Посвящается профессору
Мхитару М. Джрбашяну
в связи с 75-летним юбилеем

О СУЩЕСТВЕННОЙ ВАРИАЦИИ В СМЫСЛЕ ВИТАЛИ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Ф. А. Талалян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 28, №4, 1993

В настоящей работе излагаются некоторые результаты, относящиеся к понятию существенной вариации в смысле Витали функций многих переменных. Показывается, что существенная вариация суммируемой функции может быть вычислена с помощью ее интегральных средних. Доказываются также многомерные аналоги двух теорем конечности существенной вариации.

§1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе излагаются некоторые результаты, относящиеся к понятию существенной вариации по Витали функции многих переменных. Данное понятие мы здесь вводим по аналогии с рассмотренной в [2], [3] существенной абсолютной непрерывностью по Витали.[1].

Всюду в дальнейшем будем пользоваться терминологией и обозначениями работы [4]. В частности, для каждого n-мерного сегмента J обозначим через $\operatorname{vert}(J)$ множество вершин J, а $\Delta_n(f, J)$ - это n-мерная разность функции f на J. Если c - действительное число, то полагаем $\bar{c} = (c, ..., c) \in \mathbb{R}^n$, Далее, через Q^n обозначим n-мерный единичный куб, а через λ_n - n-мерную меру Лебега. Пусть f - действительная функция, заданная на n-мерном сегменте J и $E \subset J$

[1] В [2] вместо "существенной" был использован термин "обобщенная".

— некоторое множество точек. Положим

$$\operatorname{var}(f;E)=\sup\sum_k |\Delta_n(f;J_k)|, \tag{1}$$

где верхняя грань берется по всем конечным системам попарно неперекрывающихся сегментов J_k с вершинами из E.

Здесь под неперекрывающимися сегментами мы понимаем сегменты без общих внутренних точек.

Определение. Пусть f есть функция n переменных, заданная на n-мерном сегменте J. Величина

$$\operatorname{ess\,var}(f;J)=\inf\{\operatorname{var}(f;E):\quad E\subset J,\ \lambda_n(J\setminus E)=0\} \tag{2}$$

называется существенной вариацией Витали функции f на J.

Заметим, что в (2) нижнюю грань можно взять по всем E, содержащимся внутри J $(E\subset \operatorname{int}(J))$ с $\lambda_n(J\setminus E)=0$. Заметим также, что указанная нижняя грань достигается на некотором E.

В параграфе 2 доказывается основной результат данной работы – Теорема 1, согласно которой для вычисления существенной вариации суммируемой функции можно использовать ее "усреднения по разбиениям". В параграфе 3 доказывается, что существенная вариация существенно абсолютно непрерывной функции выражается интегралом от слабой смешанной производной данной функции. Наконец , в параграфе 4 доказывается, что из справедливости некоторого асимптотического равенства следует конечность существенной вариации суммируемой функции. Этот результат в одномерном случае был доказан Г. Харди и Дж. Литтльвудом (см. [1], Теорема 24). Для его распространения на многомерный случай были применены результаты работ [2], [3].

§2. СУЩЕСТВЕННАЯ ВАРИАЦИЯ И УСРЕДНЕНИЯ

Пусть $\overline{a}=(a_1,...,a_n)$ и $\overline{b}=(b_1,...,b_n)$ – точки $\mathbb{R}^n$, причем $\overline{a}<\overline{b}$, $\overline{m}=(m_1,...,m_n)$ – положительная целочисленная точка и для каждого $i=1,...,n$

$$a_i=t_0^{(i)}<t_1^{(i)}<...<t_{m_i}^{(i)}=b_i$$

- некоторая система действительных чисел.

Пусть $J = [\overline{a}, \overline{b}]$ - сегмент, определенный точками $\overline{a}$ и $\overline{b}$. Для каждой целочисленной точки $\overline{z} = (z_1, \ldots, z_n) \in [\overline{0}, \overline{m}]$ положим $\overline{t}_{\overline{z}} = (t_{z_1}^{(1)}, \ldots, t_{z_n}^{(n)})$.

Систему точек

$$P = \{\overline{t}_{\overline{z}}: \quad \overline{z} \in [\overline{0}, \overline{m}]\}$$

назовем разбиением сегмента J. При этом точки $\overline{t}_{\overline{z}}$ будут называться узлами, а сегменты $[\overline{t}_{\overline{z}-\overline{1}}, \overline{t}_{\overline{z}}]$, $\overline{z} \in [\overline{1}, \overline{m}]$ - ячейками разбиения P. Узлы $\overline{t}_{\overline{z}}$ при $\overline{z} \in [\overline{1}, \overline{m} - \overline{1}]$ назовем внутренними.

Обозначим через $\operatorname{int}(P)$ множество внутренних узлов разбиения P, а через $\operatorname{cell}(P)$ - множество его ячеек. Заметим, что $\operatorname{int}(P)$ есть разбиение сегмента $[\overline{t}_{\overline{1}}, \overline{t}_{\overline{m}-\overline{1}}]$.

Пусть f - суммируемая функция на J. Положим

$$A_f(\overline{z}) = \frac{1}{\lambda_n(J_{\overline{z}})} \int_{J_{\overline{z}}} f \, d\lambda_n; \quad \overline{z} \in [\overline{1}, \overline{m}], \tag{4}$$

где $J_{\overline{z}} = [\overline{t}_{\overline{z}-\overline{1}}, \overline{t}_{\overline{z}}]$.

Функцию

$$\sum_{\overline{z}=\overline{1}}^{\overline{m}} A_f(\overline{z}) \chi_{J_{\overline{z}}}(\overline{x}) \tag{5}$$

назовем усреднением функции f по разбиению P. Существенную вариацию Витали суммируемых функций можно вычислить с помощью их усреднения.

Теорема 1. *Пусть J - n-мерный сегмент и $f \in L^1(J)$. Тогда*

$$\operatorname{ess\,var}(f; J) = \sup \sum_{\overline{z}=\overline{1}}^{\overline{m}-\overline{1}} |\Delta_n(A_f; [\overline{z}, \overline{z} + \overline{1}])|, \tag{6}$$

где верхняя грань берется по всем разбиениям J.

Для доказательства этой теоремы нам понадобятся несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 1. *Пусть f - действительная измеримая функция на n-мерном сегменте J. Тогда*

$$\operatorname{ess\,var}(f; J) = \inf \left\{ \sup_{\operatorname{int}(P) \subset E} \sum_{I \in \operatorname{cell}(\operatorname{int}(P))} |\Delta_n(f; I)| : E \subset \operatorname{int}(J), \lambda_n(J \setminus E) = 0 \right\}. \tag{7}$$

Доказательство. Правую часть (7) для краткости обозначим через A. Очевидно, имеем $\operatorname{ess\,var}(f; J) \geq A$.

Для доказательства обратного неравенства мы воспользуемся теоремой об аппроксимативной непрерывности почти всюду измеримых функций.

Пусть множество $E \subset \operatorname{int}(J)$ выбрано так, что $\lambda_n(J \setminus E) = 0$,

$$\operatorname{ess\,var}(f; J) = \operatorname{var}(f; E) \tag{8}$$

и

$$A = \sup_{\operatorname{int}(P) \subset E} \sum_{I \in \operatorname{cell}(\operatorname{int}(P))} |\Delta_n(f; I)|. \tag{9}$$

При этом можно считать, что все точки E являются точками аппроксимативной непрерывности функции f.

Пусть $\varepsilon > 0$ – произвольное фиксированнное число. Возьмем систему $\{J_k\}$ попарно неперекрывающихся сегментов с вершинами из E так, чтобы

$$\operatorname{ess\,var}(f; J) - \varepsilon \leq \sum_k |\Delta_n(f; J_k)|. \tag{10}$$

Пусть P есть разбиение J, порожденное системой $\{J_k\}$. Имеем

$$\bigcup_k \operatorname{vert}(J_k) \subset \operatorname{int}(P).$$

В силу теоремы об аппроксимативной непрерывности существует такой достаточно малый вектор $\overline{a}$, что

$$\operatorname{int}(P) + \overline{a} \subset E \tag{11}$$

и

$$\sum_k |\Delta_n(f; J_k)| \leq \sum_k |\Delta_n(f; J_k + \overline{a})| + \varepsilon. \tag{12}$$

Тогда из (10) и (12) следует, что

$$\operatorname{ess\,var}(f; J) \leq \sum_k |\Delta_n(f; J_k + \overline{a})| + 2\varepsilon \leq \sum_{I \in \operatorname{cell}(\operatorname{int}(P_0))} |\Delta_n(f; I)| + 2\varepsilon,$$

где, в силу (11), P_0 – разбиение J, для которого $\operatorname{int}(P_0) \subset E$.

Отсюда и из (9), в силу произвольности ε, получим $\operatorname{ess\,var}(f; J) \leq A$, что и требовалось доказать.

Лемма 2. *Пусть (X,μ) — пространство с мерой, $f \in L^1(X,\mu)$ и $E \subset X$ - измеримое множество положительной меры. Тогда существуют точки $x_1, x_2 \in X$ такие, что*

$$f(x_1) \le \frac{1}{\mu(E)} \int_E f\,d\mu \le f(x_2). \tag{13}$$

Доказательство. Предположим обратное. Пусть, например, для всех $x \in E$

$$f(x) < \frac{1}{\mu(E)} \int_E f\,d\mu.$$

Тогда существует $\varepsilon > 0$ и множество $A \subset E$ с $\mu(A) > 0$ такие, что для всех $x \in A$

$$f(x) < \frac{1}{\mu(E)} \int_E f\,d\mu - \varepsilon.$$

Тогда

$$\int_E f\,d\mu = \int_A f\,d\mu + \int_{E\setminus A} f\,d\mu \le \frac{\mu(A)}{\mu(E)} \int_E f\,d\mu - \varepsilon\,\mu(A) +$$
$$+ \frac{\mu(E)-\mu(A)}{\mu(E)} \int_E f\,d\mu = \int_E f\,d\mu - \varepsilon\mu(A),$$

и мы приходим к противоречию.

Лемма 3. *Пусть $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{R}^n$, $\bar{a} < \bar{b}$, $J = [\bar{a}, \bar{b}]$, $f \in L^1(J)$, а $E \subset int(J)$ - множество с $\lambda_n(J \setminus E) = 0$ и*

$$P = \{\bar{t}_{\bar{z}}:\ \bar{z} \in [\bar{0}, \overline{m}]\}$$

- некоторое разбиение J. Тогда существует другое разбиение P_0 сегмента J такое, что $int(P_0) \subset E$ и имеет место неравенство

$$\sum_{\bar{z}=\bar{1}}^{\overline{m}-\bar{1}} |\Delta_n(A_f; [\bar{z}, \bar{z}+\bar{1}])| \le \sum_{I \in cell(int\,(P_0))} |\Delta_n(f; I)|. \tag{14}$$

Доказательство. Положим

$$S = \prod_{\substack{1 \le k_i \le m_i \\ 1 \le i \le n}} [t^{(i)}_{k_i-1}, t^{(i)}_{k_i}],$$

$$M_{\bar{z}} = \left\{(x_1^{(1)}, \dots, x_1^{(m_1)}, \dots, x_1^{(n)}, \dots, x_{m_n}^{(n)}) \in S\ \ (x_{z_1}^{(1)}, \dots, x_{z_n}^{(n)}) \in E \cap J_{\bar{z}}\right\};\quad \bar{z} \in [\bar{1}, \overline{m}]$$

и

$$M = \bigcap_{\bar{z}=\bar{1}}^{\overline{m}} M_{\bar{z}}.$$

Тогда имеем

$$M \subset S, \quad \lambda_{|\overline{m}|}(S \setminus M) = 0, \tag{15}$$

где $|\overline{m}| = m_1 + \ldots + m_n$.

Рассмотрим на S функцию $|\overline{m}|$ переменных

$$F(x_1^{(1)}, \ldots, x_{m_1}^{(1)}, \ldots, x_1^{(n)}, \ldots, x_{m_n}^{(n)}) = \sum_{\overline{z}=\overline{1}}^{\overline{m}-\overline{1}} \varepsilon_{\overline{z}} \Delta_n(f; [\overline{x}_{\overline{z}}, \overline{x}_{\overline{z}+\overline{1}}]), \tag{16}$$

где для каждого $\overline{z} \in [\overline{1}, \overline{m} - \overline{1}]$

$$\overline{x}_{\overline{z}} = (x_{z_1}^{(1)}, \ldots, x_{z_n}^{(n)}) \quad \text{и} \quad \varepsilon_{\overline{z}} = \operatorname{sign} \Delta_n(A_f; [\overline{z}, \overline{z} + \overline{1}]).$$

В силу (15) имеем

$$\frac{1}{\lambda_{|\overline{m}|}(M)} \int_M F\, d\lambda_{|\overline{m}|} = \frac{1}{\lambda_{|\overline{m}|}(S)} \int_S F\, d\lambda_{|\overline{m}|} =$$

$$= \frac{1}{\lambda_{|\overline{m}|}(S)} \int_S \sum_{\overline{z}=\overline{1}}^{\overline{m}-\overline{1}} \varepsilon_{\overline{z}} \sum_{\overline{\alpha} \in \operatorname{vert}(Q_n)} (-1)^{n-|\overline{\alpha}|} f((\overline{1} - \overline{\alpha})\, \overline{x}_{\overline{z}} + \overline{\alpha}\, \overline{x}_{\overline{z}+\overline{1}})\, d\lambda_{|\overline{m}|} =$$

$$= \sum_{\overline{z}=\overline{1}}^{\overline{m}-\overline{1}} \varepsilon_{\overline{z}} \sum_{\overline{\alpha} \in \operatorname{vert}(Q_n)} \frac{(-1)^{n-|\overline{\alpha}|}}{\prod_{i=1}^n \left((1 - \alpha_i)(t_{z_i}^{(i)} - t_{z_i-1}^{(i)}) + \alpha_i(t_{z_i+1}^{(i)} - t_{z_i}^{(i)})\right)} \int_{J_{\overline{z}+\overline{\alpha}}} f\, d\lambda_n =$$

$$= \sum_{\overline{z}=\overline{1}}^{\overline{m}-\overline{1}} \varepsilon_{\overline{z}} \Delta_n(A_f; [\overline{z}, \overline{z} + \overline{1}]) = \sum_{\overline{z}=\overline{1}}^{\overline{m}-\overline{1}} |\Delta_n(A_f; [\overline{z}, \overline{z} + \overline{1}])|. \tag{17}$$

В силу Леммы 2, из (17) следует существование точки

$$(\xi_1^{(1)}, \ldots, \xi_{m_1}^{(1)}, \ldots, \xi_1^{(n)}, \ldots, \xi_{m_n}^{(n)}) \in M$$

такой, что

$$\sum_{\overline{z}=\overline{1}}^{\overline{m}-\overline{1}} |\Delta_n(A_f; [\overline{z}, \overline{z} + \overline{1}])| \le \left| F(\xi_1^{(1)}, \ldots, \xi_{m_1}^{(1)}, \ldots, \xi_1^{(n)}, \ldots, \xi_{m_n}^{(n)}) \right|.$$

Отсюда, в силу (16) имеем

$$\sum_{\overline{z}=\overline{1}}^{\overline{m}-\overline{1}} |\Delta_n(A_f; [\overline{z}, \overline{z} + \overline{1}])| \le \sum_{\overline{z}=\overline{1}}^{\overline{m}-\overline{1}} |\Delta_n(f; [\overline{\xi}_{\overline{z}}, \overline{\xi}_{\overline{z}+\overline{1}}])|, \tag{18}$$

где $\overline{\xi}_{\overline{z}} = (\xi_{z_1}^{(1)}, \ldots, \xi_{z_n}^{(n)})$, $\overline{\xi}_{\overline{z}+\overline{1}} = (\xi_{z_1+1}^{(1)}, \ldots, \xi_{z_n+1}^{(n)})$.

Легко видеть, что точки $\overline{\xi}_{\overline{z}}$, $\overline{z} \in [\overline{1}, \overline{m}]$ образуют разбиение сегмента $[\overline{\xi}_1, \overline{\xi}_m] \subset \operatorname{int}(J)$, узлы которого принадлежат E. Продолжим его до разбиения P_0 всего сегмента J. Тогда $\operatorname{int}(P_0) \subset E$, и, в силу (18), неравенство (14) справедливо. Лемма доказана.

Доказательство Теоремы 1. Пусть D_k — двоичное разбиение k-го ранга сегмента J. Это означает, что для D_k, $\overline{m} = \overline{2^k}$ и

$$t_j^{(i)} = a_i + \frac{j}{2^k}(b_i - a_i); \quad j = 0, 1, ..., 2^k.$$

Сегменты $J_{\overline{z}}$ и средние $A_f(\overline{z})$, соответствующие разбиению D_k, обозначим через $J_{\overline{z}}^{(k)}$ и $A_f^{(k)}(\overline{z})$, соответственно. Пусть E - множество тех точек $\overline{x} \in \operatorname{int}(J)$, для которых

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{\overline{z}=\overline{1}}^{\overline{2^k}} A_f^{(k)}(\overline{z}) \chi_{J_{\overline{z}}^{(k)}}(\overline{x}) = f(\overline{x}). \tag{19}$$

Тогда по теореме Лебега $\lambda_n(J \setminus E) = 0$.

Пусть P - произвольное разбиение J с $\operatorname{int}(P) \subset E$ и $\varepsilon > 0$ - произвольное число. Тогда, в силу (19), для достаточно больших k имеем

$$\sum_{I\in \operatorname{cell}(\operatorname{int}(P))} |\Delta_n(f; I)| \le \sum_{\overline{z}=\overline{1}}^{\overline{2^k}-\overline{1}} \left|\Delta_n(A_f^{(k)}; [\overline{z}, \overline{z}+\overline{1}])\right| + \varepsilon.$$

В силу произвольности ε, отсюда и из Леммы 1 следует неравенство

$$\operatorname{ess\,var}(f; J) \le \sup \sum_{\overline{z}=\overline{1}}^{\overline{m}-\overline{1}} \left|\Delta_n(A_f; [\overline{z}, \overline{z}+\overline{1}])\right|. \tag{20}$$

С другой стороны, так как в формулировке Леммы 3 разбиение P и множество E независимы, то еще раз применяя Лемму 1, из (14) получим

$$\sup \sum_{\overline{z}=\overline{1}}^{\overline{m}-\overline{1}} \left|\Delta_n(A_f; [\overline{z}, \overline{z}+\overline{1}])\right| \le \operatorname{ess\,var}(f; J). \tag{21}$$

Равенство (6) следует из (20) и (21).

§3. СУЩЕСТВЕННО АБСОЛЮТНО НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ

Напомним определение существенной абсолютной непрерывности по Витали (см. [2], [3])

Определение. Функция f называется существенно абсолютно непрерывной по Витали на n-мерном сегменте J, если существует множество $E \subset J$ с $\lambda_n(J\setminus E) = 0$, обладающее свойством : для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что каково бы ни было конечное семейство $\{J_k;\ k = 1, \dots, l\}$ попарно неперекрывающихся n-мерных сегментов с вершинами из E и с суммой мер

$$\sum_{k=1}^{l} \lambda_n(J_k) < \delta,$$

имеет место неравенство

$$\sum_{k=1}^{l} |\Delta_n(f; J_k)| < \varepsilon.$$

Справедлива следующая

Теорема 2. *Пусть функция f существенно абсолютно непрерывна по Витали на сегменте J. Тогда*

$$ess\,var(f; J) = \int_J \left|D^{\bar{1}} f\right| d\lambda_n < \infty, \tag{22}$$

где производная $D^{\bar{1}} f = \dfrac{\partial^n f}{\partial x_1 \dots \partial x_n}$ понимается в смысле теории распределений.

Доказательство. Согласно Теореме 1 работы [3] существует единственная функция $g \in L^1(J)$ и множество $M \subset J$ с $\lambda_n(J \setminus M) = 0$ такие, что для каждого n-мерного сегмента I с вершинами, принадлежащими M, имеет место равенство

$$\Delta_n(f; I) = \int_I g\, d\lambda_n. \tag{23}$$

Покажем теперь, что $g = D^{\bar{1}} f$. Для этого зафиксируем некоторую точку $\bar{c} \in M$ так, чтобы для почти всех $\bar{x}$ выполнялось равенство

$$\Delta_n(f; [\bar{c}, \bar{x}]) = \int_{[\bar{c}, \bar{x}]} g\, d\lambda_n \tag{24}$$

Пусть теперь задана произвольная функция $\varphi \in C_0^\infty(J)$. Так как разность $f(\bar{x}) - \Delta_n(f; [\bar{c}, \bar{x}])$ представляет собой сумму, в которой каждое слагаемое зависит от меньшего, чем n числа переменных, то

$$\int_J (f(\bar{x}) - \Delta_n(f; [\bar{c}, \bar{x}]))\, D^{\bar{1}} \varphi(\bar{x})\, d\lambda_n(\bar{x}) = 0. \tag{25}$$

Из (24) и (25) интегрированием по частям получим

$$\int_J f\, D^{\bar{1}} \varphi\, d\lambda_n = \int_J (\Delta_n(f; [\bar{c}, \bar{x}]) + f(\bar{x}) - \Delta_n(f; [\bar{c}, \bar{x}]))\, D^{\bar{1}} \varphi(\bar{x})\, d\lambda_n(\bar{x}) =$$

$$= \int_J \Delta_n(f; [\bar{c}, \bar{x}])\, D^{\bar{1}} \varphi(\bar{x})\, d\lambda_n(\bar{x}) =$$

$$= \int_J \left(\int_{[\bar{c}, \bar{x}]} g\, d\lambda_n \right) D^{\bar{1}} \varphi(\bar{x})\, d\lambda_n(\bar{x}) = (-1)^n \int_J g\, \varphi\, d\lambda_n.$$

Таким образом, равенство $g \doteq D^{\overline{1}} f$ доказано. Перейдем теперь к доказательству равенства (22). Сначала заметим, что

$$\operatorname{ess\,var}(f;J) \le \operatorname{var}(f;\dot{M}) = \sup \sum_k |\Delta_n(f;J_k)| = \sup \sum_k \left| \int_J D^{\overline{1}} f \, d\lambda_n \right| \le \le \int_J \left| D^{\overline{1}} f \right| d\lambda_n, \tag{26}$$

где верхняя грань берется по всевозможным конечным системам попарно неперекрывающихся сегментов $\{J_k\}$ с вершинами, принадлежащими $\dot{M}$.

Докажем неравенство

$$\operatorname{ess\,var}(f;J) \ge \int_J \left| D^{\overline{1}} f \right| d\lambda_n. \tag{27}$$

Пусть $\varepsilon > 0$ – произвольное число. Выберем $\delta > 0$ так, чтобы для каждого множества $A \subset J$

$$\lambda_n(A) < \delta \Longrightarrow \int_A \left| D^{\overline{1}} f \right| d\lambda_n < \varepsilon. \tag{28}$$

Теперь построим конечную систему $S = \{J_k \subset J;\ k = 1, ..., l\}$ попарно неперекрывающихся сегментов так, чтобы имело место неравенство

$$\lambda_n \left(J \setminus \bigcup_{k=1}^{l} J_k \right) < \delta \tag{29}$$

и, чтобы для каждого $k = 1, ..., l$ выполнялось одно из следующих двух соотношений :

$$\lambda_n(J_k^0) > \left(1 - \frac{\delta}{\lambda_n(J)} \right) \lambda_n(J_k) \tag{30}$$

или

$$\lambda_n(J_k^1) > \left(1 - \frac{\delta}{\lambda_n(J)} \right) \lambda_n(J_k), \tag{31}$$

где $J_k^0 = \{\overline{x} \in J_k :\ D^{\overline{1}} f(\overline{x}) \ge 0\}$, $J_k^1 = \{\overline{x} \in J_k :\ D^{\overline{1}} f(\overline{x}) < 0\}$.

Указанную систему сегментов можно построить следующим образом : если для сегмента J выполняется (30) или (31) (с J вместо J_k), то требуемая система S состоит из одного J. В противном случае, разделим J на 2^n равных частей и отнесем к S те из них, для которых справедливо (30) или (31). Каждый из оставшихся сегментов разделим на 2^n равных частей и произведем такой же выбор.

Из теоремы о точках плотности измеримого множества легко следует, что при неограниченном продолжении описанного процесса наступит момент, когда для построенных сегментов $J_1, \dots, J_l$ выполняется (29). Тогда полагаем $S = \{J_1, \dots, J_l\}$.

Пусть

$$\varepsilon_k = \begin{cases} 0, & \text{если выполняется (30)} \\ 1, & \text{если выполняется (31);} \end{cases} \quad k = 1, \dots, l. \tag{32}$$

Тогда

$$\sum_{k=1}^{l} \lambda_n \left(J_k^{1-\varepsilon_k}\right) < \delta. \tag{33}$$

Пусть теперь $E \subset J$, с $\lambda_n(J \setminus E) = 0$ и

$$\operatorname{ess\,var}(f; J) = \operatorname{var}(f; E). \tag{34}$$

Для каждого $k, k = 1, \dots, l$, выберем сегмент $I_k \subset J_k \in S$ с вершинами, принадлежащими $E \cap M$ так, чтобы

$$\sum_{k=1}^{l} \lambda_n(J_k \setminus I_k) < \delta. \tag{35}$$

Тогда, в силу (23), (28), (29), (33)-(35), получим

$$\begin{aligned}
&\operatorname{ess\,var}(f; J) = \operatorname{var}(f; E) = \operatorname{var}(f; E \cap M) \geq \\
&\geq \sum_k \left| \int_{I_k} D^{\bar{1}} f \, d\lambda_n \right| \geq \sum_k \left| \int_{J_k} D^{\bar{1}} f \, d\lambda_n \right| - \\
&- \varepsilon = \sum_k \left| \int_{J_k^{\varepsilon_k}} D^{\bar{1}} f \, d\lambda_n + \int_{J_k^{1-\varepsilon_k}} D^{\bar{1}} f \, d\lambda_n \right| - \\
&- \varepsilon \geq \sum_k \left| \int_{J_k^{\varepsilon_k}} D^{\bar{1}} f \, d\lambda_n \right| - \sum_k \left| \int_{J_k^{1-\varepsilon_k}} D^{\bar{1}} f \, d\lambda_n \right| \\
&- \varepsilon = \sum_k \int_{J_k^{\varepsilon_k}} \left| D^{\bar{1}} f \right| d\lambda_n - \sum_k \int_{J_k^{1-\varepsilon_k}} \left| D^{\bar{1}} f \right| d\lambda_n - \\
&- \varepsilon \geq \sum_k \int_{J_k^{\varepsilon_k}} \left| D^{\bar{1}} f \right| d\lambda_n - 2\varepsilon \geq \sum_k \int_{J_k} \left| D^{\bar{1}} f \right| d\lambda_n - \\
&- 3\varepsilon \geq \int_J \left| D^{\bar{1}} f \right| d\lambda_n - 4\varepsilon.
\end{aligned}$$

В силу произвольности ε, отсюда следует (27).

§4. ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ КОНЕЧНОСТИ СУЩЕСТВЕННОЙ ВАРИАЦИИ СУММИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

В этом параграфе мы докажем многомерный аналог одного достаточного условия конечности существенной вариации суммируемых функций, принадлежащий Г. Харди и Дж. Литтльвуду.

Теорема 3. *Пусть J – n-мерный сегмент, $f \in L^1(J)$ и*

$$\int_J \left|\Delta_n(f;[\overline{x},\overline{x}+\overline{h}])\right| d\lambda_n(\overline{x}) = O(|\overline{h}|^n). \tag{36}$$

Тогда $\operatorname{ess\,var}(f;J) < \infty$. *(Вне J можно считать, что $f = 0$.)*

Доказательство. Положим

$$\varphi_k(\overline{x}) = k^n \int_{[\overline{x},\overline{x}+\frac{\overline{1}}{k}]} f\, d\lambda_n; \quad k = 1, 2, \dots. \tag{37}$$

Тогда по теореме Лебега, для почти всех $\overline{x} \in J$

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_k(\overline{x}) = f(\overline{x}). \tag{38}$$

Далее, имеем

$$\begin{aligned}
&\int_J \left|\Delta_n(\varphi_k;[\overline{x},\overline{x}+\overline{h}])\right| d\lambda_n(\overline{x}) = \\
&= \int_J \left|\sum_{\overline{\alpha}\in \mathrm{vert}\,(Q^n)} (-1)^{n-|\overline{\alpha}|}\varphi_k((\overline{1}-\overline{\alpha})\overline{x}+\overline{\alpha}(\overline{x}+\overline{h}))\right| d\lambda_n(\overline{x}) = \\
&= k^n \int_J \left|\sum_{\overline{\alpha}\in \mathrm{vert}\,(Q^n)} (-1)^{n-|\overline{\alpha}|} \int_{[\overline{0},\frac{\overline{1}}{k}]} f(\overline{u}+(\overline{1}-\overline{\alpha})\overline{x}+\right. \\
&\left. + \overline{\alpha}(\overline{x}+\overline{h}))\, d\lambda_n(\overline{u})\right| d\lambda_n(\overline{x}) \le \\
&\le k^n \int_{[\overline{0},\frac{\overline{1}}{k}]} d\lambda_n(\overline{u}) \int_J \left|\Delta_n(f;[\overline{x}+\overline{u},\overline{x}+\overline{u}+\overline{h}])\right| d\lambda_n(\overline{x}) = O(|\overline{h}|^n).
\end{aligned} \tag{39}$$

С другой стороны, очевидно функции φ_k абсолютно непрерывны по Витали (см. [2], определение 1). Поэтому, согласно Теореме 1 из [3], существует множество $E_0 \subset J$ с $\lambda_n(J \setminus E_0) = 0$ и последовательность функций $\Psi_k \in L^1(J)$ такие, что для каждого сегмента $I \subset J$, вершины которого принадлежат E_0, имеет место равенство

$$\Delta_n(\varphi_k; I) = \int_I \Psi_k\, d\lambda_n; \qquad k = 1, 2, \dots. \tag{40}$$

Из (40) следует, что для почти всех $\overline{x} \in J$

$$\lim_{m\to\infty} 2^{mn}\,\Delta_n(\varphi_k;[\overline{x},\overline{x}+\frac{\overline{1}}{2^m}]) = \Psi_k(\overline{x}). \tag{41}$$

Отсюда, в силу леммы Фату и условия (39), получим

$$\int_J |\Psi_k|\,d\lambda_n \le C; \qquad k = 1,2,..., \tag{42}$$

где C не зависит от k.

Пусть теперь $\{J_1,...,J_l\}$ – произвольная конечная система попарно неперекрывающихся сегментов с вершинами из E_0. В силу (40) и (42), имеем

$$\sum_{m=1}^{l} |\Delta_n(\varphi_k;J_m)| \le C; \qquad k = 1,2,.... \tag{43}$$

Пусть

$$E = E_0 \cap \left\{\overline{x}\in J:\ \lim_{k\to\infty}\varphi_k(\overline{x}) = f(\overline{x})\right\}.$$

Тогда $\lambda_n(J\setminus E) = 0$ и для каждой конечной системы попарно неперекрывающихся сегментов $J_1,...,J_l$ с вершинами из E, предельным переходом при $k\to\infty$, из (43) получим

$$\sum_{m=1}^{l} |\Delta_n(f;J_m)| \le C,$$

что и требовалось доказать.

ABSTRACT. The concept of essential variation in the sense of Vitali of functions of several variables is considered. We show that the essential variation of a summable function can be calculated by means of its integral averages. We also prove multidimensional analogues of two theorems on finiteness of essential variations.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. H. Hardy and J. E. Littlewood, "Some properties of fractional integrals", I, Math. Zeitsch., vol. 27 (1128).
2. А. А. Талалян, Ф. А. Талалян, " О представлении абсолютно непрерывных функций многих переменных", Изв. АН Арм. ССР, Математика, т. 24, №1, стр. 3–21, 1989.
3. Ф. А. Талалян, "О существенно абсолютно непрерывных функциях многих переменных", Изв. АН Армении, Математика, т. 26, №2 стр. 138 – 150, 1991.
4. Ф. А. Талалян, " Монотонные функции многих переменных и многомерная вторая теорема о среднем", Изв. АН Армении, Математика, т. 27, №2, стр. 72 89, 1992.

21 Июля 1993

Институт прикладных проблем физики НАН Армении