Посвящается профессору
Мхитару М. Джрбашяну
в связи с 75-летним юбилеем

О ТЕОРЕМЕ САРАСОНА

С. А. Григорян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 28, №4, 1993

Пусть T – единичный круг. По теореме Сарасона, $H^\infty + C(T)$ является равномерной подалгеброй в $\mathcal{L}^\infty(\sigma)$. Эта теорема расширяется для обобщенных аналитических функций. В частности, доказывается результат для почти периодических аналитических функций.

§0. ВВЕДЕНИЕ

Пусть Γ – подгруппа группы рациональных чисел Q, наделенное дискретной топологией, G – компактная группа характеров группы Γ. На локально компактном пространстве Δ, полученном из декартового произведения $G \times [0, 1]$ отождествлением слоя $G \times \{0\}$ в точку, рассмотрим множество функций $\{\varphi^a\}_{a \in \Gamma_+}$, определенных посредством $\varphi^a(\alpha \cdot r) = \alpha(a) \cdot r^a$, где $\Gamma_+ = \{a \in \Gamma;\ a \geq 0\}$. Обозначим через H^∞ алгебру ограниченных непрерывных функций на $\Delta^0 = \Delta \setminus (G \times \{1\})$, которые локально аппроксимируются в окрестности каждой точки из Δ^0 линейными функциями φ^a, $a \in \Gamma_+$.

Пусть σ – нормализованная мера Хаара на G. Для каждой $f \in H^\infty$ существует (для σ-почти всех $\alpha \in G$) предел

$$f^*(\alpha) = \lim_{r \to 1} f(\alpha \cdot r), \tag{1}$$

принадлежащий $\mathcal{L}^\infty(\sigma)$ [1].

Отождествим $f \in H^\infty$ с его граничной функцией f^*. Пространство ограниченных функций H^∞ является подалгеброй банаховой алгебры $\mathcal{L}^\infty(\sigma)$, которую мы обозначим также символом H^∞. Если Γ является группой целых чисел, то G – единичный круг и алгебра H^∞ является алгеброй ограниченных аналитических функций на открытом единичном диске $\{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$ в комплексной плоскости. В этом случае, по одной из теорем Сарасона, пространство $H^\infty + C(G)$ является замкнутой подалгеброй банаховой алгебры $\mathcal{L}^\infty(\sigma)$ ($C(G)$ – алгебра всех непрерывных функций на G) (см. [2]).

В настоящей заметке доказывается более общая теорема.

Теорема. *Пусть Γ – подгруппа группы рациональных чисел Q. Тогда $H^\infty + C(G)$ – замкнутая подалгебра $\mathcal{L}^\infty(\sigma)$.*

§1. НЕОБХОДИМЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Начнем с некоторых предварительных результатов.

Лемма 1. *Пусть $a \in \Gamma_+$, $a \neq 0$. Тогда существует множество $\{a_k\}_{k=0}^\infty$ в Γ_+ такое, что*

i) $a = a_0$,

ii) $a_k = m_k \cdot a_{k+1}$ для некоторого $m_k \in \mathbb{Z}_+$,

iii) Для каждого $b \in \Gamma_+$ существует $a_n \in \{a_k\}_{k=0}^\infty$ и $m \in \mathbb{Z}_+$ такие, что $b = m \cdot a_n$.

Доказательство. Поскольку группа Γ является счетным множеством, пронумеруем элементы Γ. Пусть $\Gamma = \{b_i\}_{i=1}^\infty$. Положим $a_0 = a$ и рассмотрим группу $\Gamma_1 = \{a_0; b_1\}$, порожденную элементами a_0 и b_1. Поскольку Γ_1 изоморфна целым числам, то существует $a_1 \in \Gamma_1 \cap \Gamma_+$ такое, что $a_0 = ma_1$ и $b_1 = na_1$, где $m, n \in \mathbb{Z}$. Возьмем теперь $b_2 \in \Gamma$, найдем $a_2 \in \Gamma_+$ и $m_1, n_1 \in \mathbb{Z}$ такие, что $a_1 = m_1 a_2$ и $b_2 = n_1 a_2$. Продолжая этот процесс, мы можем получить последовательность $\{a_k\}_{k=0}^\infty$.

По теореме двойственности Понтрягина, G является группой характеров группы Γ. Пусть A – замкнутая в sup норме подалгебра алгебры $C(G)$, порожденная характерами из Γ_+. Пространство максимальных идеалов этой алгебры есть

Δ. Поэтому мы отождествим G с $G \ltimes \{1\}$. Обозначим также через A преобразование Гельфанда алгебры A. Эта алгебра в точности совпадает с пространством функций из H^∞, которые непрерывно расширяются на Δ (см. [1], [3]).

Замкнутое подмножество E из Δ называется ***интерполяционным*** множеством для A, если сужение A на E есть $C(E)$.

Лемма 2. *Пусть $E = \{s \in \Delta : \varphi^a(s) = r\}$, $a \neq 0$. Тогда E – **интерполяционное** множество для A.*

Доказательство. Для доказательства леммы используем следующее замечание : пусть K – компакт и B – замкнутое подпространство в $C(K)$. Замкнутое подмножество $F \subset K$ является интерполяционным множеством для B тогда и только тогда, когда существует $c > 0$ такое, что $||\mu_F|| < c||\mu_{K\setminus F}||$ для всех $\mu \in B^\perp$ (μ_F – сужение μ на F).

Напомним, что по теореме Карлесона последовательность $\{z_j\}_1^\infty$ в диске D является интерполяционной последовательностью для H^∞, если существует $\delta > 0$ такое, что

$$\inf_k \prod_{j \neq k} \left| \frac{z_k - z_j}{1 - \bar{z}_k z_j} \right| > \delta. \tag{2}$$

Это условие эквивалентно следующему : существует число $c = c(\delta)$, зависящее только от δ и такое, что каждая интерполяционная задача $f(z_j) = c_j$, $j = 1, 2, \ldots$ с $\{c_j\} \in l^\infty$ имеет решение $f \in H^\infty$ такое, что

$$||f||_\infty \leq c(\delta)\, ||f(z_j)||_{l^\infty}. \tag{3}$$

Ввиду дуальности банаховых пространств, (3) эквивалентно условию

$$||\mu_{\{z_k\}_1^\infty}|| \leq c(\delta)\, ||\mu_{D\setminus\{z_k\}_1^\infty}||, \qquad \mu \in (H^\infty)^\perp. \tag{4}$$

Заметим, что $c(\delta) = 2e\log(e\delta^{-2})/\delta$ (см. [4]).

Пусть теперь $\{a_k\}_0^\infty$ – подмножество в Γ_+, удовлетворяющее условиям i), ii) и iii). Для каждого $k \in \mathbb{Z}_+$ определим $\Psi_k : \Delta \to D$, $\Psi_k(s) = \varphi^{a_k}(s)$.

Так как $a_0 = ma_k$ для некоторого $m \in \mathbb{Z}_+$, имеем $\Psi_k(E) = \{z_n\}_{n=0}^{m-1}$, где $z_k = r^{\frac{1}{m}} \exp\left(i\dfrac{2\pi k}{m}\right)$ и $E = \{s \in \Delta : \varphi^{a_0}(s) = r\}$. Конечная последовательность

$\{z_k\}_{k=0}^{m-1}$ в точности совпадает с множеством корней уравнения $z^m = r$, и следовательно, для проверки условий Карлесона в этих точках достаточно подсчитать

$$\delta(m) = \prod_{k=0}^{m-1} \left| \frac{r^{\frac{1}{m}} - r^{\frac{1}{m}} \exp\left(i\frac{2\pi k}{m}\right)}{1 - r^{\frac{2}{m}} \exp\left(i\frac{2\pi k}{m}\right)} \right|.$$

Так как

$$z^m - r = \prod_{k=0}^{m-1} \left| z - r^{\frac{1}{m}} \exp\left(i\frac{2\pi k}{m}\right) \right|,$$

получим

$$\delta(m) = \lim_{z \to r^{\frac{1}{m}}} \left| \frac{(z^m - r)(1 - r^{\frac{1}{m}} z)}{(1 - rz^m)(z - r^{\frac{1}{m}})} \right|.$$

Следовательно

$$\delta(m) = mr^{\frac{m-r}{m}} \frac{1 - r^{\frac{2}{m}}}{1 - r^2}$$

и

$$\delta = \lim_{m \to \delta} \delta(m) = \frac{-2 \log r}{1 - r^2}. \tag{5}$$

С помощью отображения Ψ_k определим для $\mu \in A^{\perp}$ меру $\mu^{(k)}$ на $\overline{D}$ так, что

$$\mu^{(k)}(F) = \mu(\Psi_k^{-1}(F)), \quad F \subset \overline{D}.$$

Так как

$$\int_{\overline{D}} z^n \, d\mu^{(k)} = \int_{\Delta} \varphi^{n a_k} \, d\mu = 0, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{6}$$

то мера $\mu^{(k)}$ ортогональна к диск-алгебре. Рассмотрим теперь группу $G_k = \{\alpha \in \in G\colon \alpha(a_k) = 1\}$ и фактор-группу $B_k = G/G_k$. Отображение Ψ_k порождает изоморфизм между $\overline{D}$ и $\Delta_k = B_k \times [0,1]/B_k \times \{0\}$. Поскольку $G_k \supset G_{k+1}$ и $\bigcap_{k=1}^{\infty} G_k = \{e\}$, ($e$ – единица группы G), существует индуктивный предел пространств Δ_k, $k = 1, 2, \ldots$. Можно показать, что

$$\operatorname{Ind}\lim \Delta_k = \Delta.$$

Следовательно, если F борелево множество в Δ, то

$$\lim_{k \to \infty} \|\mu_{F_k}^{(k)}\| = \|\mu_F\|, \tag{7}$$

где $F_k = \Psi_k(F)$.

Пусть $E = \{s \in \Delta:\ \varphi^{a_0}(s) = r\}$ и $F = \Delta \setminus E$. Из (4) получим

$$\|\mu^{(k)}_{E_k}\| < c(\delta_k)\,\|\mu^{(k)}_{F_k}\|, \tag{8}$$

где

$$E_k = \Psi_k(E) = \left\{ r^{\frac{1}{m}} \exp\left(i\frac{2\pi n}{m} \right) \right\}_{n=0}^{m-1}.$$

Наконец, комбинируя (4) – (7) и (8) имеем

$$\|\mu_E\| < c\left\{ \frac{-2\ln 2}{1-r^2} \right\} \|\mu_{\Delta\setminus E}\|.$$

Используя теперь вышеуказанное замечание, получим, что E есть интерполяционное множество для A.

Если $\beta \in G$ и $\rho \in [0,1]$ для всех $s \in \Delta$, $s = \alpha \circ r$, то согласно определению $\beta s = (\beta\alpha)r \in \Delta$ и $\rho s = \alpha(r\rho)$. Следовательно, для $f \in A$ можно определить

$$f_\beta(s) = f(\beta s) \quad \text{and} \quad f_\rho(s) = f(\rho s).$$

Эти функции принадлежат A. Для каждого $k \in \mathbb{Z}_+$ пусть A_k – замкнутая подалгебра алгебры A, порожденная φ^{a_k} и единицей. Эта алгебра изоморфна диск-алгебре.

Пусть ν_k – нормализованная мера Хаара на G_k. Линейный оператор $P_k:\ A \to A_k$, определенный следующим образом

$$P_k f = \int_{G_k} f_\beta\, d\nu_k(\beta),$$

есть ограниченный оператор из A на A_k такой, что $P^2 = P$. Это означает, что P проекция. Если H^∞_k – алгебра ограниченных непрерывных функций на Δ^0, которая локально аппроксимируется в окрестности каждой точки из Δ^0 функциями из A_k, то мы можем определить проекцию

$$P_k f = \lim_{\rho \to 1} \int_{G_k} (f_\rho)_\beta\, d\nu(\beta). \tag{9}$$

Очевидно, что последовательность $f_k = P_k f$ равномерно сходится к f на Δ, когда $f \in A$ и равномерно сходится к f на компактном множестве из Δ^0, когда $f \in H^\infty$.

Лемма 3. $H^\infty = A + (\varphi^{a_0} - r)H^\infty$, $0 < r < 1$.

Доказательство. По Лемме 2 множество $E = \{s \in \Delta\colon \varphi^{a_0}(s) = r\}$ является интерполяционным множеством для A и H^∞. Следовательно для всех $f \in H^\infty$ существует $g \in A$ такое, что $f = g$ на E, и следовательно, $f_\rho = g_\rho$ на $1/\rho \cdot E$. Так как $G \times \{r^{1/m}\}$ - множество в E, где $1/m = a_0/a_1$, из (9) имеем $f_k = g_k$ на E. Поскольку функции f_k и g_k являются аналитическими функциями по φ^{a_k}, и $a_0 = ma_k$, то можно написать

$$f_k = g_k + (\varphi^{a_0} - r)h_k, \quad h_k \in H^\infty_k.$$

Переходя к пределу при $k \to \infty$, получим

$$f = g + (\varphi^{a_0} - r)h. \Diamond$$

Следующая лемма опубликована Рудиным [5].

Лемма 4. *Пусть Y и W - замкнутые подпространства банахова пространства X, и пусть $\{\Phi\}$ - множество ограниченных линейных X таких, что*

i) $\Phi(X) \subset Y$ и $\Phi(W) \subset W$ для всех $\Phi \in \{\Phi\}$,

ii) $\sup\limits_{\{\Phi\}} ||\Phi|| < \infty$,

iii) Для всех $y \in Y$ и $\varepsilon > 0$ существует $\Phi \in \{\Phi\}$ такое, что $||\Phi y - y|| < \varepsilon$.

Тогда $Y + W$ замкнутое подпространство от X.

§2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ

Так как $\Gamma = \Gamma_+ \cup (-\Gamma_+)$, то, по теореме Стоуна-Вейерштрасса, алгебра A является алгеброй Дирихле на G, т. е. $\operatorname{Re} A = \{\operatorname{Re} f; f \in A\}$ равномерно плотно в $C_R(G)$. Поскольку G - граница Шилова для A, каждая функция $f \in C(G)$ однозначно определяет функции $f \in \overline{\operatorname{Re} A} + i\overline{\operatorname{Re} A} \subset C(\Delta)$.

Пусть X замкнуто по норме $\mathcal{L}^\infty(\sigma)$ пространства $H^\infty + C(G)$, и пусть $Y = C(G)$ и $W = H^\infty$. Для каждого $\rho \in (0,1)$ определим ограниченный линейный оператор $\Phi_\rho\colon H^\infty + C(G) \to C(G)$ посредством $\Phi_\rho(f + g) = f_\rho + g_\rho$ на G. Очевидно, что $||\Phi_\rho|| = 1$ и $\Phi_\rho(H^\infty) \subset A \subset C(G)$. Виду непрерывности g на Δ, для $g \in C(G)$ и для любого $\varepsilon > 0$ выберем $\rho \in (0,1)$ так, что $||\Phi_\rho g - g|| < \varepsilon$. Следовательно, по Лемме 4 пространство $H^\infty + C(G)$ замкнуто в $\mathcal{L}^\infty(d\sigma)$.

Наконец, покажем, что $H^\infty + C(G)$ является алгеброй. Для этого достаточно показать, что если $f \in H^\infty$ и $a \in \Gamma$, то $f/\varphi^a \in H^\infty + C(G)$. Так как согласно Лемме 3 $H^\infty = A + (\varphi^a - r)\, H^\infty$, то функция $f/(\varphi^a - r)$ принадлежит $H^\infty + C(G)$. Устремляя $r \to 0$, получим $f/\varphi^a \in H^\infty + C(G)$.

§3. ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

В этом параграфе покажем одно применение вышеуказанной теоремы к почти периодическим функциям. Нам необходимы следующие определения.

а) Функция f называется функцией класса A_Γ, если для $\varepsilon > 0$ существует $\{\lambda_k\}_0^n \subset \Gamma_+$ так, что

$$\sup_{\mathbb{R}} \Big|f(x) - \sum_0^n a_k \exp(i\lambda_k x)\Big| < \varepsilon, \quad a_k \in \mathbf{C}.$$

Заметим, что класс A_Γ является классом почти периодических функций на $\mathbb{R}$. Из основной теоремы почти периодических функций [3] имеем, что A_Γ – банахова алгебра в $\sup\limits_{\mathbb{R}}$-норме.

b) Пусть H_Γ^∞ – подалгебра алгебры всех ограниченных аналитических функций на верхней полуплоскости $\{\operatorname{Im} z > 0\}$, так что его сужение на линию $\{x + i\mathbb{R}\}$ принадлежит A_Γ. По теореме Фату, для $f \in H^\infty$ почти всех $t \in \mathbb{R}$ существует предел

$$\lim_{y \to 0} f(x + iy) = f^*(x).$$

Мы отождествляем f с f^*.

c) Пусть $C_\Gamma(\mathbb{R})$ – алгебра функций, которые равномерно на $\mathbb{R}$ аппроксимируются полиномами Дирихле $\sum\limits_0^m a_k \exp(i\lambda_k z)$, $\lambda_k \in \Gamma$. По теореме Аренса – Зингера существуют изометрический изоморфизм между A_Γ, A, $H_\Gamma^\infty, H^\infty$ и $C_\Gamma(\mathbb{R}), C(G)$.

Следствие. $H_\Gamma^\infty + C_\Gamma(\mathbb{R})$ – *замкнутая подалгебра* $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}, dx)$.

ABSTRACT. Let T be the unit circle. By Sarason's theorem, $H^\infty + C(T)$ is a uniform subalgebra in $\mathcal{L}^\infty(\sigma)$. This theorem is extended to generalized analytic functions. In particular, we prove the corresponding result for analytic almost periodic functions.

ЛИТЕРАТУРА

1. K. Hoffman, "Boundary behavior of generalized analytic functions," T. A. M. S., vol. 87, pp. 447 – 466, 1958.
2. D. Sarason, "Algebras of functions on the unit circle," Bull. Amer. Math. Soc., vol. 79, pp. 286 – 299, 1973.
3. R. Arens and I. Singer, "Generalized analytic functions," T. A. M. S., vol. 81, pp. 379 – 393, 1956.
4. J. B. Garnett, Bounded Analytic Functions, Academic Press, 1981.
5. W. Rudin, "Spaces of type $H^\infty + C(T)$," Ann. Inst. Fourier, Grenoble, vol. 25, no. 1, pp. 99 – 125, 1975.

3 Августа 1993

Институт математики
НАН Армении