \ldots, m, \tag{1.5}$$

где $(w_1, \ldots, w_m) = w = N(\frac{\partial}{\partial t})u$, $(g_1, \ldots, g_m) = M^{-1}(\frac{\partial}{\partial t})f$.

Пусть r – число корней характеристического уравнения

$$\det(\lambda A - B) = 0, \tag{1.6}$$

принадлежащих области Π_α^*. Используя (1.5) и Лемму 1.1, легко устанавливается следующая

Лемма 1.2. *Система (1.2) имеет решение $u \in M$ для $\forall f \in M$, а однородная система имеет ровно r линейно независимых решений принадлежащих M.*

Рассмотрим задачу Коши

$$A\frac{\partial u(t)}{\partial t} = B\,u(t), \quad t \in \Pi_a, \tag{1.7}$$

$$u(0) = a, \tag{1.8}$$

где $u \in M$, а $a = (a_1, \ldots, a_m)$ – постоянный вектор.

Обозначим через $U(p)$ образ Лапласа $u(t) \in M$ при $t \in R^+$. Пусть $t \in R^+$, а $a = 0$ в (1.7), (1.8). Применяя преобразование Лапласа к (1.7), получим $(pA - B)U(p) = 0$. Из условия (1.3) и аналитичности $u(t)$ в Π_α непосредственно получается следующая

Лемма 1.3. *Решение задачи Коши (1.7), (1.8), если существует, то единственно.*

Обозначим через $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ корни полинома (1.3), а через $r_1, \ldots, r_p$ – их кратности.

Лемма 1.4. *Для того, чтобы решение $u(t)$ системы (1.7) имело вид*

$$u(t) = \sum_{k=1}^{p} q_k(t)e^{\lambda_k t}, \quad t \in \Pi_{\alpha_1} \tag{1.9}$$

где $q_k(t)$ – m-мерные вектор-функции с полиномиальными элементами, необходимо и достаточно, чтобы начальное значение $u(0)$ удовлетворяло условию

$$\left(E_m - \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (\lambda A - B)^{-1} A\, d\lambda\right) u(0) = 0, \tag{1.10}$$

где E_m – единичная матрица порядка m, γ – замкнутый контур, охватывающий только корни $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$.

Доказательство. 1. *Необходимость*. При $t \in R^+$ образ Лапласа (1.9) имеет вид

$$U(p) = \sum_{j=1}^{\rho} \sum_{s=1}^{r_j} \frac{c_{js}}{(p-\lambda_j)^s}, \quad \mathrm{Re}\, p > 0, \tag{1.11}$$

где c_{js} – вполне определенные постоянные. Учитывая (1.11) и лемму Жордана, прообраз Лапласа $U(p)$ представим следующим образом :

$$u(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varepsilon - i\infty}^{\varepsilon + i\infty} e^{pt} U(p)\, dp = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} e^{pt} U(p)\, dp, \quad \varepsilon > 0, \quad t \in R^+. \tag{1.12}$$

С другой стороны, так как $u(t)$ – решение системы (1.7), то $U(p) = (pA - B)^{-1} A u(0)$. Следовательно

$$u(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (\lambda A - B)^{-1} A e^{\lambda t}\, d\lambda\, u(0), \quad t \in R^+. \tag{1.13}$$

Так как обе части в (1.13) аналитичны по $t \in \Pi_\alpha$, то можно заменить R^+ на Π_α. Полагая $t = 0$ в (1.13), мы немедленно получим (1.9).

2. *Достаточность*. Рассмотрим вектор-функцию

$$v(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (\lambda A - B)^{-1} A e^{\lambda t}\, d\lambda\, u(0) \tag{1.14}$$

с γ, определенной в (1.10). Очевидно, что $v(t)$ удовлетворяет системе (1.7) и согласно (1.10) $v(0) = u(0)$, поэтому в силу Леммы 1.3 $v(t) \equiv u(t)$. Лемма доказана.

Следствие 1.1. Задача Коши (1.7), (1.8) разрешима ($u(t) \in M$) тогда и только тогда, когда

$$(E_m - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^-} (\lambda A - B)^{-1} A\, d\lambda) a = 0, \tag{1.15}$$

где замкнутый контур γ^- содержит те и только те корни многочлена $P(\lambda)$, которые принадлежат области Π_α^*.

Доказательство. Предположим, что (1.15) справедливо. Тогда согласно Лемме 1.4, соответствующее решение $u(t)$ задачи (1.7), (1.8) имеет вид (1.9), т.е. $u(t) \in M$. Наоборот, пусть теперь $u(t) \in M$ – решение задачи (1.7), (1.8). Поступая как в Лемме 1.4, представим $u(t)$ в виде

$$u(t) = u^+(t) + u^-(t), \quad u^{\pm}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^{\pm}} (\lambda A - B)^{-1} A e^{\lambda t}\, d\lambda\, u(0),$$

где γ^- определено посредством (1.15), а γ^+ – замкнутый контур, охватывающий только те корни полинома $P(\lambda)$ $(\lambda_{s_1}, \ldots, \lambda_{s_\rho})$, принадлежащие $C\Pi_\alpha^*$. Поскольку $u^-(t) \in M$, то $u^+(t) = u(t) - u^-(t)$ также принадлежит M. Заметим теперь, что каждая компонента $u^+(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(\frac{\partial}{\partial t} - \lambda_{s_1}) \cdots (\frac{\partial}{\partial t} - \lambda_{s_\rho}) w(t) = 0, \quad \lambda_{s_j} \in C\Pi_\alpha^*,$$

следовательно, согласно Лемме 1.3, $u^+(t) \equiv 0$. Таким образом, из $u(t) = u^-(t)$ следует, что $u(0) = u^-(0)$, т. е. (1.15) выполнено. Следствие 1.1 доказано.

Рассмотрим теперь матрицы

$$P^- = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^-} (\lambda A - B)^{-1} A \, d\lambda, \quad P^+ = E_m - P^-. \tag{1.16}$$

Лемма 1.5. *Справедливы формулы*

$$rank\ P^- = r, \quad rank\ P^+ = m - r, \tag{1.17}$$

где r *– число корней многочлена* $P(\lambda)$, *принадлежащих* Π_α^*.

Доказательство. Вначале напомним, что число линейно независимых решений системы (1.7), принадлежащих классу M, равно r (см. Лемму 1.2). Обозначим через $u^{(1)}(t), \ldots, u^{(r)}(t)$ соответствующие решения. Имеем

$$u^{(j)}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^-} (\lambda A - B)^{-1} A e^{\lambda t} \, d\lambda \; u^{(j)}(0). \tag{1.18}$$

Согласно Лемме 1.3 векторы $u^{(1)}(0), \ldots, u^{(r)}(0)$ линейно независимы. Подставляя $t = 0$ в (1.18) , получим

$$P^+ u^{(j)}(0) = 0, \quad j = 1, \ldots, r. \tag{1.19}$$

Отсюда имеем rank $P^+ \leq m - r$. С другой стороны, если rank $P^+ = q$, то система (1.15) имеет $m - q$ линейно независимых решений, которые по формуле (1.13), с γ^- вместо γ, определят $m - q$ линейно независимых решений системы (1.7), принадлежащих классу M. Поэтому $m - q \leq r$, т.е. rank $P^+ \geq m - r$. Таким образом, вторая формула в (1.17) доказана. Далее, поскольку rank $\binom{P^+}{P^-}$ = rank $\binom{E_m}{P^-} = m$,

то rank $P^- \geq r$. Заметим также, что если rank $P^- = \rho_o$, то существуют линейно независимые векторы $a_1, \ldots, a_{\rho_o}$ такие, что $P^- a_1, \ldots, P^- a_{\rho_o}$ также линейно независимы. Вектор-функция

$$v_j(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^-} (\lambda A - B)^{-1} A e^{\lambda t}\, d\lambda\, a_j, \quad j = 1, \ldots, \rho_o,$$

в силу Леммы 1.3 линейно независима. Очевидно, что $v_j(t) \in M$ и поэтому $\rho_o \leq r$, т. е. rank $P^- = r$. Лемма 1.5 доказана.

Замечание 1.1. Пусть C – прямоугольная матрица размерности $r \times m$ такая, что

$$\operatorname{rank} \begin{pmatrix} P^+ \\ C \end{pmatrix} = m. \tag{1.20}$$

Для системы (1.7) рассмотрим граничную задачу

$$Cu(0) = a. \tag{1.21}$$

Ясно, что условие (1.20) является необходимым и достаточным для существования решения (1.7), (1.21). Если же условие (1.20) нарушено, то конечное число условий вида $(a, b^{(j)}) = 0$, $j = 1, \ldots, p$, где $b^{(j)}$ – вполне определенный постоянный вектор, гарантируют разрешимость задачи. (1.7), (1.21). Пусть теперь C имеет размерность $r_0 \times m$ $(r_0 < r)$ и

$$\operatorname{rank} \begin{pmatrix} P^+ \\ C \end{pmatrix} = m - r + r_0.$$

В этом случае задача (1.7), (1.21) имеет решение для любых a, а однородная задача имеет конечное число линейно независимых решений.

§2. ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ A, СЛУЧАЙ a)

Предположим, что a) выполнено, и пусть $a_0(\xi) = \det A(\xi) \neq 0$ при $\xi \neq 0$, $a_0(0) = 0$, $\rho(\xi) = r$ для любых $\xi \neq 0$. В этом параграфе мы исключаем наличие других, отличных от $\xi = 0$, точек, в которых $\rho(\xi) \neq r$, так как эта ситуация будет разобрана в §3.

В произвольной точке $\xi \neq 0$ перенумеруем характеристические корни так, чтобы $\lambda_1(\xi), \ldots, \lambda_r(\xi) \in \Pi_\alpha^+$ и $\lambda_{r+1}(\xi), \ldots, \lambda_m(\xi) \in C\Pi_\alpha^+$. Используя Следствие A 2.6, из теоремы Зайденберга–Тарского [3] легко установить оценки (см. также [1])

$$|\lambda_j(\xi)| \leq c_j |\xi|^{m_j} (1 + |\xi|)^{n_j}, \quad m_j \leq 0, \tag{2.1}$$

$$\operatorname{dist}(\lambda_j(\xi), \Gamma_o) \geq c_j|\xi|^{p_j}(1+|\xi|)^{q_j}, \quad p_j \leq 0, \quad j = r+1, \ldots, m, \tag{2.2}$$

где Γ_o – граница угла Π_α^*.

Введем полиномы по λ :

$$Q(\xi,\lambda) = \prod_{j=1}^{r}(\lambda - \lambda_j(\xi)) = \lambda^r + \sum_{j=1}^{r} q_j(\xi)\lambda^{r-j},$$
$$R(\xi,\lambda) = \prod_{j=r+1}^{m}(\lambda - \lambda_j(\xi)) = \lambda^{m-r} + \sum_{j=1}^{m-r} r_j(\xi)\lambda^{m-r-j}. \tag{2.3}$$

Из представления

$$\lambda_1^j(\xi) + \cdots + \lambda_r^j(\xi) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma^-(\xi)} \lambda^j \frac{\frac{\partial P(\xi,\lambda)}{\partial\lambda}}{P(\xi,\lambda)}\,d\lambda, \quad \xi \neq 0, \tag{2.4}$$

где замкнутый контур $\gamma^-(\xi)$ содержит только корни $\lambda_1(\xi), \ldots, \lambda_r(\xi)$, и того факта, что множества $\{\lambda_1(\xi), \ldots, \lambda_r(\xi)\}$, $\{\lambda_{r+1}(\xi), \ldots, \lambda_m(\xi)\}$ не пересекаются ни при каком $\xi \neq 0$, заключаем, что $q_j(\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{O\})$. Аналогично $r_j(\xi) \in \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{O\})$.

Используя теорему о вычетах и неравенство (2.2), из (2.4) получим

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial\xi^k} q_j(\xi)\right| + \left|\frac{\partial^k}{\partial\xi^k} r_j(\xi)\right| \leq c_k|\xi|^{r_k}(1+|\xi|)^{s_k}, \quad r_k \leq 0. \tag{2.5}$$

Лемма 2.1. *Пусть $v(\xi,t)$ аналитична по $t \in \Pi_\alpha$ и является решением дифференциального уравнения*

$$\frac{\partial^r v(\xi,t)}{\partial t^r} + \sum_{j=1}^{r} q_j(\xi)\frac{\partial^{r-j} v(\xi,t)}{\partial t^{r-j}} = 0, \quad t \in \Pi_\alpha, \quad \xi \neq 0. \tag{2.6}$$

Если при $t = 0$ имеет место оценка

$$\left|\frac{\partial^j}{\partial t^j}\frac{\partial^k v(\xi,0)}{\partial\xi^k}\right| \leq c_{jk}(1+|\xi|)^{\alpha_{jk}}|\xi|^{\beta_{jk}}, \tag{2.7}$$

то

$$\left|\frac{\partial^j}{\partial t^j}\frac{\partial^k v(\xi,t)}{\partial\xi^k}\right| \leq c'_{jk}|\xi|^{\gamma_{jk}}(1+|\xi|)^{\delta_{jk}}(1+|t|)^{\varepsilon_{jk}}. \tag{2.8}$$

Доказательство. Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u(\xi,t)}{\partial t} - \lambda(\xi)u(\xi,t) = f(\xi,t), \quad t \in \Pi_\alpha, \tag{2.9}$$

где $\lambda(\xi) \in \Pi_\alpha^-$ удовлетворяет (2.1), $u(\xi,0)$ - (2.7) а $f(\xi,t)$ - (2.8) $|k| = 0$ и любых j. Функции $u(\xi,t)$, $f(\xi,t)$ предполагаются аналитическими по $t \in \Pi_\alpha$. Единственное решение уравнения (2.9) имеет вид

$$u(\xi,t) = u(\xi,0)e^{\lambda(\xi)t} + \int_0^t e^{\lambda(\xi)(t-\tau)} f(\xi,\tau)\,d\tau, \quad t \in \Pi_\alpha, \tag{2.10}$$

где интегрирование берется по отрезку $[0,t]$.

Легко видеть, что $u(\xi,t)$ из (2.10) удовлетворяет (2.8) при $|k| = 0$ и любом j. Представляя оператор в (2.6) как произведение операторов первого порядка, легко доказать (2.8) и для $v(\xi,t)$ при $|k| = 0$ и любом j. Продифференцируем (2.6), например, по ξ_1. Получим

$$\frac{\partial^r}{\partial t^r}\left(\frac{\partial v}{\partial \xi_1}\right) + \sum_{j=1}^{r} q_j(\xi)\frac{\partial^{r-j}}{\partial t^{r-j}}\left(\frac{\partial v}{\partial \xi_1}\right) = f_1(\xi,t), \tag{2.11}$$

где $f_1(\xi,t)$ удовлетворяет (2.8) при $|k| = 0$ и любом j. Аналогично предыдущему, докажем оценку (2.8) для $|k| = 1$ и любом j. Продолжая таким образом, получим Лемму 2.1.

Пусть $S(\mathbb{R}^n)$ и $S'(\mathbb{R}^n)$, соответственно, – пространства основных и обобщенных функций Шварца. Включение $M \subset S'(\mathbb{R}^n)$ очевидно для любых $t \in \overline{\Pi_\alpha}$. Теперь рассмотрим $u \in M$ как элемент из S' и перейдем к преобразованию Фурье в системе (1). Получим

$$A(\xi)\frac{\partial \hat{u}(\xi,t)}{\partial t} = B(\xi)\hat{u}(\xi,t), \quad t \in \Pi_\alpha, \tag{2.12}$$

где $\hat{u}(\xi,t) = F_x[u(x,t)](\xi)$ - образ Фурье $u(x,t) \in S'(\mathbb{R}^n)$. В силу (2), $\hat{u}(\xi,t) \in$ $\in F_x[M]$ удовлетворяет оценке

$$|<\hat{u}(\xi,t),\varphi(\xi)>| \le c||\varphi||_{p(\gamma)}(1+|t|)^\beta \qquad \text{для любых} \quad \varphi \in S, \tag{2.13}$$

где $||\cdot||_{p(\gamma)}$ - p-ая полунорма S.

Рассмотрим матрицы-функции (см. (1.16))

$$P^-(\xi) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma^-(\xi)} (\lambda A(\xi) - B(\xi))^{-1} A(\xi)\,d\lambda, \quad P^+(\xi) = E_m - P^-(\xi), \quad \xi \neq 0, \tag{2.14}$$

где замкнутый контур $\gamma^-(\xi)$ содержит только корни $\lambda_1(\xi),\ldots,\lambda_r(\xi) \in \Pi_\alpha^-$.

Для полинома $Q(\xi, \lambda)$ из (2.3) имеем

$$Q(\xi, \lambda_j(\xi)) = Q(\xi, \lambda) + Q_j(\xi, \lambda)(\lambda - \lambda_j(\xi)), \quad j = r+1, \ldots, m. \tag{2.15}$$

Используя (2.15), нетрудно преобразовать $P^-(\xi)$ к виду :

$$P^-(\xi) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma^-(\xi)} \frac{(\lambda A(\xi) - B(\xi))^{-1} A(\xi) P(\xi, \lambda)}{a_0(\xi) Q(\xi, \lambda)(\lambda - \lambda_{r+1}(\xi)) \cdots (\lambda - \lambda_m(\xi))} d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma^-(\xi)} \frac{(\lambda A(\xi) - B(\xi))^{-1} A(\xi) P(\xi, \lambda)(Q(\xi, \lambda) + Q_1(\xi, \lambda)(\lambda - \lambda_1(\xi)))}{a_0(\xi) Q(\xi, \lambda)(\lambda - \lambda_{r+1}(\xi)) \cdots (\lambda - \lambda_m(\xi)) Q(\xi, \lambda_1(\xi))} d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2\pi i Q(\xi, \lambda_1(\xi))} \cdot \int_{\gamma^-(\xi)} \frac{(\lambda A(\xi) - B(\xi))^{-1} A(\xi) P(\xi, \lambda) Q_1(\xi, \lambda)}{a_0(\xi) Q(\xi, \lambda)(\lambda - \lambda_{r+2}(\xi)) \cdots (\lambda - \lambda_m(\xi))} d\lambda = \ldots =$$

$$= \frac{1}{2\pi i \omega(\xi)} \int_{\gamma^-(\xi)} \frac{a(\xi, \lambda)}{a_0(\xi) Q(\xi, \lambda)} d\lambda, \tag{2.16}$$

где $a(\xi, \lambda)$ – матрица, с коэффициентами, удовлетворяющими неравенству (2.1) и

$$\omega(\xi) = \prod_{j=r+1}^{m} Q(\xi, \lambda_j(\xi)). \tag{2.17}$$

Вычисляя (2.16) по теореме о вычетах в точке $\lambda = \infty$ и используя оценки (2.2), получаем $|P^-(\xi)| \le c_0 |\xi|^{m_0} (1 + |\xi|)^{n_0}$.

Аналогичные оценки можно установить для производных $P^-(\xi)$, дифференцируя вновь (2.14) по ξ и продолжая так же как в случае $P^-(\xi)$. Получим следующую лемму.

Лемма 2.2. Элементы $p_{ij}^-(\xi)$ матрицы $P^-(\xi)$ удовлетворяют оценкам

$$\left| \frac{\partial^k}{\partial \xi^k} p_{ij}^-(\xi) \right| \le c_k (1 + |\xi|)^{n_k} |\xi|^{m_k}, \quad m_k \le 0. \tag{2.18}$$

Рассмотрим матрицу-функцию

$$V^-(\xi, t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma^-(\xi)} (\lambda A(\xi) - B(\xi))^{-1} A(\xi) e^{\lambda t} d\lambda, \quad \xi \ne 0, \quad t \in \Pi_\alpha. \tag{2.19}$$

Очевидно, что любой элемент матрицы $V^-(\xi, t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (2.6). Так как элементы $V^-(\xi, 0) = P^-(\xi)$ удовлетворяют неравенствам (2.7) (это следует из Леммы 2.2), то на основании Леммы 2.1 получаем

$$\left| \frac{\partial^j}{\partial t^j} \frac{\partial^k V^-(\xi, t)}{\partial \xi^k} \right| \le c_{jk} |\xi|^{m_{jk}} (1 + |\xi|)^{n_{jk}} (1 + |t|)^{p_{jk}} \tag{2.20}$$

Рассмотрим задачу Коши

$$\hat{u}(\xi, 0) = q(\xi) \tag{2.21}$$

для системы (2.12). Здесь $q(\xi) \in S'(\mathbb{R}^n \setminus \{O\})$ и мы ищем $\hat{u}(\xi, t) \in S'(\mathbb{R}^n \setminus \{O\})$, удовлетворяющую оценке (2.13) для любого $\varphi \in S$ с $\operatorname{supp} \varphi \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Справедлива следующая

Лемма 2.3. *Для разрешимости задачи Коши (2.12), (2.21) необходимо и достаточно, чтобы вектор-функционал $q(\xi)$ удовлетворял условию*

$$P^+(\xi) q(\xi) = 0, \quad \xi \neq 0. \tag{2.22}$$

Любое решение системы (2.12) задается формулой

$$\hat{u}(\xi, t) = V^-(\xi, t) \hat{u}(\xi, 0), \tag{2.23}$$

где $V^-(\xi, t)$ – матрица из (2.19).

Доказательство. 1.*Необходимость.* Равенство (2.22) носит локальный характер. Будем считать, что $\xi \in V_\delta(\xi_o)$ – замкнутая δ-окрестность некоторого $\xi_o \neq 0$. Обозначим через $\hat{U}(\xi, p)$ образ Лапласа $\hat{u}(\xi, t)$ при $t \in R^+$. Если в (2.12) перейти к образам Лапласа ($t \in R^+$) и принять во внимание (2.21), то получим

$$(p\,A(\xi) - B(\xi))\hat{U}(\xi, p) = A(\xi) q(\xi), \quad \operatorname{Re} p > 0. \tag{2.24}$$

Так как $a_o(\xi) \neq 0$ и $|\lambda_j(\xi)| \leq \text{const}$, то для элементов $l_{ij}(\xi, p)$ матрицы $(pA(\xi) - B(\xi))^{-1}$ имеют место оценки

$$|l_{ij}(\xi, p)| \leq c \cdot |p|^{-1}, \quad |p| \gg 1, \tag{2.25}$$

где $\lambda_j(\xi)$ – корень $\det(pA(\xi) - B(\xi)) = a_o(\xi)p^m + \cdots + a_m(\xi)$. Применяя формулу обратного преобразования Лапласа, получаем

$$\hat{u}(\xi, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\epsilon - i\infty}^{\epsilon + i\infty} e^{pt} \hat{U}(\xi, p)\, dp \quad \text{для любых} \quad \epsilon > 0, \quad t \in R^+. \tag{2.26}$$

Пусть $\epsilon_o > 0$ и $\delta > 0$ такие, что

$$\operatorname{Re} \lambda_j(\xi) \leq \frac{\epsilon_o}{2}, \; j = 1, \ldots, r + k; \quad \operatorname{Re} \lambda_j(\xi) \geq \epsilon_o, \; j = r + k + 1, \ldots, m, \quad \xi \in V_\delta(\xi_o). \tag{2.27}$$

Выбирая в (2.26) $\varepsilon_o/2 < \varepsilon < \varepsilon_o$, принимая во внимание (2.24), (2.25) и на основании интегральной теоремы Коши получим

$$u(\xi,t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^-(\xi)} (\lambda A(\xi) - B(\xi))^{-1} A(\xi) e^{\lambda t}\, d\lambda \cdot q(\xi), \quad \xi \in V_\delta(\xi_o), \quad t \in R^+, \tag{2.28}$$

где замкнутый контур $\Gamma^-(\xi)$ содержит только корни $\lambda_1(\xi),\ldots,\lambda_{k+r}(\xi)$. Заметим также, что множества $\{\lambda_1(\xi), \ldots, \lambda_r(\xi)\}$, $\{\lambda_{r+1}(\xi), \ldots, \lambda_{r+k}(\xi)\}$ отделены друг от друга для всех $\xi \in V_\delta(\xi_o)$ и представим (2.28) в виде

$$\tilde{u}(\xi,t) = \tilde{u}_1(\xi,t) + \tilde{u}_2(\xi,t), \tag{2.29}$$

где

$$\tilde{u}_j(\xi,t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_j^-(\xi)} (\lambda A(\xi) - B(\xi))^{-1} A(\xi) e^{\lambda t}\, d\lambda \cdot q(\xi). \tag{2.30}$$

Здесь замкнутый контур $\gamma_1^-(\xi)$ содержит только корни $\lambda_1(\xi),\ldots,\lambda_r(\xi) \in \Pi_\alpha^+$, а $\gamma_2^-(\xi)$ – $\lambda_{r+1}(\xi),\ldots,\lambda_{r+k}(\xi) \in C\Pi_\alpha^+$. Очевидно, что $\tilde{u}_1(\xi,t) = V^-(\xi,t)q(\xi)$ и следовательно, аналитически продолжается в область Π_α и в силу (2.20) имеет там степенной рост. Поэтому $\tilde{u}_2(\xi,t)$ также должна иметь степенной рост. Представляя $\tilde{u}_2(\xi,t)$ в виде $\tilde{u}_2(\xi,t) = V_2(\xi,t)q(\xi)$, заметим, что элементы матрицы $V_2(\xi,t)$ удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$(\frac{\partial}{\partial t} - \lambda_{r+1}(\xi))\cdots(\frac{\partial}{\partial t} - \lambda_{r+k}(\xi))v(\xi,t) = 0 \tag{2.31}$$

или в матричной форме

$$\frac{\partial w}{\partial t} = A_0(\xi)w, \tag{2.32}$$

где $w = (v(\xi,t),\ldots,\frac{\partial^{k-1}v(\xi,t)}{\partial t^{k-1}})$, а $A_0(\xi)$ – вполне определенная матрица, элементы которой принадлежат $C^\infty(V_\delta(\xi_o))$, в силу того, что корни $\lambda_{r+1}(\xi),\ldots,\lambda_{r+k}(\xi)$ отделены от остальных. В работе [1] доказано, что аналитическое в Π_α решение (2.32), имеющее степенной рост, равно тождественно нулю. Таким образом, $u_2(\xi,t) \equiv 0$ и формула (2.23) доказана. Полагая в (2.23) $t = 0$, получим (2.22).

2.*Достаточность*. Пусть $P^+(\xi)q(\xi) = 0$, то есть $q(\xi) = P^-(\xi)q(\xi) = V^-(\xi,0)q(\xi)$. Ясно, что вектор–функционал $V^-(\xi,t)q(\xi)$ – решение задачи Коши (2.12), (2.21). Лемма 2.3 доказана.

Рассмотрим систему

$$A(0)\frac{\partial v(t)}{\partial t} = B(0)v(t), \quad t \in \Pi_a. \tag{2.33}$$

Пусть $\mu_1, \ldots, \mu_{r_1}$ – корни соответствующего ей характеристического уравнения такие, что $\mu_1, \ldots, \mu_{k_1} \in \Pi_a^+$ и $\mu_{k_1+1}, \ldots, \mu_{r_1} \in C\Pi_a^+$.

Рассмотрим матрицы

$$P_0^- = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma^-} (\lambda A(0) - B(0))^{-1} A(0)\, d\lambda, \quad P_0^+ = E_m - P_0^-, \tag{2.34}$$

где замкнутый контур γ^- охватывает только корни $\mu_1, \ldots, \mu_{k_1}$.

Мы накладываем следующие условия :

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} P^+(\xi) \\ C(\xi) \end{pmatrix} = m \quad \text{для любых} \quad \xi \neq 0, \tag{2.35}$$

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} P_0^+ \\ C(0) \end{pmatrix} = m - k_1 + r. \tag{2.36}$$

Рассмотрим алгебраическую систему

$$P^+(\xi)v_j(\xi) = 0, \quad C(\xi)v_j(\xi) = e_j, \quad e_j = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0), \quad \xi \neq 0. \tag{2.37}$$

Следующая лемма доказана в [1].

Лемма 2.4. *Система (2.37) имеет единственное решение* $v_j(\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{O\})$, *удовлетворяющее оценке*

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial \xi^k} v_j(\xi)\right| \leq c_k(1 + |\xi|)^{n_k}|\xi|^{m_k}, \quad m_k \leq 0. \tag{2.38}$$

Построение решения неоднородной Задачи A.

В граничном условии (5) вместо $f(x)$ возьмем вектор–функцию $\Delta_x^\nu f(x)$, где $\nu \geq 0$ – целое, а Δ_x – лапласиан относительно переменных $x_1, \ldots, x_n$. Образ Фурье Задачи A можно представить в виде

$$\hat{u}(\xi, t) = \sum_{j=1}^{r} V^-(\xi, t)v_j(\xi)|\xi|^{2\nu}\hat{f}_j(\xi) = \sum_{j=1}^{r} \frac{V^-(\xi, t)|\xi|^{2\nu}}{(1 + |\xi|^2)^{k_0}}(1 + |\xi|^2)^{k_0}\hat{f}_j(\xi), \quad \xi \neq 0. \tag{2.39}$$

Выбирая k_0 и ν легко убедиться [1], что прообраз Фурье $u(\xi, t)$ вектор–функциона-

ла $\tilde{u}(\xi, t)$ есть решение Задачи A с взятой правой частью. Процедурой, описанной, например, в [1], разрешимость Задачи A сведется к разрешимости следующей задачи :

$$A\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial w}{\partial t} = B(i\frac{\partial}{\partial x})w + \sum_{|j|\leq 2\nu-1} a_j(t)x^j, \quad t \in \Pi_\alpha^\cdot, \tag{2.40}$$

$$C\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)w(x,0) = \sum_{|j|\leq 2\nu-1} b_j x^j, \tag{2.41}$$

где $a_j(t) \in M$, $b_j \in R^r$ – вполне определенные величины.

Решение задачи (2.40), (2.41) будем искать в виде

$$w(x,t) = \sum_{|j|\leq 2\nu-1} c_j(t)x^j \tag{2.42}$$

с неизвестными $c_j(t) \in M$.

Подставляя $w(x,t)$ из (2.42) в (2.40), (2.41), для определения $c_j(t)$ $|j| = 2\nu - 1$ получим следующую задачу :

$$A(0)\frac{\partial c_j(t)}{\partial t} = B(0)c_j(t) + a_j(t), \quad |j| = 2\nu - 1, \quad t \in \Pi_\alpha, \tag{2.43}$$

$$C(0)c_j(0) = b_j, \quad |j| = 2\nu - 1. \tag{2.44}$$

Ее разрешимость обеспечивается условием (2.36). Остальные $c_j(t)$, $|j| < 2\nu - 1$, находятся аналогично. Таким образом, неоднородная Задача A разрешима.

Что касается однородной Задачи A, то из (2.35) вытекает, что ее решение представляется в виде

$$u(x,t) = \sum_{|j|\leq \nu_0} c_j(t)x^j \tag{2.45}$$

с неизвестными $c_j(t) \in M$.

Поступая так же как и выше, мы придем к задаче (2.43), (2.44) с $a_j(t) = b_j = 0$. Очевидно, что $u(x,t) \equiv 0$ при $k_1 = r$ (при k_1 см. (2.33)) и однородная Задача A имеет по крайней мере одно нетривиальное решение с $c_j(t) \not\equiv 0$, $|j| = \nu_0$, при $k_1 > r$ и ввиду произвольности ν_0 в (2.45) однородная Задача A имеет бесконечно много линейно независимых решений. Итак, доказана следующая

Теорема 2.1. *Пусть выполнены условия (2.35), (2.36). Тогда*

а) Задача A имеет единственное решение для любого f при $k_1 = r$,

b) неоднородная Задача A имеет решение для любых f.

c) однородная Задача A имеет бесконечно много линейно независимых решений при $k_1 > r$.

Нижеследующие примеры показывают важность условия (2.36). В §3 это условие мы опустим, при этом разрешимость неоднородной задачи сохранится.

1. Рассмотрим систему

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial t} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u, \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times \Pi_\alpha, 0 < \alpha < \pi/2. \quad (2.46)$$

Имеем, $\det(\lambda A(\xi) - B(\xi)) = \lambda(\lambda\xi^2 + 1)$. Так как $\lambda_1 = 0 \in \Pi_\alpha^+$, $\lambda_2 = -\frac{1}{\xi^2} \in \Pi_\alpha^-$ для $\xi \neq 0$, то для системы (2.46) рассматриваем задачу

$$C\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right) u(x,0) = f(x), \quad (2.47)$$

где $C(\xi)$ – квадратная матрица порядка $r = 2$ с $\det C(\xi) \neq 0$ для $\xi \neq 0$. Пусть $C\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right) = E_2$ – единичная матрица. Очевидно, что $P^-(\xi) = E_2$ при $\xi \neq 0$ и $P^+(\xi) = E_2 - P^-(\xi) = 0$ при $\xi \neq 0$, т. е. условие (2.35) выполнено. Проверим условие (2.36). Имеем, $\det(\lambda A(0) - B(0)) = \lambda = 0 \in \Pi_\alpha^+$, то есть корень $k_1 = 1$ и условие (2.36) не может иметь места, так как $m - k_1 + r = 3 > 2$. Покажем, что задача (2.46), (2.47) не всегда разрешима. Пусть $f = (0,1)$, а $u(x,t)$ – соответствующее решение. Из условия (2.35) следует, что $\tilde{u}(\xi,t) = 0$ для $\xi \neq 0$, следовательно

$$u(x,t) = \sum_{|j| \leq N_0} c_j(t) x^j. \quad (2.48)$$

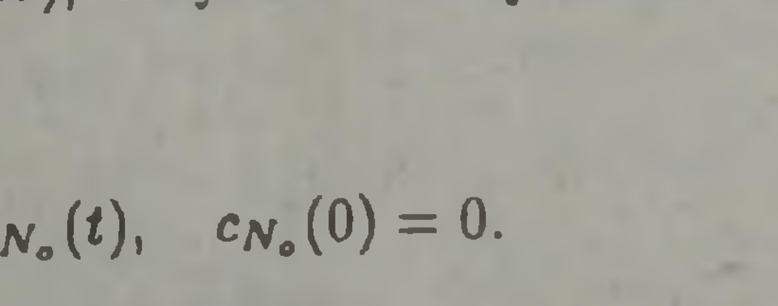
Подставляя $u(x,t)$ из (2.48) в (2.46), (2.47), получим задачу Коши для $c_{N_0}(t)$ с $N_0 \geq 1$:

$$A(0)\frac{\partial c_{N_0}(t)}{\partial t} = B(0)c_{N_0}(t), \quad c_{N_0}(0) = 0.$$

Отсюда следует, что $c_{N_0}(t) = 0$. Таким образом, $u(x,t) = c_0(t)$ и получаем задачу

$$A(0)\frac{\partial c_0(t)}{\partial t} = B(0)c_0(t), \quad c_0(0) = e_2, \quad e_2 = (0,1).$$

Так как $P^+ = E_2 - P_0^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, то условие $P_0^+ e_2 = 0$ (см. условие разрешимости (1.15)) не выполнено.



2. Рассмотрим систему

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2}{\partial x^2} \end{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial t} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} u, \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times \Pi_\alpha, 0 < \alpha < \pi, \tag{2.49}$$

для которой $\det(\lambda A(\xi) - B(\xi)) = \lambda(-\lambda\xi^2 + 1)$ и, следовательно, $\lambda_1 = 0 \in \Pi_\alpha^*$ и $\lambda_2 = \frac{1}{\xi^2} \in C\Pi_\alpha^*$ для $\xi \neq 0$. Граничное условие на u возьмем в виде

$$a_1\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right) u_1(x,0) = f(x), \tag{2.50}$$

где $a_1(\xi)$ – полиномы по ξ с постоянными коэффициентами, $a_1(\xi) \neq 0$ при $\xi \neq 0$. Матрицы $P^+(\xi)$ и P_0^+ имеют вид

$$P^+(\xi) = \begin{pmatrix} 0 & \xi^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_0^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Условие (2.35) , очевидно, имеет место. Далее, если $a_1(0) \neq 0$, то условие (2.36) также выполнено. Пусть теперь $a_1(0) = 0$, тогда условие (2.36) хотя и нарушено, но задача (2.49), (2.50) разрешима для любых $f(x)$. Для этого достаточно представить $a_1\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)$ в виде $a_1\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right) = \left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)^{k_o} a_o\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)$, где $a_o(\xi) \neq 0$ для всех ξ и вместо (2.50) рассмотреть задачу $a_o\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right) u_1(x,0) = F(x)$ с $\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)^{k_o} F(x) = f(x)$, для которой условия (2.35), (2.36) выполнены.

§3. ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ A, СЛУЧАЙ b)

Случай b) мы разобьем на два существенно отличающихся случая : 1b) функция $\rho(\xi) = \text{const} = r$ для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$ и 2b) функция $\rho(\xi) = \text{const} = r$ для всех $\xi \neq 0$ и $\rho(0) > r$. Отметим, что полученные выше оценки и естественно соответствующие леммы, на которые мы будем ссылаться в этом параграфе, имеют приведенный вид и для случая 2b). А для случая 1b) в них следует исключить множитель $|\xi|^{m_k}$. Единственное, что требует обоснования – формула (2.28) при доказательстве Леммы 2.3, так как при $\det A(\xi) \equiv 0$ оценка (2.25) перестает быть верной и принимает вид

$$|l_{ij}(\xi,p)| \leq c|p|^{m-r_o-1}, \quad |p| \gg 1, \; r_o \geq 1, \; \xi \in V_\delta(\xi_o). \tag{3.1}$$

Ряд Лорана матрицы $(pA(\xi) - B(\xi))^{-1}$ в окрестности точки $p = \infty$ имеет вид

$$(pA(\xi) - B(\xi))^{-1} = \beta(p,\xi) + \sum_{j \leq m-r_o-1} \beta_j(\xi) p^j, \tag{3.2}$$

где

$$\beta(p,\xi) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|+=R}(\lambda A(\xi) - B(\xi))^{-1}\frac{d\lambda}{\lambda - p},$$

$$\beta_j(\xi) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|+=R}(\lambda A(\xi) - B(\xi))^{-1}\lambda^{-j-1}d\lambda, \quad j = 0,\ldots,m-r_o-1, \quad R \gg 1.$$

Так как $\hat{U}(\xi,p)$ - образ Лапласа, то $\lim_{\mathrm{Re}\, p\to+\infty}\hat{U}(\xi,p) = 0$. Но в силу (2.24) и (3.2) это возможно тогда и только тогда, когда

$$\beta_j(\xi)A(\xi)q(\xi) = 0, \quad j = 0,\ldots,m-r_o-1.$$

Таким образом

$$\hat{U}(\xi,p) = (pA(\xi) - B(\xi))^{-1}A(\xi)q(\xi) = \beta(p,\xi)A(\xi)q(\xi),$$

где элементы матрицы $\beta(p,\xi)$ удовлетворяют оценке (2.25) и, тем самым, формула (2.28) обоснована. Пусть имеет место случай 1b) и условие (2.35) выполняется для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$. Тогда в оценке (2.38) множитель $|\xi|^{m_k}$ отсутствует и очевидна

Теорема 3.1. *В случае 1b), если условие (2.35) выполнено для всех* $\xi \in \mathbb{R}^n$, *то однородная Задача A имеет только нулевое решение, а неоднородная Задача A разрешима для всех f.*

Если же имеет место случай 1b, но условие (2.35) нарушено только в точке $\xi = 0$, то решение неоднородной Задачи A как и в §2 сводим к задаче (2.40), (2.41). Частное решение системы (2.40) легко построить, если искать его в виде

$$u_o(x,t) = \sum_{|j|\le\nu_o} c_j(t)x^j$$

и для определения $c_j(t)$ воспользоваться условием (3) и Леммой 1.2. Поэтому в (2.40) правую часть берем равной нулю. Заметим также, что в этом параграфе условие (2.36) опущено. Но мы покажем ниже, что Задача B, которая подобна задаче (2.40), (2.41) слабо разрешима. Рассмотрим следующую задачу.

Задача B. Пусть имеет место случай 1b) и выполнено условие

$$\mathrm{rank}\begin{pmatrix} P^+(\xi) \\ C(\xi)\end{pmatrix} = m \quad \text{при} \quad \xi \neq 0. \tag{3.3}$$

В классе $w \in M$ найти решение системы

$$A\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial w}{\partial t} = B\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)w, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \Pi_\alpha, \tag{3.4}$$

удовлетворяющее условию

$$C\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)w(x,0) = p(x), \tag{3.5}$$

где $p(x)$ – заданный вектор-многочлен от $x \in \mathbb{R}^n$.

Решение Задачи B. В образах Фурье задача (3.4), (3.5) имеет вид

$$A(\xi)\frac{\partial \hat{w}(\xi,t)}{\partial t} = B(\xi)\hat{w}(\xi,t), \tag{3.6}$$

$$C(\xi)\hat{w}(\xi,0) = \hat{p}(\xi), \tag{3.7}$$

где $\hat{w}(\xi,t) \in S'$ удовлетворяет оценке (2.13), а $\hat{p}(\xi) \in S'$ сосредоточен в точке $\xi = 0$. Заменим $\hat{p}(\xi)$ в (3.7) вектор-функционалом $q(\xi) = (q_1(\xi),\ldots, q_r(\xi)) \in S'$. В соответствии с (2.39) рассмотрим функционал

$$\tilde{w}_1(\xi,t) = \sum_{j=1}^{r} V^-(\xi,t)v_j(\xi)q_j(\xi), \tag{3.8}$$

который регуляризуем по формуле :

$$< \tilde{w}_1(\xi,t), \varphi(\xi) >= \sum_{j=1}^{r} < q_j(\xi), V^-(\xi,t)v_j(\xi)\psi(\xi) >, \tag{3.9}$$

где

$$\psi(\xi) = \varphi(\xi) - \alpha(\xi)\sum_{|j|\le\nu_0}\frac{\xi^j}{j!}\frac{\partial^j\varphi(0)}{\partial\xi^j},$$

$$\nu_0 \gg 1,\ \alpha(\xi) \in C_0^\infty(|\xi| < \varepsilon),\ \alpha(\xi) \equiv 1 \text{ при } |\xi| < \varepsilon/2.$$

Напомним, что $v_j(\xi)$ в (3.8) удовлетворяет (2.38) в силу (3.3). Так как функционалы $q_j(\xi)$ имеют конечный порядок сингулярности, то для некоторого ν_0 функционал $\tilde{w}_1(\xi,t)$, определенный по формуле (3.9), принадлежит S' и удовлетворяет неравенству (2.13). Очевидно, что $\tilde{w}_1(\xi,t)$ - решение задачи (3.6), (3.7) для любых $\varphi \in S$, supp $\varphi \subset \mathbb{R}^n \setminus \{O\}$, поэтому имеем

$$A(\xi)\frac{\partial \tilde{w}_1(\xi,t)}{\partial t} = B(\xi)\tilde{w}_1(\xi,t) + \sum_{|j|\le N_0} a_j(t)\delta^{(j)}(\xi), \tag{3.10}$$

$$C(\xi)\tilde{w}_1(\xi,0) = q(\xi) + \sum_{|j|\le N_0} b_j \delta^{(j)}(\xi), \tag{3.11}$$

где $\delta(\xi)$ – функция Дирака, а $a_j(t) \in M$, $b_j \in R^r$ определяются по формулам

$$\begin{aligned} a_j(t) &= \frac{(-1)^{|j|}}{j!}\left(A(\xi)\frac{\partial \tilde{w}_1(\xi,t)}{\partial t} - B(\xi)\tilde{w}_1(\xi,t), \xi^j\right), \\ b_j &= \frac{(-1)^{|j|}}{j!}\left(C(\xi)\tilde{w}_1(\xi,0) - q(\xi), \xi^j\right). \end{aligned} \tag{3.12}$$

Таким образом, решение задачи (3.6), (3.7) можно представить в виде

$$\tilde{w}(\xi,t) = \tilde{w}_1(\xi,t) + \sum_{|j|\le N_0} c_j(t)\delta^{(j)}(\xi), \tag{3.13}$$

где $c_j(t) \in M$ произвольны.

Подставляя $\tilde{w}(\xi,t)$ из (3.13) в (3.6), (3.7), для определения вектор-функций $c_j(t)$ получим задачу (ср. с задачей (1.7), (1.21))

$$A_1\frac{\partial c(t)}{\partial t} = B_1 c(t) + a(t), \quad C_1 c(0) = b, \tag{3.14}$$

где A_1, B_1 – постоянные квадратные матрицы такие, что $\det(\lambda A_1 - B_1) \not\equiv 0$; C_1 – постоянная прямоугольная матрица; $a(t)$, b вполне определены, $c(t)$ – неизвестная вектор-функция, компоненты которой состоят из всех компонент векторов $c_j(t)$. Построив частное решение неоднородной системы (3.14) (это возможно, так как $\det(\lambda A_1 - B_1) \not\equiv 0$) мы можем считать $a(t) \equiv 0$. Согласно Замечанию 1.1 конечное число условий

$$(b, d^{(j)}) = 0, \quad j = 1, \ldots, k_o, \tag{3.15}$$

необходимы и достаточны для разрешимости задачи (3.14), где $d^{(j)}$ – постоянные векторы. В силу (3.9), (3.12) условия (3.15) примут вид

$$\sum_{j=1}^{r} < q_j(\xi), \omega_{lj}(\xi) >= 0, \quad l = 1, \ldots, k_o, \tag{3.16}$$

где $\omega_{lj}(\xi)$ – вполне определенные функции, на которых функционал $q_j(\xi)$ определен.

Покажем, что в действительности $\omega_{lj}(\xi) \equiv 0$. Для этого предположим, что $q(\xi) = (0, \ldots, 0, \varphi(\xi), 0 \ldots, 0)$, где $\varphi \in S$ и $\operatorname{supp} \varphi \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Очевидно, что для такого $q(\xi)$ Задача B разрешима и поэтому условия (3.16) выполнены и имеют вид

$$\int \varphi(\xi)\omega_{l_0}(\xi)d\xi = 0.$$

В силу произвольности $\varphi(\xi)$ получаем $\omega_{l,s}(\xi) \equiv 0$. Таким образом, условия (3.16) всегда выполнены и поэтому задача (3.14) и Задача B разрешимы. Что касается однородной Задачи A ($f \equiv 0$), то из условия (3.3) следует, что образ Фурье $u^o(\xi, t)$ ее решения $u^o(x, t)$ равен нулю при $\xi \neq 0$. Поэтому $u^o(x, t)$ имеет вид

$$u^o(x,t) = \sum_{|j| \leq N_0} c_j(t) x^j. \tag{3.17}$$

Подставляя $u^o(x, t)$ из (3.17) в (1), (5) и используя неравенство

$$\operatorname{rank} \begin{pmatrix} P^+(0) \\ C(0) \end{pmatrix} < m$$

для случая 1b) получим (см. Лемму 1.8 в [1]) следующую теорему.

Теорема 3.2. *Пусть выполнено условие (3.3). Тогда неоднородная Задача A имеет решение для всех f. При $n = 1$ однородная Задача A имеет конечное число линейно независимых решений, если же $n \geq 2$, то – бесконечное число линейно независимых решений.*

Не вдаваясь в подробности, отметим что случай 2b) исследуется тем же методом, что 1b) при условии (3.3). Сформулируем соответствующий результат.

Теорема 3.3. *В случае 2b) неоднородная Задача A имеет решение для любых f, а однородная задача имеет бесконечно много линейно независимых решений для любых n.*

В заключение рассмотрим следующий пример.

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = -u_1 - \frac{\partial u_2}{\partial x}, \quad 0 = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - u_2, \quad (x,t) \in R \times \Pi_\alpha,\ 0 < \alpha < \pi/2.$$

Матрицы $A(\xi)$ и $B(\xi)$ имеют вид

$$A(\xi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B(\xi) = \begin{pmatrix} -1 & i\xi \\ -i\xi & -(1+\xi^2) \end{pmatrix}.$$

Соответствующее характеристическое уравнение

$$\det(\lambda A(\xi) - B(\xi)) = \lambda(1+\xi^2) + 1 = 0$$

имеет единственный корень $\lambda = -(1+\xi^2)^{-1} \in \Pi_\alpha^*$. Согласно вышеизложенной теории ставится граничная задача

$$a_1 u_1(x,0) + a_2 u_2(x,0) = f(x), \quad a_1, a_2 \in R,\ f \in M.$$

Имеем

$$P^+(\xi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{i\xi}{1+\xi^2} & 1 \end{pmatrix}$$

Пусть $a_1 \neq 0$, тогда

$$\operatorname{rank} \begin{pmatrix} \frac{i\xi}{1+\xi^2} & 1 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix} = 2 \quad \text{для всех} \quad \xi \in R$$

и условие (2.35) выполняется для всех $\xi \in R$. Поэтому рассмотренная задача имеет единственное решение для всех $f \in M$. Если же $a_1 = 0$ и $a_2 = 1$, то

$$\operatorname{rank} \begin{pmatrix} \frac{i\xi}{1+\xi^2} & 1 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} = 2 \quad \text{для} \quad \xi \neq 0$$

с порядком вырождения в точке $\xi = 0$, равным 1. Поэтому однородная задача имеет одно линейно независимое решение. Действительно, решением системы

$$\frac{i\xi}{1+\xi^2} u_1(\xi, 0) + u_2(\xi, 0) = 0, \quad u_2(\xi, 0) = 0$$

является единственный вектор-функционал $(\delta(\xi), 0)$ с функцией Дирака $\delta(\xi)$. Что касается неоднородной задачи, то в качестве частного решения системы $v(\xi) = (-\frac{1}{i\xi} + i\xi, 1)$

$$\frac{i\xi}{1+\xi^2} v_1(\xi) + v_2(\xi) = 0, \quad v_2(\xi) = 1,$$

возьмем $v(\xi) = (-\frac{1}{i\xi} + i\xi, 1)$. И, если вместо $f(x)$ в граничном условии взять $f'(x)$, то прообраз Фурье $u_0(x, t)$ функционала

$$V^-(\xi, t)(1+\xi^2)^{-k_0} v(\xi)(-i\xi)(1+\xi^2)^{k_0} \hat{f}(\xi), \quad k_0 \gg 1$$

принадлежит M и является решением этой задачи. Здесь $V^-(\xi, t)$ – матрица, определенная условием (2.19). Пусть $v_0 \in M$ удовлетворяет уравнению $\frac{\partial v_0}{\partial x} = u_0$. Подставляя u_0 в систему и граничное условие, получим

$$A\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right) \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial v_0}{\partial x}\right) = B\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right) \frac{\partial v_0}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial x} v_{02}(x, 0) = f'(x), \; v_0 = (v_{01}, v_{02})$$

или, интегрируя

$$A\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right) \frac{\partial v_0}{\partial t} = B\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right) v_0 + a(t), \quad v_{02}(x, 0) = f(x) + b,$$

$a(t)$ и b вполне определены. Остается решить задачу

$$A\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial w}{\partial t} = B\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)w, \quad w_2(x,0) = b_o.$$

Если $w(x,t)$ искать в виде $w(x,t) = c_0(t) + c_1(t)$, то легко построить решение этой задачи

$$w_1(x,t) = b_o x e^{-t}, \quad w_2(x,t) = b_o e^{-t}$$

ABSTRACT. Let $\Pi_\alpha = \{t|\ 0 < \arg t < \alpha < \pi\}$ be an angle in the complex plane and let $A(\xi)$, $B(\xi)$ be polynomials in $\xi \in \mathbb{R}^n$ of order m. We consider the following system

$$A\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = B\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x,t), \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^n \times \Pi_\alpha, \qquad (*)$$

where $u(x,t)$ is assumed to be infinitely differentiable in $x \in \mathbb{R}^n$, analytic in $t \in \Pi_\alpha$ and having polynomial growth in (x,t). Let $\rho(\xi)$ denote the number of roots of characteristic polynomial $P(\xi,\lambda) = \det(\lambda A(\xi) - B(\xi)) \not\equiv 0$ which belongs to $\Pi^*_\alpha = \{\lambda|\ \frac{\pi}{2} \le \arg\lambda \le \frac{3}{2}\pi - \alpha\}$. We assume that either a) $\det A(\xi)$ vanishes in a finite number of points or b) $\det A(\xi) \equiv 0$ and the order of $P(\xi,\lambda)$ in λ does not depend on ξ. In both cases we assume that $\rho(\xi) = \text{const} = r$ with possible exception of a finite number of points. Consider the boundary value problem

$$C\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x,0) = f(x) \qquad (**)$$

with polynomial in $\xi \in \mathbb{R}^n$ matrix $C(\xi)$ of dimension $r \times m$. Depending on hypothesis b) or a) we give some conditions on $A(\xi)$, $B(\xi)$ and $C(\xi)$ under which the problem (*), (**) either becomes solvable for any $f(x)$ or for its solvability a finite number of conditions of orthogonality on $f(x)$ is necessary and sufficient. The homogeneous problem ($f \equiv 0$) is treated as well.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Андрян, "Общая граничная задача в двугранной области для систем уравнений в частных производных", Изв. АН Армении, Математика, т. 28, №2, стр. 3–22, 1993.
2. Ф. Р. Гантмахер, Теория Матриц, М., Наука, 1988.
3. Л. Хермандер, Анализ Линейных Дифференциальных Операторов с Частными Производными, т. 2, М., Мир, 1986.
4. N. E. Tovmasian, Boundary Value Problems for Partial Differential Equations and Applications in Electrodynamics, World Scientific Publishing, Singapore, 1993.

8 Декабря 1992

Армянский государственный
инженерный университет