Посвящается профессору
Мхитару М. Джрбашяну
в связи с 75-летним юбилеем

О ПОЛНОТЕ МНОГОЧЛЕНОВ В ВЕСОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ

И. О. Хачатрян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 28, №4, 1993

Пусть $w(t)$ – весовая функция, определенная на лучах $L_\rho = \{z: |\arg z| = \frac{\pi}{2\rho}, \rho \geq 1\}$, а $C_w(L_\rho)$ – пространство непрерывных на L_ρ функций, удовлетворяющих условию $w^{-1}(t)\, f(t) \to 0$ при $|t| \to \infty$, $t \in L_\rho$. Нормой элемента $f \in C_w(L_\rho)$ назовем число $||f|| = \sup\limits_{t \in L_\rho} w^{-1}(t)\, |f(t)|$. Пусть $P_w(L_\rho)$ означает замыкание системы полиномов в $C_w(L_\rho)$, а $C_w^*(L_\rho)$ – множество целых функций порядка ρ и минимального типа, принадлежащих $C_w(L_\rho)$. Для весовой функции $w(t) = \exp\{a\,|t|^\alpha\}$, $0 < \alpha < \rho(2\rho - 1)^{-1}$, $t \in L_\rho$, $a > 0$ в работе доказано, что $P_w(L_\rho) = C_w^*(L_\rho)$.

Для данного числа $\rho \geq 1$ обозначим через $\Delta(\rho)$ и $\Delta^*(\rho)$ взаимно дополнительные угловые области :

$$\Delta(\rho) = \{z: \quad |\arg z| < \frac{\pi}{2\rho}, \quad 0 < |z| < \infty\},$$

$$\Delta^*(\rho) = \{z: \quad \frac{\pi}{2\rho} < |\arg z| < \pi, \quad 0 < |z| < \infty\}.$$

Общую границу этих областей обозначим через L_ρ. Пусть на L_ρ определена измеримая функция $W(t) \geq 1$ такая, что

$$t^n W^{-1}(t) \to 0 \quad \text{при} \quad |t| \to +\infty, \quad t \in L_\rho;\ n = 0, 1, ... \tag{1}$$

Обозначим через $C_w(L_\rho)$ пространство непрерывных на L_ρ функций, удовлетворяющих условию $f(t)\, W^{-1}(t) \to 0$ при $|t| \to +\infty$, $t \in L_\rho$.

Норму элемента $f \in C_w(L_\rho)$ определим по формуле

$$||f|| = \sup_{t \in L_\rho} |f(t)|\, W^{-1}(t).$$

Обозначим через $C^*_w(\mathbb{R})$ множество целых функций нулевой степени, входящих в $C_w(\mathbb{R})$. Имеет место

Теорема D. ([4]). *Пусть* $P_w(\mathbb{R}) \neq C_w(\mathbb{R})$. *Тогда* $P_w(\mathbb{R}) \subset C^*_w(\mathbb{R})$.

Обозначим через $\mathcal{N}_w$ множество целых функций нулевой степени, для которых $\|(t-i)^{-1} f(t)\| \leq 1$, а $\widetilde{W}_1(z) = \sup\{|f(z)| : f \in \mathcal{N}_w\}$.

Теорема E ([5]). $(P_w(\mathbb{R}) = C^*_w(\mathbb{R})) \Longleftrightarrow (\widetilde{W}(z) = \widetilde{W}_1(z), \operatorname{Im} z \neq 0)$.

Примером весовой функции, для которой $\widetilde{W}(z) = \widetilde{W}_1(z)$, может служить весовая функция типа Бернштейна. А, именно, справедлива

Теорема F ([6]). *Пусть $W(t)$ – целая четная функция с неотрицательными коэффициентами*

$$W(t) = \sum_0^\infty a_k t^{2k}, \quad a_0 \geq 1,\ a_k \geq 0,\ k = 1, 2, ...,$$

и пусть $I(W, 1, \mathbb{R}) < \infty$. *Тогда* $P_w(\mathbb{R}) = C^*_w(\mathbb{R})$.

При доказательстве этой теоремы применяется следующее свойство : функцию Бернштейна $W(t)$ и полином $p_{2n}(z) = \sum_0^n a_k t^{2k}$ можно представить как :

$$W(z) = \omega(z)\overline{\omega}(z) \quad (W(t) = |\omega(t)|^2, t \in \mathbb{R}),$$

$$p_{2n}(z) = Q_n(z)\overline{Q}_n(z) \quad (p_{2n}(t) = |Q_n(t)|^2, t \in \mathbb{R}),$$

соответственно, где все нули функций $\omega(z)$ и $Q_n(z)$ расположены в нижней полуплоскости. Поэтому трудно рассчитывать на обобщение этой теоремы для случая аппроксимации в комплексной плоскости.

Если $W(t)$ нормально возрастающая функция, то с помощью Теоремы F легко доказывается, что если $I(W, 1, \mathbb{R}) < +\infty$, то для любого $\varepsilon > 0$ и любой функции $f \in C^*_w(\mathbb{R})$ существует $p(t)$ такой, что $\|(t^2+1)^{-1}(f(t) - p(t))\| < \varepsilon$.

В работе [7] Н. Левинсон и Н. П. Мак Кин рассмотрели аппроксимацию в квадратичной метрике и получили аналогичный результат без множителя $(t^2+1)^{-1}$. В специальном случае, когда $W(t) = \exp\left(2|t|^{1/2}\right)$ в той же работе [7] был доказано следующее утверждение : замыкание множества полиномов в средне-квадратичной метрике совпадает с множеством целых функций нулевой степени.

В настоящей заметке мы также приводим независимое от Теоремы F доказательство совпадения $P_w(\mathbb{R}) = C_w^*(\mathbb{R})$ для весовых функций более общего вида : $W(t) = \exp(a|t|^\alpha)$, $0 < \alpha < 1$, $a > 0$. Наш метод позволяет также описать замыкание $P_w(L_\rho)$, когда $0 < \alpha < \rho^* < \rho$. Это достигается с помощью применения теоремы М. М. Джрбашяна.

Теорема 1. *Пусть* $W(t) = \exp(a|t|^\alpha)$, *при* $a > 0, 0 < \alpha < 1$. *Тогда* $P_w(\mathbb{R}) = C_w^*(\mathbb{R})$.

Доказательство. Пусть $f \in C_w^*(\mathbb{R})$. Рассмотрим функцию

$$F(z) = f(z)\exp\left(-a\sec\frac{\pi\alpha}{2}\exp\left(-i\frac{\pi\alpha}{2}\right)z^\alpha\right), \quad \operatorname{Im} z > 0.$$

Имеем

$$|F(x)| = |f(x)|\exp(-a|x|^\alpha) \le C, \quad x \in \mathbb{R},$$

и так как

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\ln\max_{0\le\theta\le\pi}|F(re^{i\theta})|}{r} \le 0,$$

то по принципу Фрагмена-Линделефа имеем $|F(z)| \le C$, $\operatorname{Im} z > 0$ или

$$|f(re^{i\theta})| \le C\exp\left(a\sec\frac{\pi\alpha}{2}\cos(\alpha\theta - \frac{\pi\alpha}{2})r^\alpha\right), \quad 0 \le \theta \le \pi. \tag{4}$$

Аналогичная оценка верна в нижней полуплоскости :

$$|f(re^{i\theta})| \le C\exp\left(a\sec\frac{\pi\alpha}{2}\cos(\alpha\theta + \frac{\pi\alpha}{2})r^\alpha\right), \quad -\pi \le \theta \le 0. \tag{4'}$$

Таким образом, можем написать, что $|f(z)| \le C\exp(\sigma|z|^\alpha)$, $\sigma = a\sec\frac{\pi\alpha}{2}$, $z \in \mathbb{C}$. По теореме М. М. Джрбашяна (см. [8], стр. 325) функция $f(z)$ допускает представление

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=R} E_\alpha(z\zeta;1)\, g_{\alpha,1}(\zeta)\, d\zeta, \quad z \in \mathbb{C}, \sigma = a\sec\frac{\pi\alpha}{2}, \quad R > \sigma^{1/\alpha}, \tag{5}$$

где $E_\alpha(z;\mu)$ – функция Миттаг-Лефглера, а $g_{\alpha,\mu}(\zeta)$ – обобщенное преобразование Бореля функции $f(z)$ (см. [8], стр. 323).

Пусть теперь $\mathcal{F}$ – произвольный линейный функционал, удовлетворяющий условию $\mathcal{F}[t^n] = 0$. Из асимптотических свойств функции $E_\alpha(z;1)$ следует, что $E_\alpha(t\zeta;1) \in C_w(\mathbb{R})$ при $|\zeta| < a^{1/\alpha}$ (см. [8], стр. 134).

Следуя Б. Я. Левину рассмотрим функцию

$$\varphi(u) \overset{def}{=\!=} F[E_\alpha](ut;1) = \int_{-\infty}^{+\infty} E_\alpha(ut;1)\exp(-a|t|^\alpha)\,d\sigma(t), \tag{6}$$

которая, согласно сказанному, голоморфна в круге $|u| < a^{1/\alpha}$.

Имеем

$$\varphi^{(n)}(0) = C_n\,\mathcal{F}[t^n] = 0,$$

поэтому $\varphi(u) \equiv 0$ и следовательно

$$\mathcal{F}[E_\alpha(ut;1)] = 0, \quad |u| < a^{1/\alpha}. \tag{7}$$

Из (5) имеем

$$f(\gamma t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=R} E_\alpha(t\zeta\gamma;1)\,g_{\alpha,1}(\zeta)\,d\zeta. \tag{8}$$

Ясно, что если $|\gamma| < \left(\cos\frac{\pi\alpha}{2}\right)^{1/\alpha}$, то $f(\gamma t) \in C_w(\mathbb{R})$.

Пусть $t \in (0,+\infty)$. Если $0 < \varphi = \arg\gamma < \pi$, то $0 < \varphi = \arg(\gamma t) < \pi$ и согласно (4) можем написать, что

$$|f(\gamma t)| \le C\exp\left(a\sec\frac{\pi\alpha}{2}\cos\left(\alpha(\varphi - \frac{\pi}{2})\right)|\gamma|^\alpha|t|^\alpha\right). \tag{4''}$$

Если же $-\pi < \arg\gamma < 0$, то $-\pi < \arg(\gamma t) < 0$ и согласно (4′) имеем

$$|f(\gamma t)| \le C\exp\left(a\sec\frac{\pi\alpha}{2}\cos\left(\alpha(\varphi + \frac{\pi}{2})\right)|\gamma|^\alpha|t|^\alpha\right). \tag{4'''}$$

Пусть теперь $0 < \delta < 1$ – произвольное число, а $\nu_0 = \nu_0(\delta)$ выбрано так, что

$$\sec\frac{\pi\alpha}{2}\cos\left(\alpha(\nu_0 \pm \frac{\pi}{2})\right)\delta^\alpha < 1.$$

Тогда из (4″) и (4‴) вытекает, что для всех γ, удовлетворяющих $|\gamma| < \delta$, $|\arg\gamma| < \nu_0$ существует число $\varepsilon(\delta) > 0$ такое, что

$$|f(\gamma t)| < C\exp((a-\varepsilon)|t|^\alpha), \quad t \in (0,+\infty).$$

Такая же оценка верна и при $t \in (-\infty, 0)$.

Для таких γ существует и аналитична функция

$$\Psi(\gamma) \overset{def}{=\!=} \mathcal{F}[f(\gamma t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|t|^\alpha} f(\gamma t)\,d\sigma(t).$$

В окрестности $|\gamma| < \left(\cos\frac{\pi\alpha}{2}\right)^{1/\alpha}$ точки $\gamma = 0$ имеем

$$\Psi(\gamma) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=R} g_{\alpha,1}(\zeta)\,\mathcal{F}[E_\alpha(\zeta t\gamma;1)]\,d\zeta.$$

Следовательно, на основании (7) получаем, что $\Psi(\gamma) = 0$ в окрестности нуля. Отсюда следует, что $\Psi(\gamma) \equiv 0$ при $|\gamma| < \delta$, $|\arg\gamma| < \nu_0$. В частности, имеем $\Psi(\gamma) \equiv 0$, $\gamma < \delta$, и так как $\delta < 1$ – произвольное число, то $\Psi(\gamma) = \mathcal{F}[f(\gamma t)] = 0$, $0 \leq \gamma < 1$.

Таким образом, получаем, что $f(\gamma t) \in P_w(\mathbb{R})f \in C_w^*(\mathbb{R})$ и для произвольной функции $f \in C_w^*(\mathbb{R})$ и любого значения $0 < \gamma < 1$.

Покажем теперь, что $f \in P_w(\mathbb{R})$.

Для данного $\varepsilon > 0$ возьмем $A > 0$ настолько большим, чтобы

$$|f(t)|\exp(-a|t|^\alpha) < \varepsilon, \quad |f(\gamma t)|\exp(-a|t|^\alpha) < \varepsilon,\ 0 < \gamma < 1 \quad |t| \geq A,\ t \in L_\rho.$$

Выберем $0 < \gamma_0 < 1$ так, чтобы

$$\max_{|t|\leq A}|f(t) - f(\gamma_0 t)| < \varepsilon.$$

Так как $f(\gamma_0 t) \in P_w(\mathbb{R})$, то существует $p(t)$ такой, что $||f(\gamma_0 t) - p(t)|| < \varepsilon$. Далее имеем

$$||f(t) - p(t)|| \leq ||f(t) - f(\gamma_0 t)|| + ||f(\gamma_0 t) - p(t)|| \leq$$

$$\max_{|t|\leq A}|f(t) - f(\gamma_0 t)|\exp(-a|t|^\alpha) + \max_{|t|>A}|f(t) - f(\gamma_0 t)|\exp(-a|t|^\alpha) + \varepsilon \leq 4\varepsilon.$$

Теорема доказана.

Рассмотрим теперь весовую аппроксимацию на полуоси $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$. Классы C_w, P_w, $\mathcal{M}_w$ и функция $\widetilde{W}(z)$ определяются аналогично.

Если весовая функция нормально возрастающая, то справедлива (см. [3])

Теорема A$_1$. $P_w(\mathbb{R}^+) = C_w(\mathbb{R}^+) \Longleftrightarrow I(W, \frac{1}{2}, \mathbb{R}^+) = \infty$.

В общем случае имеет место (см. [6])

Теорема B$_1$. $P_w(\mathbb{R}^+) = C_w(\mathbb{R}^+) \Longleftrightarrow I(\widetilde{W}, \frac{1}{2}, \mathbb{R}^+) = \infty$.

Обозначим через $C_w^*(\mathbb{R}^+)$ множество целых функций половинного порядка и минимального типа, принадлежащих $C_w(\mathbb{R}^+)$. Справедлива

Теорема C_1. *Пусть $P_w(\mathbb{R}^+) \neq C_w(\mathbb{R}^+)$. Тогда $P_w(\mathbb{R}^+) \subset C^*_w(\mathbb{R}^+)$.*

Следующая теорема является аналогом Теоремы E.

Теорема 2. *Пусть $W(t)$ - целая функция с неотрицательными коэффициентами Тейлора, т. е.*

$$W(t) = \sum_{0}^{\infty} a_k t^k, \quad a_0 \geq 1, a_k \geq 0, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

для которой $I(W, \frac{1}{2}, \mathbb{R}^+) < \infty$. Тогда $P_w(\mathbb{R}^+) = C^*_w(\mathbb{R}^+)$.

Доказательство. Теоремы A_1 и B_1 обеспечивают включение $P_w(\mathbb{R}^+) \subset$

$\subset C^*_w(\mathbb{R}^+)$. Докажем обратное включение, т. е. докажем, что любую функцию $f \in C^*_w(\mathbb{R}^+)$ можно приблизить полиномами. Рассмотрим функцию

$$W_1(t) = W(t^2) = \sum_{0}^{\infty} a_k t^{2k}.$$

Пусть $f(t)$ - произвольная целая функция порядка $\frac{1}{2}$ и минимального типа из множества C^*_w. Положим $f_1(t) = f(t^2)$. Заметим, что $f_1(t)$ - целая, четная функция первого порядка и минимального типа и принадлежит пространству $C_{w_1}(\mathbb{R})$. Следовательно, по Теореме E ее можно приблизить полиномами, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует $p(t)$ такой, что

$$\frac{|f_1(t) - p(t)|}{W_1(t)} < \varepsilon, \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{+}$$

Переписав это неравенство в виде

$$\frac{|f_1(-t) - p(-t)|}{W_1(-t)} < \varepsilon, \qquad t \in \mathbb{R}$$

и учитывая четность функций f_1 и w_1, получим

$$\frac{|f_1(t) - p(-t)|}{W_1(t)} < \varepsilon, \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{-}$$

Из (+) и (-) следует, что

$$\frac{|f_1(t) - \frac{1}{2}(p(t) + p(-t))|}{W_1(t)} < \varepsilon, \qquad t \in \mathbb{R},$$

т. е. функцию $f_1(t)$ можно приблизить четными полиномами

$$\frac{|f_1(t) - Q(t^2)|}{W_1(t)} < \varepsilon, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Следовательно, вспомнив определения функций f_1 и W_1, получим

$$\frac{|f(t^2) - Q(t^2)|}{W(t^2)} < \varepsilon, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Таким образом

$$\frac{|f(t) - Q(t)|}{W(t)} < \varepsilon, \qquad t \in \mathbb{R}^+.$$

Теорема доказана.

Приведем аналог Теоремы 1 на полуоси.

Теорема 3. *Пусть* $W(t) = \exp(a\,|t|^\alpha)$, $0 < \alpha < \frac{1}{2}$. *Тогда* $P_w(\mathbb{R}^+) = C_w^\circ(\mathbb{R}^+)$.

Доказательство. Достаточно доказать, что произвольную функцию $f \in C_w^\circ(\mathbb{R}^+)$ можно аппроксимировать полиномами. Пусть $f \in C_w^\circ(\mathbb{R}^+)$. Рассмотрим функцию

$$F(z) = f(z)\exp\left(-\sec\alpha\pi\, e^{-i\alpha\pi}\, z^\alpha\right).$$

Очевидно, что $F(z)$ голоморфна в области $G = \mathbf{C} \setminus \mathbb{R}^+$ и удовлетворяет условиям

$$\lim \frac{\ln \sup\limits_{0<\theta<2\pi} |F(r e^{i\theta})|}{r^{1/2}} = 0,$$

$$\lim_{z \to \zeta \in \partial G} |F(z)| \le C.$$

Следовательно, по принципу Фрагмена–Линделефа

$$|F(z)| \le C, \quad z \in \mathbf{C} \setminus \mathbb{R}^+.$$

Принимая во внимание, что $f(z)$ – целая функция из $C_w(\mathbb{R}^+)$, получаем

$$|f(r e^{i\theta})| \le C \exp\left(a \sec(\alpha\pi)\, \cos(\alpha(\theta - \pi)\, r^\alpha\right), \quad 0 \le \theta \le 2\pi.$$

Отсюда следует, что $f(z)$ – целая функция порядка α и конечного типа $\sigma = a\sec(\alpha\pi)$. Следовательно, по теореме М. М. Джрбашяна $f(z)$ допускает представление

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=R} E_\alpha(z\zeta; 1)\, g_{\alpha,1}(\zeta)\, d\zeta, \quad z \in \mathbf{C}, \quad \sigma = a\sec(\pi\alpha), \quad R > \sigma^{1/\alpha}, \quad (5')$$

аналогичное представлению (5). Дальнейшая часть доказательства незначительно отличается от доказательства Теоремы 1, поэтому мы ее опускаем.

Рассмотрим теперь случай $\rho > 1$. Пусть $W(t) = \exp(a|t|^\alpha)$, $t \in L_\rho$, $a > 0$. Обозначим через $C_w^*(L_\rho)$ множество целых функций $f \in C_w(L_\rho)$ порядка ρ минимального типа, удовлетворяющих условиям

$$|f(z)| < A \exp\{\epsilon |z|^\rho\}, \quad z \in \Delta(\rho),$$

$$|f(z)| < A \exp\left\{\epsilon |z|^{\rho^*}\right\}, \quad z \in \Delta^*(\rho).$$

Теорема 4. *Пусть* $W(t) = \exp(a|t|^\alpha), t \in L_\rho, 0 < \alpha < \rho^* < \rho$. *Тогда* $P_w(L_\rho) = C_w^*(L_\rho)$.

Доказательство. Включение $P_w(L_\rho) \subset C_w^*(L_\rho)$ следует из сходимости интеграла $I(W, \rho^*, L_\rho)$. Докажем обратное включение. Пусть $f \in C_w^*(L_\rho)$. Применяя принцип Фрагмена-Линделефа, получим

$$|f(r\,e^{i\theta})| \le C \exp\left(a \sec\left(\frac{\pi\alpha}{2\rho}\right) \cos(\alpha\theta)\, r^\alpha\right), \quad r e^{i\theta} \in \Delta(\rho), \tag{9}$$

$$|f(r\,e^{i\theta})| \le C \exp\left(a \sec\left(\frac{\pi\,\alpha}{2\rho^*}\right) \cos(\alpha(\pi-\theta))\, r^\alpha\right), \quad r e^{i\theta} \in \Delta^*(\rho). \tag{10}$$

Отсюда следует, что целая функция $f(z)$ имеет рост (α, σ_1), $\sigma_1 = a \sec\left(\frac{\pi\alpha}{2\rho^*}\right)$ и как в предыдущей теореме, получим

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=R_1} E_\alpha(z\zeta;1)\, g_{\alpha,1}(\zeta)\, d\zeta, \quad z \in \mathbf{C},\ R_1 > \sigma_1^{1/\alpha}. \tag{11}$$

Далее, если $\mathcal{F}$ – произвольный линейный функционал такой, что $\mathcal{F}[t^n] = 0$, $n = 0, 1, \ldots$, то

$$\mathcal{F}[E_\alpha(ut;1)] = 0, \quad |u| < a^{1/\alpha}.$$

Из (11) следует, что

$$f(\gamma t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=R_1} E_\alpha(\gamma\zeta t;1)\, g_{\alpha,1}(\zeta)\, d\zeta, \quad R_1 > \sigma_1^{1/\alpha}. \tag{12}$$

Если $|\gamma| < \left(\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2\rho^*}\right)\right)^{1/\alpha}$, то $f(\gamma t) \in C_w(L_\rho)$. Используя оценки (9) и (10) покажем, что $f(\gamma t) \in C_w(L_\rho)$ для более широкого множества γ. С этой целью заметим, что если $\arg t = \frac{\pi}{2\rho}$ и $0 < \varphi = \arg\gamma < \epsilon$, то в силу оценки (10) $\gamma t \in \Delta^*(\rho)$, имеем

$$\begin{aligned} |f(\gamma t)| &= \left| f\left(|\gamma|\,|t| \exp\left(i(\varphi + \frac{\pi}{2\rho})\right)\right)\right| \le \\ &\le C \exp\left(a \sec\left(\frac{\pi\,\alpha}{2\rho^*}\right) \cos(\alpha(\pi - \frac{\pi}{2\rho} - \varphi))\, |\gamma|^\alpha\, |t|^\alpha\right) = \\ &= C \exp\left(a \sec\left(\frac{\pi\,\alpha}{2\rho^*}\right) \cos(\alpha(\frac{\pi}{2\rho^*} - \varphi))\, |\gamma|^\alpha\, |t|^\alpha\right). \end{aligned} \tag{13}$$

Пусть $0 < \delta < 1$ - произвольное число. Число $\nu_1 > 0$ выберем так, чтобы при $0 < \varphi < \nu_1$ выполнялось неравенство

$$\sec\frac{\pi\alpha}{2\rho^*}\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2\rho^*} - \alpha\varphi\right)|\delta|^\alpha < 1.$$

Тогда существует $\varepsilon_1(\delta) > 0$ такое, что для всех γ, удовлетворяющих условию $|\gamma| < \delta$, $0 < \arg\gamma < \nu_1$, из (13) получим, что

$$f(\gamma t)\exp\left(-(\theta - \varepsilon_1)|t|^\alpha\right) \to 0, \quad |t| \to +\infty, \quad \arg t = \frac{\pi}{2\rho}. \tag{14}$$

Пусть теперь $\arg t = -\frac{\pi}{2\rho}$, тогда $\gamma t \in \Delta(\rho)$ при $0 < \arg\gamma < \nu_1$, а следовательно, в силу (9), имеем

$$|f(\gamma t)| = \left|f\left(|\gamma|\,|t|\exp\left(i\left(-\frac{\pi}{2\rho} + \varphi\right)\right)\right)\right| \le$$

$$\le C\exp\left(|t|^\alpha|\gamma|^\alpha a\sec\left(\frac{\pi\alpha}{2\rho}\right)\cos\left(\alpha\left(\frac{\pi}{2\rho} - \varphi\right)\right)\right). \tag{14'}$$

Число $\nu_2 > 0$ выберем так, чтобы при $0 < \varphi < \nu_2$

$$\sec\left(\frac{\pi\alpha}{2\rho}\right)\cos\left(\alpha\left(\frac{\pi}{2\rho} - \varphi\right)\right)\delta^\alpha < 1.$$

Тогда из (14′) получим, что при $0 < \arg\gamma < \nu_2$, $|\gamma| < 1$

$$f(\gamma t)\exp\left(-(a - \varepsilon_2)|t|^\alpha\right) \to 0, \quad |t| \to +\infty, \quad \arg t = -\frac{\pi}{2\rho}.$$

Повторяя вышеприведенные рассуждения для $|\gamma| < \delta$, $\arg\gamma < 0$ заключаем, что для произвольного $0 < \delta < 1$ существует число $\varepsilon(\delta) > 0$ такое, что для всех γ, удовлетворяющих условию $|\arg\gamma| < \nu_0$, $|\gamma| < \delta$, имеет место равенство

$$\lim_{\substack{|t|\to+\infty \\ t\in L_\rho}}\left[f(\gamma t)\exp\left(-(a - \varepsilon)|t|^\alpha\right)\right] = 0.$$

Это означает, что

$$f(\gamma t) \in C_w(L_\rho), \quad |\arg\gamma| < \nu_0(\delta)$$

и что функция $\Psi(\gamma) = \mathcal{F}[f(\gamma t)]$ аналитична для таких γ.

Доказательство завершается как в Теореме 1.

Рассмотрим теперь случай $\alpha = \rho^*$. Имеем

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln W(t)}{1 + |t|^{1+\rho^*}}\,dt = +\infty \qquad (I(W, \rho^*, L_\rho) = +\infty). \tag{15}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln W(t)}{1+|t|^{1+\rho}}\,dt < +\infty \quad (I(W,\rho,L_\rho) < +\infty). \tag{16}$$

Из (16) следует, что $P_w(L_\rho) \neq C_w(L_\rho)$. Обозначим через $C_w^*(L_\rho)$ множество функций $f \in C_w(L_\rho)$, голоморфных в $\Delta(\rho)$, непрерывных в $\overline{\Delta}(\rho)$ и удовлетворяющих условию

$$|f(z)| \le C\exp\{\varepsilon|z|^\rho\}, \quad z \in \Delta(\rho). \tag{17}$$

В работе [5] доказано, что $P_w(L_\rho) \subset C_w^*(L_\rho)$. Справедлива следующая

Теорема 5. *Пусть* $W(t) = \exp(a|t|^\alpha)$, $\alpha = \rho^* < \rho$, $t \in L_\rho$. *Тогда* $P_w(L_\rho) = C_w^*(L_\rho)$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{F}$ - произвольный линейный функционал такой, что $\mathcal{F}[t^n] = 0$, $n = 0, 1, \ldots$. Тогда из (15) следует, что (см. [5])

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{t-z}\right] = 0, \quad z \in \Delta^*(\rho). \tag{18}$$

Из следующего представления ядра Коши (см. [8])

$$\exp(i\mu\alpha\pi)\,\frac{z^{1-\mu\alpha}}{z-t} = \int_0^{+\infty} \exp(-(-z)^\alpha\tau)\,E_\alpha(-t\tau^{1/\alpha};\mu)\,\tau^{\mu-1}\,d\tau,$$
$$t \in L_\rho, \quad z \in \Delta^*(\rho)$$

и из (18) мы получим, что

$$\mathcal{F}\left[E_\alpha(-ut;\mu)\right] = 0, \quad u \ge 0. \tag{19}$$

Равенство (19) означает, что для некоторой функции ограниченной вариации $\sigma(t)$, $t \in L_\rho$ имеет место тождество

$$\int_{L_\rho} E_\alpha(-ut;\mu)\exp(-a|t|^\alpha)\,d\sigma(t) = 0, \qquad u \ge 0. \tag{20}$$

Обозначим $-t = \tau$, $\sigma(t) = \sigma(-\tau) = \sigma_1(\tau)$, $\tau \in L_\alpha$ и перепишем (20) в виде

$$\int_{L_\alpha} E_\alpha(u\tau;\mu)\exp(-a|\tau|^\alpha)\,d\sigma_1(\tau) = 0, \qquad u \ge 0. \tag{21}$$

В работе [9] доказано, что из (21) следует равенство

$$\int_{L_\alpha} f(\tau)\exp(-a|\tau|^\alpha)\,d\sigma_1(\tau) = 0 \tag{22}$$

для любой функции f, голоморфной в $\Delta^*(\alpha)$, непрерывной в замкнутом угле $\overline{\Delta^*(\alpha)}$ и удовлетворяющей условию

$$f \in C_w(L_\alpha), \quad |f(z)| \leq C_f\, |h(z)|, \quad z \in \Delta^*(\alpha), \tag{23}$$

где $h(z) = \exp\left(u(z) + i\, v(z)\right)$, а $u(z)$ – гармоническая в $\Delta^*(\alpha)$ функция с граничными значениями $a\,|\tau|^\alpha$; $v(z)$ – сопряженная с $u(z)$ гармоническая функция. Легко видеть, что $u(z)$ имеет вид

$$u(r\,e^{i\nu}) = a\,r^\alpha \cos(\pi + \nu)\alpha \sec\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right), \quad |\pi + \nu| \leq \frac{\pi}{2\rho}. \tag{24}$$

Пусть теперь $f \in C^*_w(L_\rho)$. Применяя принцип Фрагмена–Линделефа, получим неравенство

$$|f(r\,e^{i\nu})| \leq C \exp\left(a \sec\left(\frac{\alpha\pi}{2\rho}\right) \cos(\alpha\nu)\, r^\alpha\right), \quad |\nu| < \frac{\pi}{2\rho}. \tag{25}$$

Рассмотрим функцию $F(z) = f(-z)$. Она определена и голоморфна в $\Delta^*(\alpha) = \Delta^*(\rho^*)$, непрерывна в $\overline{\Delta^*(\alpha)}$ и согласно (25)

$$|F(r\,e^{i\nu})| \leq C \exp\left(a \sec\left(\frac{\alpha\pi}{2\rho}\right) \cos(\alpha(\pi + \nu))\, r^\alpha\right), \quad r\,e^{i\nu} \in \Delta^*(\alpha), \; F \in C_w(L_\alpha). \tag{26}$$

Следовательно, $F(z)$ удовлетворяет условиям (23). Таким образом

$$\int_{L_\alpha} F(\tau) \exp\left(-a|\tau|^\alpha\right) d\sigma_1(\tau) = 0. \tag{27}$$

Переходя к переменной $t = -\tau$ и учитывая обозначения $\sigma_1(\tau) = \sigma(t)$, $F(\tau) = f(t)$, равенство (27) перепишем в виде

$$\int_{L_\rho} f(t) \exp\left(-a|t|^\alpha\right) d\sigma(t) = 0$$

или

$$\mathcal{F}[f(t)] = 0 \qquad \text{для произвольного} \quad f \in C^*_w(L_\rho).$$

Следовательно, $f \in P_w$. Теорема доказана.

Автор выражает искреннюю благодарность С. А. Акопяну за полезное обсуждение.

ABSTRACT. Let $w(t)$ be a weight function defined on $L_\rho = \{z : |\arg z| = \frac{\pi}{2\rho}, \rho \geq 1\}$ and let $C_w(L_\rho)$ be the class of continuous functions on L_ρ satisfying the condition $w^{-1}(t) f(t) \to 0$ as $|t| \to \infty$, $t \in L_\rho$. For $f \in C_w(L_\rho)$ we define $||f|| = \sup_{t \in L_\rho} w^{-1}(t) |f(t)|$. Let $P_w(L_\rho)$ denote the closure in $C_w(L_\rho)$ of the polynomials and let $C_w^*(L_\rho)$ denote the set of entire functions of order ρ and of minimal type, belonging to $C_w(L_\rho)$. For a weight function $w(t) = \exp\{a |t|^\alpha\}$, $0 < \alpha < \rho(2\rho - 1)^{-1}$, $t \in L_\rho$, $a > 0$ the paper proves that $P_w(L_\rho) = C_w^*(L_\rho)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. S. Bernstein, "Le probleme de l'approximation des fonctions continues sur tout l'axe reel et l'une de ses applications," Bull. Soc. Mathem de France, vol. 52, pp. 399 - 410, 1924.
2. А. Л. Шагинян, "О полноте семейства аналитических функций в комплексной области," Сообщ. Ин-та матем. и мех. АН Арм.ССР, вып. 1, 1947.
3. М. М. Джрбашян, "Некоторые вопросы теории взвешенно-полиномиальных приближений в комплексной области," Мат. сб., т. 36, №3, стр. 353 - 440, 1955.
4. С. Н. Мергелян, "Весовые приближения многочленами," Успехи мат. наук, т. 11, вып. 5(71), стр. 107 - 152, 1952.
5. И. О. Хачатрян, " О взвешенно-равномерном приближении непрерывных функций полиномами на двух лучах," Изв. АН Арм. ССР, Математика, т. 3, №4 - 5, стр. 301 - 326, 1968.
6. И. О. Хачатрян, " О взвешенно-равномерном приближении целых функций нулевой степени многочленами на действительной оси," Записки мех-мат. факультета ХГУ и Харьковского мат. общества, т. 29, №4, стр. 129 - 142, 1963.
7. M. Levinson and H. P. McKean, "Weighted trigonometrical approximation on $\mathbb{R}^1$ with application to the germ field of a stationary Gaussian noise," Acta Mathem., vol. 112, no. 1-2, pp. 99 - 143, 1964.
8. М. М. Джрбашян, Интегральные Преобразования и Представления Функций в Комплексной Области, М., Наука, 1966.
9. Н. И. Ахиезер, " О взвешенном приближении непрерывных функций многочленами на всей числовой оси," Успехи мат. наук, т. 11, вып. 4(70), стр. 3 - - 43, 1956.
10. И. О. Хачатрян, " О замыкании семейства функций типа Миттаг-Леффлера при взвешенно-равномерном приближении в комплексной области," Изв. АН Арм. ССР, Математика, т. 10, №4, стр. 373-384, 1975.

15 Августа 1993

Ереванский государственный университет