Посвящается профессору
Мхитару М. Джрбашяну
в связи с 75-летним юбилеем

О СУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЯХ, ИМЕЮЩИХ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ ГАРМОНИЧЕСКИЕ МАЖОРАНТЫ В ПОЛУПЛОСКОСТИ

А. М. Джрбашян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
том 28, №4, 1993

В работе найдена полная характеристика роста субгармонических в верхней полуплоскости функций, имеющих там неотрицательные гармонические мажоранты. Этот результат в специальном случае содержит факторизацию Неванлинны в полуплоскости. Доказаны также модификации теоремы единственности Неванлинны и теоремы типа Фрагмена-Линделефа, принадлежащей М. Хейнсу и Л. Альфорсу, в которых общепринятое условие

$$\limsup_{z \rightarrow t, \operatorname{Im} z > 0} u(z) \leq 0, \quad -\infty < t < +\infty$$

заменено условием менее ограничительным. Используемые методы дают возможность установить также теорему о весовых классах H^p в полуплоскости.

§1. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

1. Как хорошо известно, результат Неванлинны о факторизации класса N мероморфных функций ограниченного вида в единичном круге [1] (см. также [2], гл. VII) приводит к следующему полному описанию роста функций $u(z)$, субгармонических в $|z| < 1$ и имеющих там неотрицательные гармонические мажоранты :

$$\sup_{0 < r < 1} \int_0^{2\pi} u^+(r e^{i\theta}) d\theta = \liminf_{r \rightarrow 1-0} \int_0^{2\pi} u^+(r e^{i\theta}) d\theta < +\infty \quad (1.1)$$

(здесь и всюду ниже полагаем $u^+ = \max\{u, 0\}$, $u^- = u^+ - u$). В отличие от этого, задача нахождения естественного полного описания роста функций такого же

типа в полуплоскости решена лишь частично, ибо пара условий

$$\liminf_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{R} \int_0^\pi u^+(R e^{i\theta}) \sin \theta d\theta < +\infty, \quad (1.2)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u^+(x) \frac{dx}{1+x^2} < +\infty, \quad (1.3)$$

возникающих из неванлинновской факторизации в верхней полуплоскости

$G^{(+)} = \{z : \text{Im } z > 0\}$ [3], задает полное описание роста таких функций лишь в том частном случае, когда они субгармоничны в $\overline{G^{(+)}} = \{z : \text{Im } z \geq 0\}$ (см. также [4], п.п. 6.3-6.5, где $u(z)$ в некотором смысле может быть непрерывно продолжена на вещественную ось).

2. Основными результатами статьи являются нижеследующие три теоремы, которые в частности содержат полное описание роста всего класса функций, субгармонических в $G^{(+)}$ и имеющих там неотрицательные гармонические мажоранты. Кроме того, эти теоремы содержат усиления теоремы единственности Неванлинны ([2], гл. III, п. 38), а также теоремы типа Фрагмена-Линделефа, установленной М. Хейнсом и Л. Альфорсом [5], где общепринятое условие

$$\limsup_{z \rightarrow t, \text{Im } z > 0} u(z) \leq 0, \quad -\infty < t < +\infty \quad (1.4)$$

заменено условием менее ограничительным. С другой стороны, основные результаты данной статьи являются усилениями результатов [6] и [7].

Теорема 1. Пусть $S(\Omega)$ - класс субгармонических в $G^{(+)}$ функций $u(z) \neq -\infty$, удовлетворяющих условиям (1.2) и

$$\liminf_{R \rightarrow +\infty} \liminf_{y \rightarrow +0} \int_{-R}^R u^+(x + iy) \Omega(x) dx < +\infty, \quad (1.5)$$

где $\Omega(x)$ - непрерывная функция, такая, что $\Omega(x) \geq C(1+x^2)^{-1}$ ($-\infty < x < +\infty$) при некоторой постоянной $C > 0$. Тогда :

1°. $S(\Omega)$ совпадает с множеством функций, представимых в виде

$$u(z) = \iint_{G^{(+)}} \log \left| \frac{z - \zeta}{z - \bar{\zeta}} \right| d\nu(\zeta) + hy + \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mu(t)}{(x-t)^2 + y^2}, \quad z = x + iy \in G^{(+)}, \quad (1.6)$$

где $\nu(\zeta)$ - неотрицательная Борелевская мера такая, что

$$\iint_{G(+)} \frac{\operatorname{Im} \zeta}{1 + |\zeta|^2} d\nu(\zeta) < +\infty, \quad (1.7)$$

h - вещественное число, а $\mu(t)$ - функция, представимая в виде разности

$\mu(t) = \mu_+(t) - \mu_-(t)$ двух неубывающих функций, таких что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Omega(t) d\mu_+(t) < +\infty, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mu_-(t)}{1+t^2} < +\infty. \quad (1.8)$$

2°. Если представление (1.6) - (1.8) имеет место, то функции $\mu_{\pm}(t)$ могут быть найдены из соотношений

$$\mu_{\pm}(t) = \lim_{y \rightarrow +0} \int_0^t u^{\pm}(x + iy) dx, \quad -\infty < t < +\infty. \quad (1.9)$$

При таком выборе $\mu_{\pm}(t)$

$$\bigvee_a^b \mu = \bigvee_a^b \mu_+ + \bigvee_a^b \mu_-, \quad \forall [a, b] \subset (-\infty, +\infty) \quad (1.10)$$

и

$$\lim_{y \rightarrow +0} \int_a^b u^{\pm}(x + iy) g(x) dx = \int_a^b g(x) d\mu_{\pm}(x) \quad (1.11)$$

для любой функции $g(x)$ - непрерывной в $[a, b]$. Кроме того

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \lim_{y \rightarrow +0} \int_{-R}^R u^+(x + iy) \Omega(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \Omega(x) d\mu_+(x), \quad (1.12)$$

$$\lim_{y \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{+\infty} u^-(x + iy) \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mu_-(x)}{1+x^2}, \quad (1.13)$$

и справедливо соотношение

$$\lim_{y \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{+\infty} u^+(x + iy) \Omega(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \Omega(x) d\mu_+(x), \quad (1.14)$$

если $\Omega(x) = (1 + |x|)^{-\gamma}$ ($1 < \gamma \leq 2$), или $\Omega(x) = (1 + |x|)^{-\gamma}$ ($-1 < \gamma \leq 1$) и $h \leq 0$.

3°. Если справедливо представление (1.6) - (1.8), то

$$h^{\pm} = \frac{2}{\pi} \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{R} \int_0^{\pi} u^{\pm}(R e^{i\theta}) \sin \theta d\theta, \quad (1.15)$$

для любого $\theta \in (0, \pi)$

$$h \sin \theta = \limsup_{R \rightarrow +\infty} R^{-1} u(R e^{i\theta}), \quad h^+ \sin \theta = \limsup_{R \rightarrow +\infty} R^{-1} u^+(R e^{i\theta}) \quad (1.16)$$

и для любого $\theta \in (0, \pi)$, кроме, быть может, множества нулевой внешней емкости

$$h^\pm \sin \theta = \lim_{R \rightarrow +\infty} R^{-1} u^\pm(R e^{i\theta}). \quad (1.17)$$

Замечание 1. Как хорошо известно, класс функций, субгармонических в $G^{(+)}$ и имеющих там неотрицательные гармонические мажоранты, совпадает с множеством функций, представимых в виде (1.6) – (1.8), где $\Omega(x) = (1 + x^2)^{-1}$, т.е. этот класс совпадает с $S((1 + x^2)^{-1})$. Тем самым, пара условий (1.2) и (1.5) представляет из себя полное описание роста таких функций, если $\Omega(x) = (1 + x^2)^{-1}$. Кроме того, очевидно, что если $u(z)$ субгармонична в $\overline{G^{(+)}}$, то условие (1.5) с $\Omega(x) = (1 + x^2)^{-1}$ эквивалентно ограничению на вещественной оси (1.3). Далее, необходимо отметить, что соотношения (1.5) – (1.7) хорошо известны даже в наиболее общем случае когда $\Omega(x) = (1 + x^2)^{-1}$ (эти соотношения верны для h , h^+ и h^- , поскольку $u(z)$ и $u^+(z)$ имеют ту же наименьшую неотрицательную гармоническую мажоранту).

Замечание 2. Используя результаты Е. Д. Соломенцева [8], можно убедиться в том, что подмножество функций $S(1)$ ($\Omega(x) \equiv 1$), для которых $h \leq 0$, совпадает с классом субгармонических в $G^{(+)}$ функций удовлетворяющих условию

$$\sup_{y>0} \int_{-\infty}^{+\infty} u^+(x + iy) dx < +\infty. \quad (1.18)$$

Теорема 2. Пусть $u(z)$ субгармонична в $G^{(+)}$, и пусть существует последовательность $R_n \uparrow +\infty$ такая, что при любом $n \geq 1$

$$\int_0^\pi u^+(R_n e^{i\theta}) \sin \theta d\theta < +\infty \quad \text{и} \quad \liminf_{y \rightarrow +0} \int_{-R_n}^{R_n} u^+(x + iy) dx < +\infty. \quad (1.19)$$

Тогда, если при каком-либо $R_0 > 0$

$$\liminf_{R \rightarrow +\infty} \left\{ \frac{1}{R} \int_0^\pi u(R e^{i\theta}) \sin \theta d\theta + \liminf_{y \rightarrow +0} \int_{-R}^R u(x + iy) g_{R, R_0}(x) dx \right\} = -\infty, \quad (1.20)$$

где

$$g_{R, R_0}(x) = \begin{cases} 2^{-1}(x^{-2} - R^{-2}), & \text{при } R_0 \leq |x| \leq R \\ 2^{-1}(R_0^{-2} - R^{-2}), & \text{при } |x| < R_0, \end{cases}$$

то $u(z) \equiv -\infty$.

Замечание. Эта теорема является усилением теоремы единственности Неванлинны, так как рассмотренные им условия (1.1) и

$$\liminf_{R \rightarrow +\infty} R^{-1} M(R) = -\infty \quad (M(R) = \sup_{0 < \theta < \pi} u(R e^{i\theta}))$$

более ограничительны, чем условия (1.19) – (1.20).

Теорема 3. Пусть $u(z)$ субгармонична в $G^{(+)}$ и

$$\liminf_{y \rightarrow +0} \int_{-R}^R u^+(x + iy) dx = 0 \quad (1.21)$$

при любом $R > 0$. Тогда :

$$\begin{aligned} 1^\circ. \quad \lim_{R \rightarrow +\infty} R^{-1} M(R) &= \lim_{R \rightarrow +\infty} R^{-1} [M(R)]^+ = \\ &= \frac{2}{\pi} \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{R} \int_0^\pi u^+(R e^{i\theta}) \sin \theta d\theta = \beta \in [0, +\infty]. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Кроме того, если $\alpha = \sup_{\text{Im } z > 0} (\text{Im } z)^{-1} u(z)$, то

$$\alpha^+ = \sup_{\text{Im } z > 0} (\text{Im } z)^{-1} u^+(z) = \beta. \quad (1.23)$$

2°. Если $\beta = \alpha^+ < +\infty$, то для $h^+ = \beta = \alpha^+$ верны соотношения (1.15) – (1.17).

Замечание. Эта теорема является усилением теоремы типа Фрагмена – Линдлефа, установленной М. Хейнсом и Л. Альфорсом [5], так как с использованием условия (1.4), более ограничительного, чем (1.20), они, по существу, доказали те же самые утверждения.

3. Техника, использованная для доказательства Теоремы 1, применима также для установления теоремы, относящейся к некоторым весовым классам H^p в $G^{(+)}$. Вводя класс $H^p(\Omega(x) dx)$ ($0 < p < +\infty$) как множество тех функций $f(z)$, аналитических в $G^{(+)}$, для которых

$$\liminf_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{R} \int_0^\pi |f(R e^{i\theta})|^p \sin \theta d\theta < +\infty \quad (1.24)$$

и

$$\liminf_{R \rightarrow +\infty} \liminf_{y \rightarrow +0} \int_{-R}^R |f(x + iy)|^p \Omega(x) dx < +\infty, \quad (1.25)$$

легко видеть, что по Теореме 1, $H^p((1+x^2)^{-1}dx)$ очевидно совпадает с множеством тех функций $f(z)$ аналитических в $G^{(+)}$, для которых $|f(z)|^p$ имеет гармоническую мажоранту в $G^{(+)}$, т.е. этот класс совпадает с конформным переводом в $G^{(+)}$ класса H^p Харди для круга. Кроме того, в силу Замечания 2 к Теореме 1, $H^p(dx)$ совпадает с классом H^p , введенным Хилле и Тамаркиным посредством наложения условия (1.18), где $u(z) = |f(z)|^p$. В общем случае верна следующая

Теорема 4. Пусть $0 < p < +\infty$ и $\Omega(x)$ — измеримая функция такая, что почти всюду $\Omega(x) \geq C(1+x^2)^{-1}$ с некоторой постоянной $C > 0$, и ограниченная почти всюду в $(-R, R)$ при любом $R > 0$. Тогда :

1°. Класс $H^p(\Omega(x)dx)$ совпадает с подмножеством тех функций из конформного отображения класса Харди, для которых $f(x) \in L_p(\Omega(x)dx)$.

2°. Замена условия (1.24) условием

$$\liminf_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{R} \int_0^\pi \log^+ |f(Re^{i\theta})| \sin \theta d\theta = 0 \quad (1.26)$$

не меняет класса $H^p(\Omega(x)dx)$. Кроме того, если $f(z) \in H^p(\Omega(x)dx)$, то

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{R} \int_0^\pi |f(Re^{i\theta})|^p \sin \theta d\theta = 0. \quad (1.27)$$

3°. Если $\Omega(x)$ удовлетворяет дополнительному условию

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\log^+ \Omega(x)}{1+x^2} dx < +\infty, \quad (1.28)$$

то

$$H^p(\Omega(x)dx) = [\Omega(z)]^{-1/p} H^p(dx), \quad (1.29)$$

где

$$\Omega(z) = \exp \left\{ \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+tz \log \Omega(t)}{t-z} \frac{dt}{1+t^2} \right\}, \quad z \in G^{(+)}$$

В частности

$$H^p((1+|x|)^{-\gamma} dx) = (z+i)^{\gamma/p} H^p(dx), \quad -\infty < \gamma \leq 2. \quad (1.30)$$

§2. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ В ПОЛУКРУГЕ

Основным техническим инструментом, использованным в статье, является теорема о необходимых и достаточных условиях, при которых функция, субгармоническая в полукруге, большем чем $G_R^{(+)} = \{z : \text{Im } z > 0, |z| < R\}$ имеет неотрицательную гармоническую мажоранту в $G_R^{(+)}$. Прежде чем доказать теорему, устанавливающую эти условия, рассмотрим функцию

$$\omega_\rho(\zeta, z) = \frac{\left(\frac{R_\rho + \zeta - i\rho}{R_\rho - \zeta + i\rho}\right)^{\pi/\alpha} - \left(\frac{R_\rho + z - i\rho}{R_\rho - z + i\rho}\right)^{\pi/\alpha}}{\left(\frac{R_\rho + \zeta - i\rho}{R_\rho - \zeta + i\rho}\right)^{\pi/\alpha} - \left(\frac{R_\rho + \bar{z} + i\rho}{R_\rho - \bar{z} - i\rho}\right)^{\pi/\alpha}},$$

где $0 \leq \rho < R$, $R_\rho = \sqrt{R^2 - \rho^2}$ и $\alpha = \arccos(\rho/R)$, и докажем некоторые вспомогательные леммы. Легко видеть, что $\omega_\rho(\zeta, z)$ задает конформное, взаимнооднозначное отображение кругового сегмента $G_{R,\rho}^{(+)} = \{\zeta : \text{Im } \zeta > \rho, |\zeta| < R\}$ на единичный круг, и $\omega_\rho(z, z) = 0$. Поэтому, функцией Грина $G_{R,\rho}^{(+)}$ является $g_{R,\rho}(\zeta, z) = -\log |\omega_\rho(\zeta, z)|$, $z, \zeta \in G_{R,\rho}^{(+)}$. Если $u(z)$ — функция, субгармоническая в полукруге $G_{R^*}^{(+)}$ ($R^* > R$), то по теореме Рисса

$$u(z) = - \iint_{G_{R,\rho}^{(+)}} g_{R,\rho}(\zeta, z) d\nu(\zeta) + \int_\beta^{\pi-\beta} u(Re^{i\theta}) \varphi_{R,\rho}(\theta, z) d\theta + \int_{-R_\rho}^{R_\rho} u(t + i\rho) \psi_{R,\rho}(t, \zeta) dt, \quad z \in G_{R,\rho}^{(+)}, \quad (2.1)$$

где $\nu(\zeta)$ — неотрицательная борелевская мера в $G_{R^*}^{(+)}$, конечная в любой области D , компактно содержащейся в $G_{R^*}^{(+)}$, а $\varphi_{R,\rho}, \psi_{R,\rho}$ — представления ядра Пуассона $G_{R,\rho}^{(+)}$ записанные для дуги $\{\zeta = Re^{i\theta} : \beta < \theta < \pi - \beta\}$ ($\beta = \arcsin(\rho/R) = \pi/2 - \alpha$) и для интервала $\{\zeta = t + i\rho : -R_\rho < t < R_\rho\}$. Пользуясь известной формулой

$$\frac{\partial g_{R,\rho}(\zeta, z)}{\partial n} |d\zeta| = \frac{1}{i} \left[\frac{\partial}{\partial \zeta} \omega_\rho(\zeta, z) \right] \frac{d\zeta}{\omega_\rho(\zeta, z)},$$

где ∂n — операция дифференцирования вдоль внутренней нормали, легко вычислить.

$$\varphi_{R,\rho}(\theta, z) = \frac{2i}{\alpha} R_\rho R e^{i\theta} [R_\rho^2 - (R e^{i\theta} - i\rho)^2]^{\pi/\alpha - 1} \left\{ \text{Im} \left(\frac{R_\rho + z - i\rho}{R_\rho - z + i\rho} \right)^{\pi/\alpha} \right\} \times$$

$$\times \left\{ (R_\rho + R e^{i\theta} - i\rho)^{\pi/\alpha} - (R_\rho - R e^{i\theta} + i\rho)^{\pi/\alpha} \left(\frac{R_\rho + z - i\rho}{R_\rho - z + i\rho} \right)^{\pi/\alpha} \right\}^{-1} \times$$

$$\times \left\{ (R_\rho + R e^{i\theta} - i\rho)^{\pi/\alpha} - (R_\rho - R e^{i\theta} + i\rho)^{\pi/\alpha} \left(\frac{R_\rho + \bar{z} + i\rho}{R_\rho - \bar{z} - i\rho} \right)^{\pi/\alpha} \right\}^{-1}, \quad (2.2)$$

$$\psi_{R,\rho}(t, z) = \frac{2}{\alpha} R_\rho (R_\rho^2 - t^2)^{\pi/\alpha - 1} \left\{ \operatorname{Im} \left(\frac{R_\rho + z - i\rho}{R_\rho - z + i\rho} \right)^{\pi/\alpha} \right\} \times$$

$$\times \left| (R_\rho + t)^{\pi/\alpha} - (R_\rho - t)^{\pi/\alpha} \left(\frac{R_\rho + z - i\rho}{R_\rho - z + i\rho} \right)^{\pi/\alpha} \right|^{-2}$$

и установить, что $\varphi_{R,\rho}(\theta, z) \geq 0$ ($\beta \leq \theta \leq \pi - \beta$) и $\psi_{R,\rho}(t, z) \geq 0$ ($-R_\rho \leq t \leq R_\rho$).

В нижеследующих двух леммах выявлено поведение этих функций при $\rho \rightarrow +0$.

Лемма 2.1. Если $R > 0$ и $z \in G_R^{(+)}$ — фиксированные числа и $\rho \geq 0$ достаточно

малю, то

$$C_1 \leq \left(\sin \frac{\pi(\theta - \beta)}{\pi - 2\beta} \right)^{1 - \pi/\alpha} \varphi_{R,\rho}(\theta, z) \leq C_2, \quad \beta \leq \theta \leq \pi - \beta, \quad (2.3)$$

где $C_{1,2} > 0$ — постоянные, зависящие только от z и R . Кроме того

$$\lim_{\rho \rightarrow +0} \varphi_{R,\rho}(\theta, z) = \frac{2 \operatorname{Im} z}{\pi} \frac{R(R^2 - |z|^2) \sin \theta}{|R e^{i\theta} - z|^2 |R e^{-i\theta} - z|^2} \equiv \varphi_R(\theta, z) \quad (2.4)$$

равномерно внутри $(0, \pi)$.

Доказательство. Сначала докажем неравенства (2.3) в случае, когда θ достаточно близко к концам $[\beta, \pi - \beta]$. Затем докажем соотношение (2.4). Далее, оценивая $\varphi_R(\theta, z)$, распространим неравенства (2.3) на все $\theta \in [\beta, \pi - \beta]$. Начнем с очевидного соотношения

$$\lim_{\rho \rightarrow +0} \arg \left(\frac{R_\rho + z - i\rho}{R_\rho - z + i\rho} \right) = \arctan \frac{2Ry}{R^2 - |z|^2} \equiv \eta \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right), \quad y = \operatorname{Im} z,$$

используя которое можно проверить, что для достаточно малых $\rho > 0$

$$\lambda \frac{4R^2}{\pi} \left(\frac{y}{5R} \right)^3 < \left| \frac{2i}{\alpha} R_\rho R e^{i\theta} \operatorname{Im} \left(\frac{R_\rho + z - i\rho}{R_\rho - z + i\rho} \right)^{\pi/\alpha} \right| < \frac{6R^2}{\pi} \left(\frac{5R}{y} \right)^3, \quad (2.5)$$

где $\lambda = \sin \eta$, при $0 < \eta \leq \pi/4$, и $\lambda = \sin(\pi/2 - \eta)$, при $\pi/4 < \eta < \pi/2$. Для оценки

знаменателя в (2.2) сначала заметим, что

$$|R_\rho + R e^{i\theta} - i\rho|^{\pi/\alpha} + |R_\rho - R e^{i\theta} + i\rho|^{\pi/\alpha} \left| \frac{R_\rho + z - i\rho}{R_\rho - z + i\rho} \right|^{\pi/\alpha} < \left(\frac{5R}{2} \right)^3 \left[1 + \left(\frac{5R}{y} \right)^3 \right]$$

для достаточно малых $\rho > 0$. Далее заметим, что

$$\begin{aligned} & |R_\rho + R e^{i\theta} - i\rho|^{\pi/\alpha} - |R_\rho - R e^{i\theta} + i\rho|^{\pi/\alpha} \left| \frac{R_\rho + z - i\rho}{R_\rho - z + i\rho} \right|^{\pi/\alpha} \geq \\ & \geq |R_\rho + R \cos \delta|^{\pi/\alpha} - \left(4R \sin \frac{\delta}{2} \right)^2 \left(\frac{5R}{y} \right)^3 > R^2 \end{aligned}$$

для достаточно малых $\rho, \delta > 0$ ($\delta > \beta$) и любых $\theta \in [\beta, \delta]$. Теперь, используя (2.5) два последних неравенства (где оцененные величины являются четными функциями от $\theta - \pi/2$), получим, что для достаточно малых $\rho, \delta > 0$ ($\delta > \beta$) и любых $\theta \in [\beta, \delta] \cup [\pi - \delta, \pi - \beta]$

$$a_1 \leq |R_\rho^2 - (R e^{i\theta} - i\rho)^2|^{1-\pi/\alpha} \varphi_{R,\rho}(\theta, z) \leq a_2,$$

где $a_{1,2} > 0$ — постоянные, зависящие только от z и R .

Поскольку $|R_\rho^2 - (R e^{i\theta} - i\rho)^2| = 2R^2 \sin[(\theta - \beta)/2] \sin[(\pi - \beta - \theta)/2]$, заключаем, что оценки (2.3) верны для достаточно малых $\rho, \delta > 0$ ($\delta > \beta$) и любых $\theta \in [\beta, \delta] \cup [\pi - \delta, \pi - \beta]$. Заметим, что (2.4) легко вывести для любого $\theta \in (0, \pi)$. Чтобы убедиться, что это соотношение имеет место равномерно в $[\delta, \pi - \delta]$ при любом $\delta \in (0, \pi/2)$, достаточно показать, что пределы числителя и знаменателя $\varphi_{R,\rho}(\theta, z)$ равномерно отделены от нуля. Наконец, из (2.4) следует, что при любых $\theta \in [\delta, \pi - \delta]$ ($0 < \delta < \pi/2$) имеем $0 < a_1^* \leq \varphi_R(\theta, z) \leq a_2^* < +\infty$, где постоянная a_1^* зависит только от z, R и δ , а постоянная a_2^* — только от z и R . Используя равномерность (2.4) и оценки (2.3) (которые пока что доказаны для $\theta \in [\beta, \delta] \cup [\pi - \delta, \pi - \beta]$), получаем, что эти оценки верны при любых $\theta \in [\beta, \pi - \beta]$.

Лемма 2.2. Пусть $l, z \in G_R^{(+)}$ — фиксированные числа и $\rho \geq 0$ достаточно

$$|R_\rho|^{-\pi/\alpha} \psi_{R,\rho}(l, z) \leq C_2^*, \quad -R_\rho \leq l \leq R_\rho, \quad (2.6)$$

зависящие только от z и R . Кроме того

$$\begin{aligned} & \frac{y}{\pi} \left\{ \frac{1}{|l - z|^2} - \frac{R^2}{|R^2 - lz|^2} \right\} = \\ & \frac{(R^2 - l^2)(R^2 - |z|^2)}{|l - z|^2 |R^2 - lz|^2} \equiv \psi_R(l, z), \quad y = \text{Im } z \end{aligned} \quad (2.7)$$

аналогично доказательству предыдущей леммы.

Теорема 2.1. Пусть функция $u(z) \not\equiv -\infty$ субгармонична в полукруге $G_{R^*}^{(+)}$ ($0 < R^* \leq +\infty$). Тогда $u(z)$ имеет неотрицательную гармоническую мажоранту в $G_R^{(+)}$ ($0 < R < R^*$) в том и только в том случае, если удовлетворены следующие условия :

$$\int_0^\pi u^+(R e^{i\theta}) \sin \theta d\theta < +\infty, \quad (2.8)$$

$$\liminf_{y \rightarrow +0} \int_{-R_y}^{R_y} (R_y^2 - x^2)^{\alpha-1} u^+(x + iy) dx < +\infty, \quad (2.9)$$

где $R_y = \sqrt{R^2 - y^2}$ и $\alpha = \arccos(y/R)$. Если эти условия удовлетворены, то

$$\begin{aligned} u(z) = & \iint_{G_R^{(+)}} \log \left| \frac{z - \zeta}{z - \bar{\zeta}} \frac{R^2 - \zeta z}{R^2 - \bar{\zeta} z} \right| d\nu(\zeta) + \\ & + \frac{2y}{\pi} R(R^2 - |z|^2) \int_0^\pi \frac{u(R e^{i\theta}) \sin \theta}{|R e^{i\theta} - z|^2 |R e^{-i\theta} - z|^2} d\theta + \\ & + \frac{y}{\pi} \int_{-R}^R \left\{ \frac{1}{|t - z|^2} - \frac{R^2}{|R^2 - tz|^2} \right\} d\mu(t), \quad z = x + iy \in G_R^{(+)}, \end{aligned} \quad (2.10)$$

где $\nu(\zeta)$ - неотрицательная борелевская мера в $G_{R^*}^{(+)}$ такая, что

$$\iint_{G_R^{(+)}} (R - |\zeta|) \operatorname{Im} \zeta d\nu(\zeta) < +\infty, \quad (2.11)$$

а $\mu(t)$ - функция представляемая в виде разности $\mu(t) = \mu_+(t) - \mu_-(t)$ двух неубывающих функций таких, что

$$\int_{-R}^R (R^2 - t^2) d\mu_\pm(t) < +\infty. \quad (2.12)$$

Функции $\mu_\pm(t)$ могут быть определены из соотношений

$$\mu_\pm(t) = \lim_{y \rightarrow +0} \int_0^t u^\pm(x + iy) dx, \quad -R < t < R. \quad (2.13)$$

При таком выборе $\mu_\pm(t)$ имеем

$$\bigvee_a^b \mu = \bigvee_a^b \mu_+ + \bigvee_a^b \mu_-, \quad \forall [a, b] \subset (-R, R) \quad (2.14)$$

и

$$\lim_{y \rightarrow +0} \int_a^b u^\pm(x + iy) g(x) dx = \int_a^b g(x) d\mu_\pm(x) \quad (2.15)$$

для любой функции $g(x)$, непрерывной в $[a, b]$. Кроме того

$$\int_0^\pi |u(R_0 e^{i\theta})| \sin \theta d\theta < +\infty \quad (2.16)$$

для любого R_0 ($0 < R_0 \leq R$).

Доказательство. Выберем $0 < y_0 < R$ так, что $u(iy_0) \neq -\infty$, затем возьмем $z = iy_0$ и предположим, что $\rho > 0$ в формуле (2.1) достаточно мало, чтобы обеспечить справедливость оценок (2.3) и (2.6). Тогда, применяя эти оценки, получим

$$\begin{aligned} & \iint_{G_{R,\rho}^{(+)}} g_{R,\rho}(\zeta, z) d\nu(\zeta) + C_1 \int_{\beta}^{\pi-\beta} u^-(R e^{i\theta}) \left(\sin \frac{\pi(\theta-\beta)}{\pi-2\beta} \right)^{\pi/\alpha-1} d\theta + \\ & + C_1^* \int_{-R\rho}^{R\rho} (R_\rho^2 - t^2)^{\pi/\alpha-1} u^-(t + i\rho) dt \leq u^-(iy_0) + \\ & + C_2 \int_{\beta}^{\pi-\beta} u^+(R e^{i\theta}) \left(\sin \frac{\pi(\theta-\beta)}{\pi-2\beta} \right)^{\pi/\alpha-1} d\theta + C_2^* \int_{-R\rho}^{R\rho} (R_\rho^2 - t^2)^{\pi/\alpha-1} u^+(t + i\rho) dt. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Далее, предполагая, что $\lambda_m \downarrow 0$ какая-либо последовательность такая, что последний интеграл равномерно ограничен для $\rho = \lambda_m$ ($m \geq 1$), заключаем, что правая часть (2.17) равномерно ограничена для таких ρ . Таким образом

$$\begin{aligned} & \sup_{m \geq 1} \iint_{G_{R,\lambda_m}^{(+)}} g_{R,\lambda_m}(\zeta, iy_0) d\nu(\zeta) < +\infty, \\ & \sup_{m \geq 1} \int_{\beta_m}^{\pi-\beta_m} u^-(R e^{i\theta}) \left(\sin \frac{\pi(\theta-\beta_m)}{\pi-2\beta_m} \right)^{\pi/\alpha_m-1} d\theta < +\infty, \\ & \sup_{m \geq 1} \int_{-R_{\lambda_m}}^{R_{\lambda_m}} (R_{\lambda_m}^2 - t^2)^{\pi/\alpha_m-1} u^\pm(t + i\lambda_m) dt < +\infty, \end{aligned} \quad (2.18)$$

где $\alpha_m = \arccos(\lambda_m/R)$, $\beta_m = \pi/2 - \alpha_m$ и $R_{\lambda_m} = \sqrt{R^2 - \lambda_m^2}$. Нетрудно проверить, что первое из этих соотношений вытекает из (2.11), а второе, вместе с (2.8), дает (2.16) для $K_0 = R$. Пусть теперь $\delta_n > 0$ ($0 < \delta_n < R$) — любая последовательность.

Тогда, согласно (2.18), убывающие функции

$$\mu_m^{\pm} = \int_0^l u^\pm(x + i\lambda_m) dx$$

равномерно ограничены в любом отрезке $[-(R - \delta_n), (R - \delta_n)]$ ($n \geq 1$), если только $m \geq N(n) \geq 1$. Следовательно, по теореме Хелли, существует подпоследовательность $\{\lambda_m^{(n)}\} \subseteq \{\lambda_m\}$ такая, что соотношения (2.13) верны, когда $l \in [-(R - \delta_n), (R - \delta_n)]$ и $y = \lambda_m^{(n)} \downarrow 0$. Поэтому соотношения (2.13) верны для

любого $t \in (-R, R)$, если y принимает значения из диагональной последовательности $\{\rho_n\} = \{\lambda_n^{(n)}\}$. Одновременно, по теореме Хелли о предельном переходе под знаком интеграла, соотношения (2.15) справедливы при $y = \rho_n \downarrow 0$. Отсюда следует (2.14). Введем теперь неубывающие функции

$$\Lambda_n^{(\pm)}(t) = \int_0^t (R_{\rho_n}^2 - x^2)^{\pi/\alpha_n - 1} d\mu_n^{(\pm)}(x), \quad -R_{\rho_n} \leq t \leq R_{\rho_n} \quad (2.19)$$

и положим $\Lambda_n^{(\pm)}(t) = \Lambda_n^{(\pm)}(R_{\rho_n})$ ($R_{\rho_n} < t \leq R$), $\Lambda_n^{(\pm)}(t) = \Lambda_n^{(\pm)}(-R_{\rho_n})$ ($-R \leq t < -R_{\rho_n}$). Тогда, согласно (2.18), эти функции равномерно ограничены в $[-R, R]$. Следовательно, по теореме Хелли, существует подпоследовательность из $\{\rho_n\}$ (которую для удобства изложения будем обозначать снова через $\{\rho_n\}$) такая, что $\Lambda_n^{(\pm)}(t) \rightarrow \Lambda_{\pm}(t)$ ($-R \leq t \leq R$) при $n \rightarrow \infty$, где $\Lambda_{\pm}(t)$ — неубывающие, ограниченные функции. Ясно, что

$$\Lambda_{\pm}(t) = \int_0^t (R^2 - x^2) d\mu_{\pm}(x), \quad -R \leq t \leq R, \quad (2.20)$$

и, тем самым, справедливы соотношения (2.12). С другой стороны, по другой теореме Хелли, для мер $d\Lambda_n^{(\pm)}(t)$ соотношения (2.15) справедливы в любом отрезке $[a, b] \subseteq [-R, R]$. Поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bigvee_a^b \Lambda_n^{(\pm)} = \bigvee_a^b \Lambda_{\pm}, \quad (2.21)$$

и, поскольку функция $\psi_R(t, z)/(R^2 - t^2)$ непрерывна в $[-R, R]$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{\psi_R(t, z)}{R^2 - t^2} d\Lambda_n^{(\pm)}(t) = \int_{-R}^R \frac{\psi_R(t, z)}{R^2 - t^2} d\Lambda_{(\pm)}(t). \quad (2.22)$$

Пусть

$$\int_{-R}^R \frac{\psi_{R, \rho_n}(t, z)}{(R_{\rho_n}^2 - t^2)^{\pi/\alpha_n - 1}} d\Lambda_n^{(\pm)}(t) = \int_{-R}^R \frac{\psi_R(t, z)}{R^2 - t^2} d\Lambda_n^{(\pm)}(t) + Q_n^{(\pm)}. \quad (2.23)$$

Тогда

$$\begin{aligned} |Q_n^{(\pm)}| &\leq \int_{R-\delta < |t| < R} \left[\frac{\psi_{R, \rho_n}(t, z)}{(R_{\rho_n}^2 - t^2)^{\pi/\alpha_n - 1}} + \frac{\psi_R(t, z)}{R^2 - t^2} \right] d\Lambda_n^{(\pm)}(t) + \\ &+ \int_{-(R-\delta)}^{(R-\delta)} \left| \frac{\psi_{R, \rho_n}(t, z)}{(R_{\rho_n}^2 - t^2)^{\pi/\alpha_n - 1}} - \frac{\psi_R(t, z)}{R^2 - t^2} \right| d\Lambda_n^{(\pm)}(t) \equiv J_n' + J_n'' \quad (2.24) \end{aligned}$$

для любого δ ($0 < \delta < R$). Полагая, что $\varepsilon > 0$ произвольно, выберем $\delta > 0$ так, чтобы

$$\left(\bigvee_{-R}^{-(R-\delta)} + \bigvee_{R-\delta}^R \right) \Lambda_{\pm} < \frac{\varepsilon}{8C_2^*},$$

где C_2^* — постоянная из оценки (2.6). Тогда, согласно (2.21)

$$\left(\bigvee_{-R}^{-(R-\delta)} + \bigvee_{R-\delta}^R \right) \Lambda_{\pm} < \frac{\varepsilon}{4C_2^*},$$

если только $n \geq 1$ достаточно велико. Поэтому, $J'_n < \varepsilon/2$ по (2.6). С другой стороны, из (2.7) следует, что подинтегральная функция J''_n стремится к нулю равномерно в $[-(R-\delta), (R-\delta)]$, когда $n \rightarrow \infty$. Следовательно, по (2.21), $J''_n < \varepsilon/2$ для достаточно больших $n \geq 1$ и, применяя соотношения (2.19) — (2.24) получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-R_{\rho_n}}^{R_{\rho_n}} u^{\pm}(t + i\rho_n) \psi_{R, \rho_n}(t, z) dt = \int_{-R}^R \psi_R(t, z) d\mu_{\pm}(t). \quad (2.25)$$

Далее, как следует из (2.3), $0 \leq \varphi_{R, \rho}(\theta, z) \leq C_2 \sin \theta$ для достаточно малых $\rho > 0$. Поэтому используя соотношение (2.16) (доказанное пока для $R_0 = R$), получаем

$$\lim_{\rho \rightarrow +0} \int_{\beta}^{\pi-\beta} u^{\pm}(R e^{i\theta}) \varphi_{R, \rho}(\theta, z) d\theta = \frac{2y}{\pi} R(R^2 - |z|^2) \int_0^{\pi} \frac{u^{\pm}(R e^{i\theta}) \sin \theta}{|R e^{i\theta} - z|^2 |R e^{-i\theta} - z|^2} d\theta. \quad (2.26)$$

Для следующего перехода к пределу заметим, что функция $\Phi(z) = g_R(\zeta, z) - g_{R, \rho}(\zeta, z)$ гармонична в замыкании $G_{R, \rho}^{(+)}$, каково бы ни было $\zeta \in G_{R, \rho}^{(+)}$. Кроме того, $\Phi(R e^{i\theta}) = 0$ ($\beta \leq \theta \leq \pi - \beta$) и $\Phi(t + i\rho) = g_R(\zeta, t + i\rho) > 0$ ($-R_{\rho} < t < R_{\rho}$). Поэтому $\Phi(z) > 0$ в $G_{R, \rho}^{(+)}$, и $g_R(\zeta, z) > g_{R, \rho}(\zeta, z)$ при любых $z, \zeta \in G_{R, \rho}^{(+)}$. Легко доказать, что условие (2.11) достаточно для сходимости интеграла

$$\iint_{G_R^{(+)}} g_R(\zeta, z) d\nu(\zeta) \equiv \iint_{G_R^{(+)}} \log \left| \frac{z - \zeta}{z - \bar{\zeta}} \frac{R^2 - \zeta z}{R^2 - \bar{\zeta} z} \right| d\nu(\zeta).$$

Используя это, можно показать, что

$$\lim_{\rho \rightarrow +0} \iint_{G_{R, \rho}^{(+)}} g_{R, \rho}(\zeta, z) d\nu(\zeta) = \iint_{G_R^{(+)}} g_R(\zeta, z) d\nu(\zeta). \quad (2.27)$$

Соотношения (2.25) — (2.27) позволяют совершить предельный переход $\rho = \rho_n \downarrow 0$ в формуле (2.1) и получить таким образом представление (2.10) — (2.12). С другой стороны, такое представление необходимо и достаточно для существования

неотрицательной гармонической мажоранты $u(z)$ в $G_R^{(+)}$, ибо оно легко может быть получено из аналогичного представления функций такого же типа в единичном круге посредством конформного отображения. Таким образом, $u(z)$ имеет неотрицательную гармоническую мажоранту в $G_R^{(+)}$, и, поскольку $u(z)$ имеет ту же мажоранту в в любом полукруге $G_{R_0}^{(+)}$ ($0 < R_0 < R$), соотношение (2.16) справедливо для любого R_0 ($0 < R_0 \leq R$). Наконец, соотношения (2.13) и (2.15) без индексов ($\pm$) легко проверить пользуясь непосредственно представлением (2.10). Однако, $u^+(z)$ тоже субгармоническая функция, имеющая ту же неотрицательную гармоническую мажоранту. Отсюда вытекают соотношения (2.13) и (2.15) с индексом (+), тем самым они верны автоматически и с индексом (-).

§3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ 1 — 4

Доказательство Теоремы 1. Пусть $u(z) \not\equiv -\infty$ — функция из $S(\Omega)$, и пусть $R_k \uparrow \infty$ — последовательность, на которой достигается нижний предел (1.2). Тогда условия Теоремы 2.1 удовлетворены при любом $R = R_k$. Тем самым, представление (2.10) справедливо при любом $R = R_k$, и если отнять из (2.10) то же самое представление, записанное для меньшего полукруга $G_{R_0}^{(+)}$ ($0 < R_0 < R$), подставить $z = iy$, разделить полученное равенство на $2y$ и устремить $y \rightarrow +0$, то получим следующую формулу типа Карлемана :

$$\begin{aligned} & \int_{G_R^{(+)} \setminus G_{R_0}^{(+)}} \left(\frac{1}{|\zeta|^2} - \frac{1}{R^2} \right) \operatorname{Im} \zeta d\nu(\zeta) + \left(\frac{1}{R_0^2} - \frac{1}{R^2} \right) \iint_{G_{R_0}^{(+)}} \operatorname{Im} \zeta d\nu(\zeta) = \\ & = \frac{1}{\pi R} \int_0^\pi u(R e^{i\theta}) \sin \theta d\theta + \int_{R_0 + 0 < |t| < R} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{R^2} \right) d\mu(t) + \\ & + \left(\frac{1}{R_0^2} - \frac{1}{R^2} \right) \int_{-R_0}^{R_0} d\mu(t) - \frac{1}{\pi R_0} \int_0^\pi u(R_0 e^{i\theta}) \sin \theta d\theta. \end{aligned} \quad (3.1)$$

При $R = R_k \rightarrow +\infty$ правая сторона этой формулы ограничена сверху, как это следует из (1.2), (2.16) и из соотношения

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Omega(x) d\mu_+(x) = \liminf_{R \rightarrow +\infty} \liminf_{y \rightarrow +0} \int_{-R}^R u^+(x + iy) \Omega(x) dx < +\infty, \quad (3.2)$$

являющегося следствием (1.5) и (2.15). Поэтому, левая сторона (3.1) тоже ограничена. Используя это, приходим к соотношению (1.7). Доказательство сходимости

второго интеграла (1.8), а также доказательство справедливости представлений (1.6) аналогичны доказательствам соответствующих утверждений теоремы Неванлинны [3] (см., также [4], п.п. 6.3-6.5). Предположим теперь, что $u(z)$ — функция, представимая в виде (1.6) — (1.8). Тогда очевидно, что

$$u^+(z) \leq h^+ y + \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mu_+(t)}{(x-t)^2 + y^2} \equiv U(z), \quad z = x - iy \in G^{(+)}$$

Отсюда следует (1.2). Далее, легко показать, что для любого $R > 0$ существует постоянная $C > 0$, такая что

$$\frac{y}{\pi} \int_{-R}^R \frac{\Omega(x) dx}{(x-t)^2 + y^2} \leq \frac{C}{1+t^2}, \quad 0 < y < 1, \quad -\infty < t < +\infty.$$

Применяя теорему Лебега об ограниченной сходимости, откуда мы получаем соотношение (1.12) для $U(z)$. Тем самым, выполнено условие (1.5), и $u(z) \in S(\Omega)$. Следовательно, меры $\mu_{\pm}(t)$ могут быть определены из соотношений (1.9) — (1.10), (1.11) вытекают из (2.14), (2.15) Теоремы 2.1. Далее, имеем

$$\limsup_{R \rightarrow +\infty} \limsup_{y \rightarrow +0} \int_{-R}^R u^+(x+iy) \Omega(x) dx \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \Omega(x) d\mu_+(x),$$

так как (1.2) верно для $U(z)$. Это неравенство, вместе с (3.2) даст (1.12). С другой стороны, можно показать, что если $0 < y < M < +\infty$ и $-1 < \gamma \leq 1$ — любые заданные числа, то существует постоянная $C > 0$, зависящая только от M и γ такая, что

$$\frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x-t)^2 + y^2} \frac{dx}{(1+|x|)^{\gamma}} \leq \frac{C}{(1+|t|)^{\gamma}}, \quad -\infty < t < +\infty.$$

Поэтому, если $\Omega(t) = (1+|t|)^{-\gamma}$ ($1 < \gamma \leq 2$) или $\Omega(t) = (1+|t|)^{-\gamma}$ ($-1 < \gamma \leq 1$) и $h \leq 0$, то используя теорему Лебега, получаем

$$\limsup_{y \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{+\infty} u^+(x+iy) \Omega(x) dx \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \Omega(x) d\mu_+(x).$$

Однако, обратное неравенство верно для нижнего предела, как это следует из (3.2). Следовательно, справедливо соотношение (1.14). Для доказательства (1.13) заметим, что функция

$$\iint_{G^{(+)}} \log \left| \frac{z-\zeta}{z-\bar{\zeta}} \right| d\nu(\zeta) - u(z)$$

принадлежит $S((1+|x|)^{-2})$. Поэтому для нее справедливо соотношение (1.14) с $\Omega(x) = (1+|x|)^{-2}$. Используя это соотношение, мы приходим к (1.13).

Замечание. Использование рассуждений, примененных в доказательстве Теоремы 1 дает возможность установить, что класс $S(\Omega_1, \Omega_2)$ субгармонических в $G^{(+)}$ функций, удовлетворяющих условию (1.2), условию (1.5) с $\Omega \equiv \Omega_1$, а также условию

$$\liminf_{R \rightarrow +\infty} \liminf_{y \rightarrow +0} \int_{-R}^R u^-(x + iy) \Omega_2(x) dx < +\infty,$$

где $\Omega_{1,2}(x)$ непрерывны и таковы, что $\Omega_{1,2} \geq C_{1,2}(1+x^2)^{-1}$ при некоторых $C_{1,2} > 0$, совпадает с множеством функций представимых в виде (1.6) - (1.7), где функции $\mu_{\pm}(l)$ удовлетворяют условиям

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Omega_1(x) d\mu_+(x) < +\infty, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \Omega_2(x) d\mu_-(x) < +\infty.$$

Кроме того, пользуясь результатами Е. Д. Соломенцева [8], можно убедиться в том, что подмножество $S(1, 1)$ ($\Omega_1 \equiv \Omega_2 \equiv 1$), для которого $n = 0$ и

$$\iint_{G^{(+)}} \ln \zeta d\nu(\zeta) < +\infty$$

совпадает с классом тех функций $u(z)$, субгармонических в $G^{(+)}$, которые подчинены условию

$$\sup_{y > 0} \int_{-\infty}^{+\infty} |u(x + iy)| dx < +\infty.$$

Доказательство Теоремы 2. Предполагая, что $u(z) \not\equiv -\infty$, заметим, что условия Теоремы 2.1 удовлетворены при любом $R = R_0$. Поэтому, очевидно, они удовлетворены при любом $R > 0$, и кроме того, если $\mu_{\pm}(l)$ определены из соотношений (2.13), то формулы (2.15), (2.10) - (2.12) и (3.1) справедливы при любых R, R_0 ($0 < R_0 < R < +\infty$). Пользуясь (3.1) и (2.15), получаем

$$\frac{1}{R_0} \int_0^\pi u(R_0 e^{i\theta}) \sin \theta d\theta \leq \frac{1}{R} \int_0^\pi u(R e^{i\theta}) \sin \theta d\theta + \lim_{y \rightarrow +0} \int_{-R}^R g_{R,R_0}(x) u(x + iy) dx,$$

где интеграл слева абсолютно сходится согласно (2.16). Тем самым, предположение $u(z) \not\equiv -\infty$ противоречит условию (1.20).

Доказательство Теоремы 3. 1°. Пусть $\limsup R^{-1} M(R) = +\infty$ при $R \rightarrow +\infty$. В этом случае для любого $K > 0$ можно найти $z = x + iy \in G^{(+)}$ такое, что $u(z) > K|z| \geq Ky$. Отсюда следует, что $\alpha = \alpha^+ = +\infty$. Если одновременно

имеем $\liminf R^{-1}M(R) < +\infty$ при $R \rightarrow +\infty$, то согласно Теореме 1, $u(z)$ допускает представление вида (1.6) – (1.8), где $\mu_+(t) \equiv 0$. Таким образом, $u(z)$ удовлетворяет условию (1.4), и, по теореме М. Хейнса и Л. Альфорса, существует $\lim R^{-1}M(R)$ при $R \rightarrow +\infty$. Мы, очевидно, пришли к противоречию. Поэтому, если при $R \rightarrow +\infty$ имеем $\limsup R^{-1}M(R) = +\infty$, то при $R \rightarrow +\infty$ существует предел $\lim R^{-1}M(R) = +\infty$, и $\alpha^+ = \beta = +\infty$. Кроме того, в рассматриваемом случае

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{R} \int_0^\pi u^+(R e^{i\theta}) \sin \theta d\theta = +\infty,$$

поскольку иначе функция $u(z)$ допускала бы представление вида (1.6) – (1.8), где $\mu_+(t) \equiv 0$, и, очевидно, имели бы $\alpha \leq h < +\infty$, что есть противоречие. Теперь рассмотрим случай, когда при $R \rightarrow +\infty$ $\limsup R^{-1}M(R) < +\infty$. В этом случае $u(z)$ очевидно представима в виде (1.6) – (1.8) с $\mu_+(t) \equiv 0$, имеет место (1.4) и существует предел $\lim R^{-1}M(R) = \beta = \alpha^+$ при $R \rightarrow +\infty$, согласно теореме М. Хейнса и Л. Альфорса. Кроме того, из (1.6) – (1.8) непосредственно следует, что $\alpha \leq h$. С другой стороны, согласно первому из соотношений (1.16), $\alpha \geq \limsup y^{-1}u(iy)$ при $y \rightarrow +\infty$. Таким образом, $\alpha^+ = h^+ = \beta$, и, к тому же справедливо соотношение (1.15).

2°. Если $\beta = \alpha^+ < +\infty$, то $u(z)$ представима в виде (1.6) – (1.8), а для таких функций соотношения (1.15) – (1.17) с $h = \beta = \alpha^+$ хорошо известны.

Доказательство Теоремы 4. 1°. Пусть $f(z) \in H^p(\Omega(x)dx)$. Тогда $|f(z)|^p$ имеет гармоническую мажоранту в $G^{(+)}$ согласно Теореме 1. Тем самым, $f(z)$ принадлежат конформному отображению класса Харди и имеют некасательные граничные значения $f(x)$ почти всюду на $(-\infty, +\infty)$. Согласно лемме Фату

$$\int_{-R}^R |f(x)|^p \Omega(x) dx \leq \liminf_{y \rightarrow +0} \int_{-R}^R |f(x + iy)|^p \Omega(x) dx < +\infty, \quad R > 0, \quad (3.3)$$

и, таким образом, $f(x) \in L_p(\Omega(x)dx)$. Пусть теперь $f(z)$ – функция, принадлежащая конформному отображению класса Харди H^p для $|z| < 1$, и пусть $f(x) \in L_p(\Omega(x)dx)$. Тогда, пользуясь факторизацией $f(z)$, получим

$$|f(z)|^p \leq \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|f(t)|^p dt}{(x-t)^2 + y^2}, \quad z = x + iy \in G^{(+)}. \quad (3.4)$$

С другой стороны, легко видеть, что для почти всех $t \in (-\infty, +\infty)$

$$\frac{y}{\pi} \int_{-R}^R \frac{\Omega(x) dx}{(x-t)^2 + y^2} \leq C^* \Omega(t), \quad 0 < y < 1, \quad R > 0,$$

где $C^* > 0$ — постоянная, зависящая только от R и $\Omega(x)$. Следовательно

$$\limsup_{y \rightarrow +0} \int_{-R}^R |f(x+iy)|^p \Omega(x) dx \leq \int_{-R}^R |f(t)|^p \Omega(t) dt \quad (3.5)$$

по теореме Лебега. Соотношение (1.27) следует из (3.4).

2°. Если $f(z) \in H^p(\Omega(x)dx)$, то, очевидно, эта функция принадлежит конформному отображению класса Харди. Пользуясь факторизацией этой функции приходим к (1.26). Пусть теперь (1.24) заменено на (1.26). Тогда ясно, что $\log^+ |f(z)|$ имеет гармоническую мажоранту в $G^{(+)}$, т.е. $f(z)$ ограниченного вида в $G^{(+)}$. Поэтому $|f(Re^{i\theta})|^p$ непрерывно в $0 \leq \theta \leq \pi$ почти для всех $R > 0$.

Одновременно, имеем

$$\liminf_{y \rightarrow +0} \int_{-R}^R |f(x+iy)|^p \frac{dx}{1+x^2} < +\infty$$

для любого $R > 0$. Следовательно, по Теореме 2.1, $|f(z)|^p$ имеет гармоническую мажоранту в любом полукруге $G_R^{(+)}$ ($R > 0$), т.е. в любом полукруге $G_R^{(+)}$ функция $f(z)$ принадлежит конформному отображению класса Харди. Преобразование соответствующей факторизации посредством конформного отображения $|z| < 1$ на $G_R^{(+)}$ приводит к представлению

$$\begin{aligned} \log |f(z)| = & \sum_{z_k \in G_R^{(+)}} \log \left| \frac{z - z_k}{z - \bar{z}_k} \frac{R^2 - z z_k}{R^2 - z \bar{z}_k} \right| + \\ & + \frac{2y}{\pi} R(R^2 - |z|^2) \int_0^\pi \frac{\log |f(Re^{i\theta})| \sin \theta}{|Re^{i\theta} - z|^2 |Re^{-i\theta} - z|^2} d\theta + \\ & + \frac{y}{\pi} \int_{-R}^R \left\{ \frac{1}{|t-z|^2} - \frac{R^2}{|R^2 - tz|^2} \right\} d\mu(t), \quad z = x + iy \in G_R^{(+)}. \quad (3.6) \end{aligned}$$

Здесь z_k — нули функции, а $f(z)$, а $d\mu(t) = \log |f(t)| dt - d\omega(t)$, где $\omega(t)$ — неубывающая функция такая, что $\omega'(t) = 0$ для почти всех $t \in (-R, R)$.

Однако, как уже доказано, $\log^+ |f(z)|$ имеет гармоническую мажоранту в $G^{(+)}$.

Тем самым, очевидно, что предельный переход $R \rightarrow +\infty$ в (3.6) приводит к

факторизации

$$f(z) = \prod_{z_k \in G^{(+)}} \frac{z - z_k}{z - \bar{z}_k} \frac{|1 + z_k^2|}{1 + z_k^2} \times \\ \times \exp \left\{ \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 + tz}{t - z} \frac{d\mu(t)}{1 + t^2} + ihz + iC \right\}, \quad z \in G^{(+)}, \quad (3.6)$$

где $d\mu(t) = \log |f(t)| dt - d\omega(t)$ ($-\infty < t < +\infty$), $\text{Im } C = 0$, и

$$h = \frac{2}{\pi} \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{2}{R} \int_0^\pi \log |f(R e^{i\theta})| \sin \theta d\theta \leq 0$$

согласно (1.15) и (1.26). Отсюда следует, что $f(z)$ принадлежит конформному отображению класса Харди, и поэтому справедливо неравенство (3.4). Следовательно, имеет место неравенство (1.27).

3°. Пусть $f(z) \in H^p(\Omega(x)dx)$, где $\Omega(x)$ удовлетворяет дополнительному условию (1.28). Тогда очевидно, что функция $\Omega(z)$ и

$$[\Omega(z)]^{1/p} \equiv \exp \left\{ \frac{1}{p\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 + tz}{t - z} \frac{\log \Omega(t)}{1 + t^2} dt \right\}$$

аналитичны и не имеют нулей в $G^{(+)}$. Воспользовавшись (3.7), нетрудно получить, что

$$|f(z)[\Omega(z)]^{1/p}|^p \leq \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|f(t)|^p \Omega(t)}{(x-t)^2 + y^2} dt, \quad z = x + iy \in G^{(+)},$$

где $|f(t)|^p \Omega(t) \in L_1(dt)$. Поэтому $f(z)[\Omega(z)]^{1/p} \in H^p(dx)$. Тем самым, $H^p(\Omega(x)dx)[\Omega(z)]^{1/p} \subseteq H^p(dx)$. С другой стороны, полагая, что $f(z) \in H^p(dx)$, получим $f(x)[\Omega(x)]^{-1/p} \in L_p(\Omega(x)dx)$. Поэтому $f(z)[\Omega(z)]^{-1/p} \in H^p(\Omega(x)dx)$, согласно уже доказанному утверждению 1°, и $H^p(dx)[\Omega(z)]^{-1/p} \subseteq H^p(\Omega(x)dx)$. Равенство (1.30) является частным случаем (1.29), где $\Omega(x) = (1 + x^2)^{-\gamma/2}$.

ABSTRACT. In the paper a complete characterization is obtained for the growth of functions subharmonic in the upper half-plane and having there nonnegative harmonic majorants. This result contains, as a special case, the Nevanlinna factorization in the half-plane. Modifications of Nevanlinna uniqueness theorem and of the Phragmén-Lindelöf type theorem due to M. Heins and L. Ahlfors are proved in which the traditional condition

$$\limsup_{z \rightarrow t, \text{Im } z > 0} u(z) \leq 0, \quad -\infty < t < +\infty$$

is replaced by a less restrictive one. The methods used make it possible to prove also a theorem on weighted H^p classes over a half-plane.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. Nevanlinna, "Über eine Klasse von meromorphen Funktionen", Math. Ann., vol. 92, 1924.
2. Р. Неваблинна, Однозначные Аналитические Функции, М.- Л., ОГИЗ, ГИТТЛ, 1941.
3. R. Nevanlinna, "Über die Eigenschaften meromorpher Funktionen in einem Winkelraum", Acta Soc. Sci. Fennicae, vol. 50, no. 12, pp. 3 - 45, 1925.
4. R. P. Boas, Entire Functions, Ac. Press, New York, 1954.
5. L. V. Ahlfors, M. Heins, "Questions of regularity connected with the Phragmén-Lindelöf principle", Ann. of Math., vol. 50(2), pp. 341 - 346, 1949.
6. А. М. Джрбашян, "Классы функций ограниченного вида в полуплоскости, теорема единственности и теорема типа Фрагмена - Линделефа", Изв. АН Арм. ССР, Математика, т. 23, №4, стр. 396 - 401, 1988.
7. А. М. Джрбашян, "On functions of bounded and generalized bounded type in the half-plane", Rev. Roum. Math. Pur. et Appl., vol. 36, nos 7 - 8, pp. 425 - 432, 1991.
8. Е. Д. Соломенцев, "О классах функций, субгармонических в полупространстве", Вестник МГУ, сер. мат., т. 5, стр. 73 - 91, 1959.

13 Июля 1993

Институт математики
НАН Армении