ВЕСОВЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ И ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ В ЕДИНИЧНОМ КРУГЕ И В КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

М. М. Джрбашян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 28, №4, 1993

Основные результаты работы – формулы вида $f(z) = P(f)(z) + T(\overline{\partial} f)(z)$, установленные в следующих двух случаях : (a) $f(z)$ - функция класса C^1 в единичном круге $\mathbb{D}$ и P - ортогональный проектор пространства $L^2\{\mathbb{D};\ (1-|z|^\rho)^\alpha |z|^\gamma dm(z)\}$ на свое подпространство аналитических функций ; (b) $f(z)$ - функция класса C^1 в комплексной плоскости (подчиненная определенным условиям роста на бесконечности) и P - ортогональный проектор пространства $L^2\{\mathbb{C};\ e^{-\sigma|z|^\rho}|z|^\gamma dm(z)\}$ на свое подпространство целых функций. В обоих случаях получены явные формулы для ядер интегральных операторов P и T.

"... и возвращается ... на круги своя"
Книга Екклесиаста 1,6

§0. ВВЕДЕНИЕ

В работах [1, 2] автором впервые были введены пространства $H^p(\alpha)$ $(1 \le p < \infty$, $\alpha > -1)$ голоморфных в единичном круге $\mathbb{D}$ функций $f(z)$, удовлетворяющих условию

$$\iint_{\mathbb{D}} |f(\zeta)|^p (1-|\zeta|^2)^\alpha \, d\xi \, d\eta < +\infty, \quad \zeta = \xi + i\eta. \tag{0.1}$$

В этих же работах было установлено, что произвольная функция $f \in H^p(\alpha)$ допускает интегральное представление вида

$$f(z) = \frac{\alpha+1}{\pi} \iint_{\mathbb{D}} \frac{f(\zeta)(1-|\zeta|^2)^\alpha}{(1-z\bar{\zeta})^{2+\alpha}} \, d\xi \, d\eta, \quad z \in \mathbb{D}. \tag{0.2}$$

Более того, интегральный оператор, порожденный правой частью этой формулы, действует в гильбертовом пространстве измеримых в $\mathbb{D}$ функций с конечным интегралом (0.1) с $p = 2$ как оператор ортогонального проектирования на $H^2(\alpha)$.

Эти результаты уже в указанных работах [1, 2] нашли существенные применения в вопросах построения теории факторизации весовых классов мероморфных в круге $\mathbb{D}$ функций. В дальнейшем были найдены многочисленные другие применения (за подробностями отсылаем, например, к обзорной работе [3]).

Позднее выяснилось (см., например, [4, 5]), что для гладких в $\mathbb{D}$ функций класса $C^1(\mathbb{D})$ имеет место формула типа (0.2), а именно :

$$f(z) = \frac{\alpha+1}{\pi} \iint\limits_{\mathbb{D}} \frac{f(\zeta)(1-|\zeta|^2)^\alpha}{(1-z\overline{\zeta})^{2+\alpha}}\, d\xi\, d\eta - \frac{1}{\pi} \iint\limits_{\mathbb{D}} \frac{\partial f/\partial\overline{\zeta}}{\zeta - z} \left(\frac{1-|\zeta|^2}{1-z\overline{\zeta}}\right)^{1+\alpha} d\xi\, d\eta,$$

$$z \in \mathbb{D}, \quad \alpha > -1. \tag{0.3}$$

В частности, для аналитических в $\mathbb{D}$ функций $f \in C^1(\overline{\mathbb{D}})$ отсюда вновь получаем представление (0.2). По-видимому, автор работы [4] не был знаком с упомянутыми выше исследованиями. Только этим можно объяснить то обстоятельство, что в [4] формулы (0.2), (0.3) приводятся в качестве общеизвестного (почти фольклорного) факта, без какой-либо ссылки.

В §§1,2 настоящей работы для функций класса $C^1(\overline{\mathbb{D}})$ (это условие можно значительно ослабить !) устанавливаются новые весовые интегральные представления, являющиеся существенными обобщениями формулы (0.3) (а значит, и (0.2)) .

В работах [6, 2] автором были введены весовые классы целых функций $M_2(\sigma, \rho)$ $(\sigma, \rho > 0)$, удовлетворяющих условию

$$\iint\limits_{\mathbf{C}} |f(w)|^2 e^{-\sigma|w|^\rho} |w|^{\rho-2}\, du\, dv < +\infty, \quad w = u + iv \tag{0.4}$$

и для них были установлены интегральные представления вида

$$f(z) = \frac{\rho\sigma}{2\pi} \iint\limits_{\mathbf{C}} f(w) e^{-\sigma|w|^\rho} |w|^{\rho-2} E_{\rho/2}(\sigma^{2/\rho} z\overline{w}; 1)\, du\, dv, \quad z \in \mathbf{C}, \tag{0.5}$$

где

$$E_{\rho/2}(w;1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^k}{\Gamma(1+2k/\rho)}, \quad w \in \mathbf{C}$$

суть целая функция типа Миттаг-Лефлера. Было показано также, что интегральный оператор, естественным образом возникающий из (0.5), действует в гильбертовом пространстве измеримых в $\mathbf{C}$ функций, удовлетворяющих (0.4), как оператор ортогонального проектирования на $M_2(\sigma,\rho)$. Заметим, что при $\rho = 2$ формула (0.5) принимает весьма простой вид

$$f(z) = \frac{\sigma}{\pi} \iint\limits_{\mathbb{D}} f(w) e^{-\sigma|w|^2} e^{\sigma z \overline{w}}\, du\, dv, \quad z \in \mathbf{C}. \tag{0.6}$$

В работе [7] были рассмотрены классы целых функций, удовлетворяющих условию

$$\iint\limits_{\mathbf{C}} |f(w)|^p e^{-\sigma|w|^\rho} |w|^\gamma\, du\, dv < \infty, \quad 1 < p < \infty, \quad \sigma,\rho > 0, \quad \gamma > -2,$$

обобщающему (0.4). Для этих классов было установлено интегральное представление вида

$$f(z) = \frac{\rho\sigma^\mu}{2\pi} \iint\limits_{\mathbf{C}} f(w) e^{-\sigma|w|^\rho} |w|^\gamma E_{\rho/2}(\sigma^{2/\rho} z\overline{w};\mu)\, du\, dv, \quad z \in \mathbf{C}, \tag{0.7}$$

где

$$E_{\rho/2}(w;\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^k}{\Gamma(\mu + 2k/\rho)}, \quad w \in \mathbf{C}, \quad \mu = \frac{2+\gamma}{\rho}.$$

При $p = 2$ было доказано соответствующее утверждение об ортогональном проекторе. Отметим также, что в работе [7] установлены и многомерные аналоги формулы (0.7) ; даны некоторые приложения. В связи с формулой (0.7) возникает задача получения ее аналогов для гладких в $\mathbf{C}$ функций. В специальном случае $\rho = 2$, $\gamma = 0$ такая формула известна. А именно, справедливо следующее обобщение (0.6), вытекающее из некоторых общих формул работы [8] :

$$f(z) = \frac{\sigma}{\pi} \iint\limits_{\mathbf{C}} f(w) e^{-\sigma|w|^2} e^{\sigma z\overline{w}}\, du\, dv - \frac{1}{\pi} \iint\limits_{\mathbf{C}} \frac{\partial f/\partial \overline{w}}{w - z} e^{-\sigma|w|^2} e^{\sigma z\overline{w}}\, du\, dv, \quad z \in \mathbf{C} \tag{0.8}$$

В работе [8] подобного рода формулы устанавливаются для функций многих комплексных переменных. Что же касается той части содержащихся там результатов, которые имеют отношение к функциям одного комплексного переменного, то необходимо отметить, что в [8] рассматривается весьма общий случай, когда вместо весовой функции $e^{-\sigma|w|^2}$ берется вес вида $e^{-\varphi(w)}$, где $\varphi(w)$ $(w \in \mathbf{C})$ - дважды гладкая выпуклая функция. В этом случае устанавливается формула типа (0.8), также имеющая в своей правой части два слагаемых. Однако, авторы [8] отмечают, что за исключением частного случая $\varphi(w) \equiv \sigma|w|^2$, не совсем ясно, является ли первое слагаемое полученной ими формулы соответствующим интегральным оператором ортогонального проектирования (см. правую часть (0.7)).

В §3 данной работы, основываясь на формулах §2 и совершая предельный переход от круга к плоскости, установлены новые весовые интегральные формулы, являющиеся аналогами (0.7) для гладких функций $\mathbf{C}$. В §4 дается прямое (не опирающееся на результаты §2) доказательство этих же интегральных представлений. В частности, получены также далеко идущие обобщения формулы (0.8). В §5 рассмотрены важные специальные случаи формул §4, представляющие самостоятельный интерес.

В заключение отметим, что результаты этой работы, безусловно могут быть эффективно использованы при построении минимальных решений $\overline{\partial}$-уравнения в соответствующих областях.

§1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

1.1. Пространство $H^p_{\rho,\alpha,\gamma}(\mathbb{D})$. Пусть $\mathbb{D} = \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$ – единичный круг и

$$\rho > 0, \quad \alpha > -1, \quad \gamma > -2 \tag{1.1}$$

– произвольные параметры. Введем также вспомогательный параметр

$$\mu = \frac{\gamma + 2}{\rho}, \tag{1.2}$$

и обозначим через $H^p_{\rho,\alpha,\gamma}(\mathbb{D})$ множество аналитических в $\mathbb{D}$ функций $f(z)$ с конечной нормой

$$\|f\| = \left(\iint_{\mathbb{D}} (1 - |z|^\rho)^\alpha |z|^\gamma |f(z)|^p \, dm(z) \right)^{1/p}, \quad 1 \le p < \infty, \tag{1.3}$$

где $dm(z) = r dr\, d\varphi$ $(z = re^{i\varphi})$. Прежде всего докажем следующую лемму.

Лемма 1.1. *Если $f(z) \in H^p_{\rho,\alpha,\gamma}(\mathbb{D})$ $(\rho > 0, \quad \alpha > -1, \quad \gamma > -2)$, то $f_\kappa(z) \equiv \equiv f(\kappa z) \to f(z)$ при $\kappa \to 1 - 0$ по норме (1.3), т.е.*

$$\lim_{\kappa \to 1-0} \iint_{\mathbb{D}} (1 - |z|^\rho)^\alpha |z|^\gamma |f(z) - f(\kappa z)|^p \, dm(z) = 0.$$

Доказательство. Для данного $\varepsilon > 0$ выберем такое $\delta \in (0,1)$, чтобы

$$\iint\limits_{\delta<|z|<1} (1-|z|^\rho)^\alpha |z|^\gamma |f(z)|^p \, dm(z) < \varepsilon. \tag{1.4}$$

Далее, используя неравенство $(a+b)^p \le 2^p(a^p+b^p)$ $(a,b\ge 0,\ 0<p<\infty)$, получим

$$I \equiv \iint\limits_{\mathbb{D}} (1-|z|^\rho)^\alpha |z|^\gamma |f(z)-f(\kappa z)|^p \, dm(z) \le I_1 + I_2 + I_3, \tag{1.5}$$

где

$$I_1 = \iint\limits_{|z|\le\delta} (1-|z|^\rho)^\alpha |z|^\gamma |f(z)-f(\kappa z)|^p \, dm(z),$$

$$I_2 = 2^p \iint\limits_{\delta<|z|<1} (1-|z|^\rho)^\alpha |z|^\gamma |f(z)|^p \, dm(z),$$

$$I_3 = 2^p \iint\limits_{\delta<|z|<1} (1-|z|^\rho)^\alpha |z|^\gamma |f(\kappa z)|^p \, dm(z).$$

Очевидно, что $I_1 < \varepsilon$ при κ $(\kappa_o \le \kappa < 1)$ достаточно близких к 1, поскольку f равномерно непрерывна в круге $|z| \le \delta$. Кроме того, $I_2 < 2^p\varepsilon$ в силу (1.4). Для оценки I_3 воспользуемся тем известным фактом, что интеграл

$$M_p(f,r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\varphi})|^p \, d\varphi, \quad 0 \le r < 1$$

является неубывающей функцией от r, и поэтому $I_3 \le I_2 < 2^p\varepsilon$ в силу (1.4). В результате из (1.5) следует неравенство $I < (1+2^{p+1})\varepsilon$, $\kappa_o \le \kappa < 1$, и ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ утверждение леммы установлено.

1.2. Интегральное представление. Напомним определение функции типа Миттаг-Леффлера

$$E_\rho(z;\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\mu + k/\rho)}, \quad \rho > 0, \tag{1.6}$$

которая при любом $\mu \in \mathbf{C}$ является целой функцией порядка ρ и типа 1. Используя условие (1.1), докажем следующую теорему.

Теорема 1.1. *Любая функция $f(z) \in H^p_{\rho,\alpha,\gamma}(\mathbb{D})$ допускает интегральное представление*

$$f(z) = \frac{1}{\pi}\iint\limits_{\mathbb{D}} (1-|w|^\rho)^\alpha |w|^\gamma f(w)\Phi_\alpha(z,w)\, dm(w), \tag{1.7}$$

где ядро

$$\Phi_\alpha(z,w) = \frac{\rho}{2\Gamma(1+\alpha)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(1+\alpha+\mu+2k/\rho)}{\Gamma(\mu+2k/\rho)}(z\overline{w})^k =$$

$$= \frac{\rho}{2\Gamma(1+\alpha)}\int_0^\infty e^{-t}E_{\rho/2}(t^{2/\rho}z\overline{w};\mu)t^{\alpha+\mu}\,dt, \quad z\in\mathbb{D}, \quad w\in\overline{\mathbb{D}} \tag{1.8}$$

по z голоморфно в $\mathbb{D}$, а по w антиголоморфно в $\mathbb{D}$ и непрерывно в $\overline{\mathbb{D}}$.

Доказательство. Рассмотрим интегралы

$$I_{k,m} = \frac{1}{\pi}\iint_{\mathbb{D}}(1-|\zeta|^\rho)^\alpha|\zeta|^\gamma\zeta^k\overline{\zeta}^m\,dm(\zeta), \quad k,m=0,1,\ldots.$$

Переходя к полярным координатам $\zeta = re^{i\varphi}$, $dm(\zeta) = rdr\,d\varphi$, получим

$$I_{k,m} = 0, \quad k\neq m, \quad k,m=0,1,\ldots, \tag{1.9}$$

$$I_{k,k} = 2\int_0^1(1-r^\rho)^\alpha r^{\gamma+2k+1}dr = \frac{2}{\rho}B(1+\alpha,\mu+2k/\rho) =$$

$$= \frac{2}{\rho}\frac{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(\mu+2k/\rho)}{\Gamma(1+\mu+\alpha+2k/\rho)}, \quad k=0,1,\ldots \tag{1.10}$$

Совокупность формул (1.9) – (1.10) может быть записана также в виде :

$$\frac{1}{\pi}\iint_{\mathbb{D}}(1-|\zeta|^\rho)^\alpha|\zeta|^\gamma\zeta^k\left[\frac{\rho}{2\Gamma(1+\alpha)}\frac{\Gamma(1+\alpha+\mu+2m/\rho)}{\Gamma(\mu+2m/\rho)}(z\overline{\zeta})^m\right]dm(\zeta) =$$

$$= \begin{cases} z^k & \text{при} \quad m=k \\ 0 & \text{при} \quad m\neq k \end{cases} \qquad m,k=0,1,\ldots$$

Суммируя эти формулы по индексу $m = 0,1,\ldots$, для фиксированного $k\geq 0$ получаем

$$\frac{1}{\pi}\iint_{\mathbb{D}}(1-|\zeta|^\rho)^\alpha|\zeta|^\gamma\zeta^k\Phi_\alpha(z,\zeta)\,dm(\zeta) = z^k, \quad k=0,1,\ldots \tag{1.11}$$

Отметим, что произведенная при этом перемена порядков суммирования по $m\geq 0$ и интегрирования по $\mathbb{D}$ законна, поскольку разложение (1.8) ядра $\Phi_\alpha(z,w)$ при любом фиксированном $z\in\mathbb{D}$ сходится равномерно по переменной $w\in\mathbb{D}$ (в этом можно легко убедиться, пользуясь формулой Стирлинга). Далее, если

$$f(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty}a_k\zeta^k, \quad \zeta\in\mathbb{D},$$

то ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(\kappa\zeta)^k = f(\kappa\zeta), \quad 0 < \kappa < 1$$

сходится равномерно по $\zeta \in \overline{\mathbb{D}}$. Поэтому равенства (1.11) очевидным образом приводят к интегральной формуле

$$\frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{D}} (1 - |\zeta|^\rho)^\alpha |\zeta|^\gamma \Phi_\alpha(z, \zeta) f(\kappa\zeta)\, dm(\zeta) = f(\kappa z), \quad z \in \mathbb{D}, \quad 0 < \kappa < 1. \qquad (1.12)$$

Формула (1.7), которая является основным утверждением теоремы, следует из (1.12) путем предельного перехода при $\kappa \to 1 - 0$ на основе Леммы 1.1. Действительно, в случае $p = 1$ непосредственно, а при $1 < p < \infty$ применением неравенства Гельдера получаем

$$\left| \frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{D}} (1 - |\zeta|^\rho)^\alpha |\zeta|^\gamma \Phi_\alpha(z, \zeta) f(\zeta)\, dm(\zeta) - f(\kappa z) \right| \le$$

$$\le \frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{D}} (1 - |\zeta|^\rho)^\alpha |\zeta|^\gamma |\Phi_\alpha(z, \zeta)| \cdot |f(\zeta) - f(\kappa\zeta)|\, dm(\zeta) \to 0, \quad \kappa \to 1 - 0.$$

Остается установить второе из представлений (1.8) ядра $\Phi_\alpha(z, w)$:

$$\Phi_\alpha(z, w) = \frac{\rho}{2\Gamma(1+\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1 + \alpha + \mu + 2k/\rho)}{\Gamma(\mu + 2k/\rho)} (z\overline{w})^k =$$

$$= \frac{\rho}{2\Gamma(1+\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z\overline{w})^k}{\Gamma(\mu + 2k/\rho)} \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha+\mu+2k/\rho} dt =$$

$$= \frac{\rho}{2\Gamma(1+\alpha)} \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha+\mu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z\overline{w})^k t^{2k/\rho}}{\Gamma(\mu + 2k/\rho)}\, dt =$$

$$= \frac{\rho}{2\Gamma(1+\alpha)} \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha+\mu} E_{\rho/2}(t^{2/\rho} z\overline{w}; \mu)\, dt.$$

Законность перемены порядков суммирования и интегрирования следует из того факта, что $E_{\rho/2}(w; \mu)$ - целая функция порядка $\rho/2$ и типа 1.

1.3. Минимальное свойство. При прежних ограничениях (1.1) обозначим через $L^2_{\rho,\alpha,\gamma}(\mathbb{D})$ множество всех измеримых в круге $\mathbb{D}$ комплекснозначных функций $f(z)$ с конечным интегралом

$$\iint_{\mathbb{D}} (1 - |\zeta|^\rho)^\alpha |\zeta|^\gamma |f(\zeta)|^2\, dm(\zeta).$$

Очевидно, что $L^2_{\rho,\alpha,\gamma}(\mathbb{D})$ – гильбертово пространство со скалярным произведением

$$[f,g] = \iint\limits_{\mathbb{D}} (1-|\zeta|^\rho)^\alpha |\zeta|^\gamma f(\zeta)\overline{g(\zeta)}\, dm(\zeta).$$

Кроме того, пространство $H^2_{\rho,\alpha,\gamma}(\mathbb{D})$ аналитических в $\mathbb{D}$ функций является замкнутым подпространством в $L^2_{\rho,\alpha,\gamma}(\mathbb{D})$. В $L^2_{\rho,\alpha,\gamma}(\mathbb{D})$ определим интегральный оператор

$$T_{\rho,\alpha,\gamma}(f)(z) = \frac{1}{\pi}\iint\limits_{\mathbb{D}} (1-|\zeta|^\rho)^\alpha |\zeta|^\gamma \Phi_\alpha(z,\zeta) f(\zeta)\, dm(\zeta), \quad z\in\mathbb{D}.$$

Докажем следующую теорему.

Теорема 1.2. *Оператор $T_{\rho,\alpha,\gamma}$ действует в пространстве $L^2_{\rho,\alpha,\gamma}(\mathbb{D})$ как ортогональный проектор на замкнутое подпространство $H^2_{\rho,\alpha,\gamma}(\mathbb{D})$.*

Доказательство. Пусть $f\in L^2_{\rho,\alpha,\gamma}(\mathbb{D})$. Тогда функция $T_{\rho,\alpha,\gamma}(f)(z)$ определена при всех $z\in\mathbb{D}$ и аналитична в круге $\mathbb{D}$, так как ядро $\Phi_\alpha(z,w)$ голоморфно по z и равномерно ограничено по $|z|\le r$, $|w|\le 1$ $(0<r<1)$. Согласно общей теории гильбертовых пространств справедливо представление

$$L^2_{\rho,\alpha,\gamma}(\mathbb{D}) = H^2_{\rho,\alpha,\gamma}(\mathbb{D}) \oplus \tilde{H}^2_{\rho,\alpha,\gamma}(\mathbb{D}),$$

где $\tilde{H}^2_{\rho,\alpha,\gamma}(\mathbb{D})$ - ортогональное дополнение к $H^2_{\rho,\alpha,\gamma}(\mathbb{D})$. В частности, функция f единственным образом представляется в виде

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z), \quad z\in\mathbb{D}, \tag{1.13}$$

где $f_1\in H^2_{\rho,\alpha,\gamma}(\mathbb{D})$, $f_2\in\tilde{H}^2_{\rho,\alpha,\gamma}(\mathbb{D})$. Для доказательства теоремы нам следует установить тождество

$$T_{\rho,\alpha,\gamma}(f)(z) \equiv f_1(z), \quad z\in\mathbb{D}.$$

Так как $f_1\in H^2_{\rho,\alpha,\gamma}(\mathbb{D})$, то из (1.13) и Теоремы 1.1 получаем

$$T_{\rho,\alpha,\gamma}(f)(z) = T_{\rho,\alpha,\gamma}(f_1)(z) + T_{\rho,\alpha,\gamma}(f_2)(z) = f_1(z) + T_{\rho,\alpha,\gamma}(f_2)(z), \quad z\in\mathbb{D}.$$

Следовательно, нам остается убедиться в том, что

$$T_{\rho,\alpha,\gamma}(f_2)(z) = 0, \quad z\in\mathbb{D}. \tag{1.14}$$

С этой целью заметим, что при фиксированном $z \in \mathbb{D}$

$$T_{\rho,\alpha,\gamma}(f_2)(z) = \frac{1}{\pi} \iint\limits_{\mathbb{D}} (1-|\zeta|^\rho)^\alpha |\zeta|^\gamma \Phi_\alpha(z,\zeta) f_2(\zeta)\, dm(\zeta) = \frac{1}{\pi}[f_2(\zeta), \overline{\Phi_\alpha(z,\zeta)}]. \quad (1.15)$$

Но при любом фиксированном $z \in \mathbb{D}$, $\overline{\Phi_\alpha(z,\zeta)}$ как функция от ζ, очевидно, принадлежит пространству $H^2_{\rho,\alpha,\gamma}(\mathbb{D})$. И желаемое тождество (1.14) следует из (1.15), поскольку f_2 принадлежит ортогональному дополнению $H^2_{\rho,\alpha,\gamma}(\mathbb{D})$.

Из Теоремы 1.2 в качестве следствия вытекает теорема о наилучшем приближении.

Теорема 1.3. *Пусть* $f(z) \in L^2_{\rho,\alpha,\gamma}(\mathbb{D})$. *Тогда минимум функционала*

$$\mathcal{D}(f,g) = \iint\limits_{\mathbb{D}} (1-|\zeta|^\rho)^\alpha |\zeta|^\gamma |f(\zeta)-g(\zeta)|^2\, dm(\zeta),$$

определенного на семействе функций $g(z) \in H^2_{\rho,\alpha,\gamma}(\mathbb{D})$, *реализует функция*

$$g_f(z) = T_{\rho,\alpha,\gamma}(f)(z) \in H^2_{\rho,\alpha,\gamma}(\mathbb{D}).$$

Иными словами

$$\mathcal{D}(f,g) \geq \mathcal{D}(f,g_f), \quad g \in H^2_{\rho,\alpha,\gamma}(\mathbb{D}). \quad (1.16)$$

Доказательство. Заметим, что $\mathcal{D}(f,g) = [f-g, f-g]$. Далее, произвольная функция $f \in L^2_{\rho,\alpha,\gamma}(\mathbb{D})$ представляется в виде $f = g_f + \tilde{f}$, где $\tilde{f}$ принадлежит $\tilde{H}^2_{\rho,\alpha,\gamma}(\mathbb{D})$, т.е. $\tilde{f}$ ортогональна пространству $H^2_{\rho,\alpha,\gamma}(\mathbb{D})$. Теперь, если $g \in H^2_{\rho,\alpha,\gamma}(\mathbb{D})$, то

$$\mathcal{D}(f,g) = [f-g, f-g] = [\tilde{f} + (g_f - g), \tilde{f} + (g_f - g)] =$$

$$= [\tilde{f},\tilde{f}] + [g_f - g, g_f - g] + [\tilde{f}, g_f - g] + [g_f - g, \tilde{f}].$$

Но $[\tilde{f}, g_f - g] = [g_f - g, \tilde{f}] = 0$, так как $\tilde{f} \in \tilde{H}^2_{\rho,\alpha,\gamma}(\mathbb{D})$, а $g_f - g \in H^2_{\rho,\alpha,\gamma}(\mathbb{D})$. Следовательно

$$\mathcal{D}(f,g) = [\tilde{f},\tilde{f}] + [g_f - g, g_f - g] = [f - g_f, f - g_f] + [g_f - g, g_f - g] =$$

$$= \mathcal{D}(f,g_f) + \mathcal{D}(g_f,g) \geq \mathcal{D}(f,g_f)$$

и, таким образом, (1.16) установлено.

§2. ТЕОРЕМЫ ОБ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ В ЕДИНИЧНОМ КРУГЕ

2.1. Интегральные представления в пространстве $C^1(\overline{\mathbb{D}})$. Прежде всего напомним определение хорошо известных дифференциальных операторов

$$D=\frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right),\quad \overline{D}=\frac{\partial}{\partial \overline{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right),\quad z=x+iy.$$

Отметим, что для заданной в некоторой комплексной области непрерывно дифференцируемой комплекснозначной функции f условия Коши-Римана (т.е. условия голоморфности) могут быть записаны как $\overline{D}f(z)=0$. Далее, как и выше, $\mathbb{D}$ - единичный круг в $\mathbb{C}$, а $f\in C^1(\overline{\mathbb{D}})$, если эта функция и все ее производные первого порядка непрерывны в замкнутом круге $\overline{\mathbb{D}}$. Как известно, для функций $f\in C^1(\overline{\mathbb{D}})$ имеет место формула Коши-Грина

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta-\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\mathbb{D}}\frac{\overline{D}f(\zeta)}{\zeta-z}\,dm(\zeta),\quad z\in\mathbb{D}. \tag{2.1}$$

Эта формула для аналитических в $\mathbb{D}$ функций переходит в известную формулу для единичного круга.[1]

В связи с Теоремой 1.1 мы естественным образом приходим к задаче получения формулы типа Коши-Грина

$$\begin{aligned} f(z)=\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\mathbb{D}}(1-|\zeta|^\rho)^\alpha|\zeta|^\gamma\Phi_\alpha(z,\zeta)f(\zeta)\,dm(\zeta)-\\ -\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\mathbb{D}}\frac{\overline{D}f(\zeta)}{\zeta-z}\Psi_\alpha(z,\zeta)\,dm(\zeta),\quad z\in\mathbb{D}\end{aligned} \tag{2.2}$$

для функций $f\in C^1(\overline{\mathbb{D}})$. Очевидно, для аналитических в $\mathbb{D}$ функций $f\in C^1(\overline{\mathbb{D}})$, (2.2) переходит в интегральную формулу (1.7) Теоремы 1.1. Мы *a priori* предполагаем, что неизвестное ядро Ψ_α, удовлетворяет следующим условиям :

[1]Хорошо известно, что интегральная формула Коши на самом деле справедлива для значительно более широких классов аналитических в круге $\mathbb{D}$ функций (например, для классов Харди H^p, $p\geq 1$). Что касается формулы Коши-Грина (2.1), то и она остается в силе для более широких, чем $C^1(\overline{\mathbb{D}})$, классов функций. Однако, в данной работе автор, избрав себе основной целью получение новых интегральных формул, счел целесообразным оставаться в рамках класса $C^1(\overline{\mathbb{D}})$.

(a) Функция $\Psi_\alpha(z,\zeta)$ определена при $z \in \mathbb{D}, \zeta \in \overline{\mathbb{D}}$ и, при фиксированном $z \in \mathbb{D}$ принадлежит, например, классу $C^1(\mathbb{D})$,

(b) $\Psi_\alpha(z,\zeta) \equiv 0$ при $z \in \mathbb{D}$ и $\zeta \in \partial\mathbb{D}$,

(c) $\Psi_\alpha(z,z) \equiv 1$ при любом $z \in \mathbb{D}$.

Ниже мы увидим, что эти условия естественны.

Итак, пусть функция $f \in C^1(\overline{\mathbb{D}})$ произвольна. Для фиксированного $z \in \mathbb{D}$ введем в рассмотрение дифференциальную форму

$$\varphi_z(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\frac{f(\zeta)\Psi_\alpha(z,\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta, \quad \zeta \in \overline{\mathbb{D}} \setminus \{z\}. \tag{2.3}$$

Далее, выберем $\varepsilon > 0$ настолько малым, чтобы круг $\mathbb{D}_\varepsilon(z) = \{\zeta \in \mathbf{C} : |\zeta - z| < < \varepsilon\}$ вместе с границей $\partial\mathbb{D}_\varepsilon(z) = \gamma_\varepsilon(z)$ лежал внутри $\mathbb{D}$. Затем применим к дифференциальной форме $\varphi_z(z)$ формулу Стокса в замкнутой области $\overline{\mathbb{D}}\setminus\mathbb{D}_\varepsilon(z)$:

$$\int_{\partial\mathbb{D}} \varphi_z(\zeta) - \int_{\gamma_\varepsilon(z)} \varphi_z(\zeta) = \int\!\!\int_{\mathbb{D}\setminus\mathbb{D}_\varepsilon(z)} d\varphi_z(\zeta) \tag{2.4}$$

и заметим, что $\int_{\partial\mathbb{D}} \varphi_z(\zeta) = 0$, в силу свойства (b) ядра Ψ_α. Кроме того

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma_\varepsilon(z)} \varphi_z(\zeta) = f(z)$$

в силу свойства (c). В результате, устремляя $\varepsilon \downarrow 0$ в формуле (2.4), получим $-f(z) = \iint\limits_{\mathbb{D}} d\varphi_z(\zeta)$. Записав затем $d\varphi_z(\zeta)$ в виде (2.3) и принимая во внимание, что $\overline{D}(1/\zeta - z) \equiv 0$, $\zeta \in \overline{\mathbb{D}} \setminus \{z\}$, приходим к формуле

$$f(z) = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\mathbb{D}} \frac{f(\zeta)\overline{D}_\zeta\Psi_\alpha(z,\zeta)}{\zeta - z}\,dm(\zeta) - \frac{1}{\pi}\iint\limits_{\mathbb{D}} \frac{\overline{D}f(\zeta)}{\zeta - z}\Psi_\alpha(z,\zeta)\,dm(\zeta), \quad z \in \mathbb{D}, \tag{2.5}$$

справедливой, таким образом, для произвольной функции $f \in C^1(\overline{\mathbb{D}})$. Сравнивая формулы (2.2) и (2.5), легко заметить, что вторые слагаемые в их правых частях совпадают. Для совпадения и первых слагаемых предположим, что соотношение

$$\overline{D}_\zeta\Psi_\alpha(z,\zeta) = -(\zeta - z)(1 - |\zeta|^\rho)^\alpha|\zeta|^\gamma\Phi_\alpha(z,\zeta), \quad \zeta \in \mathbb{D} \tag{2.6}$$

выполняется для каждого фиксированного $z \in \mathbb{D}$. Таким образом, задача нахождения интегральной формулы (2.2) типа Коши-Грина для класса функций $C^1(\overline{\mathbb{D}})$ свелась к поиску ядра $\Psi_\alpha(z,\zeta)$ $(z \in \mathbb{D}, \zeta \in \overline{\mathbb{D}})$, удовлетворяющего условиям (a), (b), (c), а также уравнению (2.6).

Лемма 2.1. *Если существует ядро, удовлетворяющее условиям (a), (b), (c) и уравнению (2.6), то для него справедливо представление вида*

$$\Psi_\alpha(z,w) = 1 - \frac{\rho(w-z)}{\Gamma(1+\alpha)w}\int_0^{|w|}(1-|r|^\rho)^\alpha r^{\gamma+1}\int_0^\infty e^{-t}t^{\alpha+\mu}E_{\rho/2}(t^{2/\rho}r^2 z/w;\mu)\,dt\,dr,$$
$$z\in\mathbb{D},\quad w\in\mathbb{D}\setminus\{0\}. \tag{2.7}$$

Доказательство. Зафиксируем $z\in\mathbb{D}$, запишем формулу Коши-Грина (2.1) для функции $\Psi_\alpha(z,\zeta)\in C^1(\overline{\mathbb{D}})$:

$$\Psi_\alpha(z,w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}}\frac{\Psi_\alpha(z,\zeta)}{\zeta-w}\,d\zeta - \frac{1}{\pi}\iint\limits_{\mathbb{D}}\frac{\overline{D}_\zeta\Psi_\alpha(z,\zeta)}{\zeta-w}\,dm(\zeta),\quad w\in\mathbb{D}.$$

Отсюда, ввиду условия (b) и (2.6)

$$\Psi_\alpha(z,w) = \frac{1}{\pi}\iint\limits_{\mathbb{D}}(1-|\zeta|^\rho)^\alpha|\zeta|^\gamma\Phi_\alpha(z,\zeta)\frac{\zeta-z}{\zeta-w}\,dm(\zeta) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\iint\limits_{\mathbb{D}}(1-|\zeta|^\rho)^\alpha|\zeta|^\gamma\Phi_\alpha(z,\zeta)\,dm(\zeta) + \frac{w-z}{\pi}\iint\limits_{\mathbb{D}}(1-|\zeta|^\rho)^\alpha|\zeta|^\gamma\frac{\Phi_\alpha(z,\zeta)}{\zeta-w}\,dm(\zeta),$$
$$z\in\mathbb{D},\quad w\in\mathbb{D}.$$

Заметим теперь, что первое слагаемое в правой части тождественно равно 1 (это легко следует из Теоремы 1.1, если положим $f\equiv 1$). Поэтому, с учетом (1.8), получаем

$$\Psi_\alpha(z,w) = 1 + \frac{\rho}{2\Gamma(1+\alpha)}\frac{w-z}{\pi}\iint\limits_{\mathbb{D}}\frac{(1-|\zeta|^\rho)^\alpha|\zeta|^\gamma}{\zeta-w}\times$$
$$\times\int_0^\infty e^{-t}t^{\alpha+\mu}E_{\rho/2}(t^{2/\rho}z\overline{\zeta};\mu)\,dt\,dm(\zeta),\quad z\in\mathbb{D},\quad w\in\mathbb{D}.$$

Меняя порядок интегрирования и переходя к полярным координатам, будем иметь

$$\Psi_\alpha(z,w) = 1 + \frac{\rho(w-z)}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^\infty e^{-t}t^{\alpha+\mu}\int_0^1(1-r^\rho)^\alpha\frac{r^{\gamma+1}}{2\pi i}\times$$
$$\times\int_{|\zeta|=r}\frac{E_{\rho/2}(t^{2/\rho}r^2 z/\zeta;\mu)}{\zeta(\zeta-w)}\,d\zeta\,dr\,dt,\quad z\in\mathbb{D},\quad w\in\mathbb{D}. \tag{2.8}$$

Далее, разлагая функцию типа Миттаг-Леффлера в ряд, из теоремы о вычетах получим

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=r}\frac{E_{\rho/2}(t^{2/\rho}r^2 z/\zeta;\mu)}{\zeta(\zeta-w)}\,d\zeta = \sum_{k=0}^\infty\frac{t^{2k/\rho}r^{2k}z^k}{\Gamma(\mu+2k/\rho)}\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=r}\frac{d\zeta}{\zeta^{k+1}(\zeta-w)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k/\rho} r^{2k} z^k}{\Gamma(\mu + 2k/\rho)} \times \begin{cases} 0, & \text{если } r > |w| \\ -w^{-k-1}, & \text{если } r < |w| \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{если } r > |w| \\ -w^{-1} E_{\rho/2}(t^{2/\rho} r^2 z/w; \mu), & \text{если } r < |w|. \end{cases}$$

Теперь из (2.8) следует, что

$$\Psi_\alpha(z, w) = 1 + \frac{\rho(w - z)}{\Gamma(1 + \alpha)} \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha+\mu} \int_0^{|w|} (1 - r^\rho)^\alpha r^{\gamma+1} \times$$
$$\times \left(-\frac{1}{w}\right) E_{\rho/2}(t^{2/\rho} r^2 z/w; \mu)\, dr\, dt, \quad z \in \mathbb{D}, \quad w \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$$

После упрощений и перемены порядков интегрирования получается формула (2.7) и, тем самым, доказательство завершено.

После того, как Лемма 2.1 доказана, естественно определить ядро Ψ_α при $z \in \mathbb{D}$, $w \in \overline{\mathbb{D}} \setminus \{0\}$ по формуле (2.7) и выявить его свойства.

Лемма 2.2. *Пусть ядро $\Psi_\alpha(z, w)$ определено формулой (2.7). Тогда при каждом фиксированном $z \in \mathbb{D}$ справедливы следующие утверждения :*

1. Функция $\Psi_\alpha(z, w)$ принадлежит классу $C^1(\overline{\mathbb{D}} \setminus \{0\})$ и в $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ удовлетворяет уравнению (2.6).

2. При $w \to 0$ справедливы представления :

$$\Psi_\alpha(z, w) = 1 + O(|w|^{\gamma+1}), \qquad \text{если } z \neq 0, \tag{2.9}$$

$$\Psi_\alpha(0, w) = 1 + O(|w|^{\gamma+2}). \tag{2.10}$$

3. $\Psi_\alpha(z, w) = 0, \qquad w \in \partial\mathbb{D}.$

4. $\Psi_\alpha(z, z) = 1, \qquad$ *если* $z \neq 0,$ (2.11)

$\lim_{w \to 0} \Psi_\alpha(o, w) = 1.$ (2.12)

Доказательство. Из формулы (2.7) легко следует, что $\Psi_\alpha(z, w)$, как функция от w, принадлежит классу $C^1(\overline{\mathbb{D}} \setminus \{0\})$. По правилу дифференцирования сложной функции имеем

$$\frac{\partial \Psi_\alpha(z, w)}{\partial \overline{w}} = -\frac{\rho}{\Gamma(1 + \alpha)} \frac{w - z}{w} (1 - |w|^\rho)^\alpha |w|^{\gamma+1} \times$$

$$\times \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha+\mu} E_{\rho/2}(t^{2/\rho} |w|^2 z/w; \mu)\, dt\, \frac{\partial |w|}{\partial \overline{w}}, \quad w \in \overline{\mathbb{D}} \setminus \{0\}.$$

И поскольку $\dfrac{\partial|w|}{\partial\overline{w}} = \dfrac{w}{2|w|}$, то используя (1.8) получаем (2.6). Тем самым, утверждение 1 доказано. Далее, (1.8) очевидным образом влечет оценку

$$|\Psi_\alpha(z,w)-1| \le \frac{\rho}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^\infty e^{-t}t^{\alpha+\mu}E_{\rho/2}(t^{2/\rho}|z|;\mu)\,dt\,\frac{|w-z|}{|w|}\times$$
$$\times\int_0^{|w|}(1-r^\rho)^\alpha r^{\gamma+1}\,dr, \quad w\in\overline{\mathbb{D}}\setminus\{0\},$$

откуда легко следуют (2.9) и (2.10). Затем, если $w\in\partial\mathbb{D}$, т.е. $|w|=1$, то после простых преобразований получаем

$$\Psi_\alpha(z,w) = 1-\frac{\rho}{\Gamma(1+\alpha)}\frac{w-z}{w}\int_0^\infty e^{-t}t^{\alpha+\mu}\sum_{k=0}^\infty\frac{t^{2k/\rho}(z\overline{w})^k}{\Gamma(\mu+2k/\rho)}\times$$
$$\times\int_0^1(1-r^\rho)^\alpha r^{2k+\gamma+1}\,dr\,dt = 1-\frac{w-z}{w\Gamma(1+\alpha)}\times$$
$$\times\sum_{k=0}^\infty\frac{B(1+\alpha,\mu+2k/\rho)(z\overline{w})^k}{\Gamma(\mu+2k/\rho)}\int_0^\infty e^{-t}t^{\alpha+\mu+2k/\rho}\,dt =$$
$$=1-\frac{w-z}{w}\sum_{k=0}^\infty(z\overline{w})^k = 1-\frac{w-z}{w}\cdot\frac{1}{1-z\overline{w}} = 0.$$

Что же касается утверждения 4, то (2.11) непосредственно следует из (2.7), а (2.12) является следствием (2.10), так как $\gamma > -2$. Итак, лемма полностью доказана.

Замечание 2.1. Напомним, что нашей целью являлось нахождение ядра, удовлетворяющего условиям (a), (b), (c) и уравнению (2.6). А между тем, как это видно из Леммы 2.2, построенное нами по формуле (2.7) ядро Ψ_α удовлетворяет несколько иным условиям. Тем не менее легко видеть, что при этих условиях проведенные выше эвристические рассуждения (вплоть до получения формулы (2.5)) сохраняют силу. Поэтому справедлива следующая основная

Теорема 2.1. *Пусть ядра Φ_α и Ψ_α определены, соответственно, по формулам (1.8) и (2.7). Тогда произвольная функция $f\in C^1(\overline{\mathbb{D}})$ представляется в виде (2.2).*

Замечание 2.2. Первое слагаемое в правой части (2.2) - оператор ортогонального проектирования $L^2_{\rho,\alpha,\gamma}(\mathbb{D})$ на свое подпространство $H^2_{\rho,\alpha,\gamma}(\mathbb{D})$ (см. Теорему 1.2). Следовательно, второе слагаемое в формуле (2.2) порождает оператор ортогонального проектирования $C^1(\overline{\mathbb{D}})\subset L^2_{\rho,\alpha,\gamma}(\mathbb{D})$ на $H^2_{\rho,\alpha,\gamma}(\mathbb{D})$.

Следующая лемма дополняет утверждения 1 – 4 Леммы 2.2

Лемма 2.3. *1. При каждом* $z \in \mathbb{D}$ *справедливо предельное соотношение*

$$\lim_{w \to e^{i\theta}} \frac{\Psi_\alpha(z, w)}{(1 - |w|^\rho)^{1+\alpha}} = \frac{1 - e^{-i\theta} z}{\Gamma(2 + \alpha)} \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha+\mu} E_{\rho/2}(t^{2/\rho} e^{-i\theta} z; \mu)\, dt. \qquad (2.13)$$

2. Для произвольного компакта $K \subset \mathbb{D}$ *равномерно по* $z \in K$

$$\Psi_\alpha(z, w) = O\{(1 - |w|^\rho)^{1+\alpha}\} \quad \text{при } |w| \to 1. \qquad (2.14)$$

Краткое доказательство. Используя легко проверяемое тождество

$$1 \equiv \frac{\rho(w - z)}{\Gamma(1 + \alpha) w} \int_0^1 (1 - r^\rho)^\alpha r^{\gamma+1} \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha+\mu} E_{\rho/2}(t^{2/\rho} r^2 z/w; \mu)\, dt\, dr,$$
$$|z| < |w| \le 1,$$

запишем формулу (2.7) в виде

$$\Psi_\alpha(z, w) = \frac{\rho}{\Gamma(1 + \alpha)} (1 - \frac{z}{w}) \int_{|w|}^1 (1 - r^\rho)^\alpha r^{\gamma+1} \times$$

$$\times \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha+\mu} E_{\rho/2}(t^{2/\rho} r^2 z/w; \mu)\, dt\, dr, \quad |z| < |w| \le 1.$$

Отсюда соотношения (2.13) и (2.14) получаются стандартными рассуждениями, которые мы опускаем.

2.2. Частный случай Теоремы 2.1. Рассмотрим частный случай Теоремы 2.1, имеющий принципиальное значение. Пусть $\rho = 2$, $\alpha > -1$, $\gamma = 0$ (и тогда $\mu = 1$). В этом случае из (1.8) следует, что

$$\Phi_\alpha(z, w) = \frac{1}{\Gamma(1 + \alpha)} \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha+1} E_1(t z \overline{w}; 1)\, dt =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1 + \alpha)} \int_0^\infty e^{-t(1 - z\overline{w})} t^{\alpha+1}\, dt = \frac{\alpha + 1}{(1 - z\overline{w})^{\alpha+2}} \qquad (2.15)$$

при любых $z \in \mathbb{D}$ и $w \in \overline{\mathbb{D}}$. Далее, из (2.7) следует, что при $z \in \mathbb{D}$ и $w \in \overline{\mathbb{D}} \setminus \{0\}$ имеем

$$\begin{aligned} \Psi_\alpha(z, w) &= 1 - \frac{w - z}{\Gamma(1 + \alpha) w} \int_0^{|w|^2} (1 - x)^\alpha \int_0^\infty e^{-t(1 - xz/w)} t^{\alpha+1}\, dt\, dx = \\ &= 1 - (\alpha + 1)(1 - \frac{z}{w}) I_\alpha(z, w), \end{aligned} \qquad (2.16)$$

$$I_\alpha(z, w) = \int_0^{|w|^2} \frac{(1 - x)^\alpha}{(1 - xz/w)^{2+\alpha}}\, dx. \qquad (2.17)$$

Заметим, что

$$I_\alpha(z,w) = I_\alpha^{(1)} + I_\alpha^{(2)}, \tag{2.18}$$

где

$$I_\alpha^{(1)} = \int_0^{|w|^2} \frac{(1-x)^{\alpha+1}}{(1-xz/w)^{2+\alpha}}\,dx = \frac{w}{z(\alpha+1)}\left[\left(\frac{1-|w|^2}{1-z\overline{w}}\right)^{\alpha+1} - 1\right] +$$

$$+\frac{w}{z}\int_0^{|w|^2} \frac{(1-x)^{\alpha}}{(1-xz/w)^{\alpha+1}}\,dx, \tag{2.19}$$

$$I_\alpha^{(2)} = \int_0^{|w|^2} \frac{(1-x)^{\alpha}x}{(1-xz/w)^{2+\alpha}}\,dx. \tag{2.20}$$

Из (2.17) - (2.20) следует соотношение

$$I_\alpha(z,w) = \frac{w}{z(\alpha+1)}\left[\left(\frac{1-|w|^2}{1-z\overline{w}}\right)^{\alpha+1} - 1\right] + \frac{w}{z}I_\alpha(z,w).$$

Отсюда

$$(\alpha+1)(1-z/w)I_\alpha(z,w) = 1 - \left(\frac{1-|w|^2}{1-z\overline{w}}\right)^{\alpha+1}. \tag{2.21}$$

Наконец, сравнением (2.16) и (2.21) получим, что

$$\Psi_\alpha(z,w) = \left(\frac{1-|w|^2}{1-z\overline{w}}\right)^{\alpha+1}, \quad z\in\mathbb{D}, \quad w\in\overline{\mathbb{D}}\setminus\{0\}. \tag{2.22}$$

Заметим, что в рассмотренном частном случае ограничение $w \neq 0$ оказывается излишним.

Комбинируя формулы (2.2), (2.15) и (2.22), мы приходим к утверждению, которое, хотя и является частным случаем Теоремы 2.1, целесообразно сформулировать в виде отдельной теоремы.

Теорема 2.2. *Если $f\in C^1(\overline{\mathbb{D}})$, то при любом $\alpha > -1$ справедлива интегральная формула (0.3).*

Таким образом, отмеченная во введении формула (0.3) представляет собой специальный случай (2.2).

§3. ПРЕДЕЛЬНЫЙ ПЕРЕХОД ОТ КРУГА К ПЛОСКОСТИ

В этом параграфе мы будем опираться на классический результат, принадлежащий Лапласу (см., например, [9], Раздел II, Глава 5, Задача 201), который можно сформулировать следующим образом.

Пусть функции $\varphi(x)$, $h(x)$ и $f(x) = \exp[h(x)]$ определены в конечном или бесконечном интервале $a \le x \le b$ и удовлетворяют следующим условиям :

1. При всех целых $r = 0, 1, ...$ (или просто при всех $0 \le r < \infty$) функции $\varphi(x)[f(x)]^r = \varphi(x)e^{rh(x)}$ абсолютно интегрируемы в $[a, b]$.[2]

2. Функция $h(x)$ в некоторой точке $\xi \in (a, b)$ достигает максимума, причем в каждом замкнутом отрезке, не содержащем ξ, $\sup h(x) < h(\xi)$.

3. В некоторой окрестности точки ξ существует и непрерывна $h''(x)$, причем $h''(\xi) < 0$.

4. Функция $\varphi(x)$ непрерывна в точке ξ, причем $\varphi(\xi) \neq 0$.

Тогда при $r \to \infty$ имеет место асимптотическая формула[3]

$$\int_a^b \varphi(x)[f(x)]^r\,dx \sim \varphi(\xi)[f(\xi)]^{r+1/2}\sqrt{-\frac{2\pi}{rf''(\xi)}} = \varphi(\xi)e^{rh(\xi)}\sqrt{-\frac{2\pi}{rh''(\xi)}}. \qquad (3.1)$$

Мы будем рассматривать класс $C^1(\mathbf{C})$ функций $F(z)$, непрерывных во всей z-плоскости $\mathbf{C}$ вместе со своими производными первого порядка. Если $F(z)$ - произвольная функция из $C^1(\mathbf{C})$, то очевидно при любом $R > 0$ $F(z) \in C^1(\overline{\mathbb{D}_R})$, где $\mathbb{D}_R = \{z \in \mathbf{C} : |z| < R\}$. Следовательно, простая замена переменных в интегральном представлении (2.2) Теоремы 2.1 приводит к формуле

$$F(z) = \frac{1}{\pi}\iint\limits_{\mathbb{D}_R} F(w)(1 - |w/R|^\rho)^\alpha |w|^\gamma R^{-\mu\rho}\Phi_\alpha\left(\frac{z}{R}, \frac{w}{R}\right)\,dm(w) -$$

$$-\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\mathbb{D}_R} \frac{\overline{D}F(w)}{w - z}\Psi_\alpha\left(\frac{z}{R}, \frac{w}{R}\right)\,dm(w), \quad z \in \mathbb{D}_R \qquad (3.2)$$

при любом $R > 0$, и ρ, γ, α, μ, удовлетворяющим условиям (1.1) , (1.2). Ядра Φ_α и Ψ_α определяются соответственно формулами (1.8) и (2.7). Зафиксировав

[2] В упомянутой Задаче 201 эти условия формулируются для значений $r = 0, 1, ...$, но нетрудно заметить, что результат остается в силе вообще для всех $r \ge 0$.

[3] Здесь и в дальнейшем запись $a(r) \sim b(r)$, $r \to \infty$ означает, что

$$\lim_{r\to\infty} \frac{a(r)}{b(r)} = 1.$$

произвольное $\sigma > 0$, положим

$$r = R^\rho, \qquad \alpha = \sigma R^\rho = \sigma r \tag{3.3}$$

и введем обозначения

$$\Phi_{\sigma,r}(z,w) = R^{-\mu\rho}\Phi_\alpha\left(\frac{z}{R},\frac{w}{R}\right) \equiv R^{-\mu\rho}\Phi_{\sigma r}\left(\frac{z}{R},\frac{w}{R}\right), \quad z,w\in \mathbb{D}_R, \tag{3.4}$$

$$\Psi_{\sigma,r}(z,w) = \Psi_\alpha\left(\frac{z}{R},\frac{w}{R}\right) \equiv \Psi_{\sigma r}\left(\frac{z}{R},\frac{w}{R}\right), \quad z\in \mathbb{D}_R, \quad w\in \mathbb{D}_R\setminus\{0\}. \tag{3.5}$$

Тогда, с учетом (1.8), (2.7) и (3.3) – (3.5), будем иметь

$$\Phi_{\sigma,r}(z,w) = \frac{\rho\sigma^\mu(\sigma r)^{r\sigma+1}}{2\Gamma(r\sigma+1)}\int_0^\infty [e^{-\sigma x}x^\sigma]^r x^\mu E_{\rho/2}(\sigma^{2/\rho}x^{2/\rho}z\overline{w};\mu)\,dx,$$
$$z,w\in \mathbb{D}_R, \tag{3.6}$$

$$\Psi_{\sigma,r}(z,w) = 1 - \frac{\rho\sigma^\mu(w-z)}{w}\int_0^{|w|}\left(1-\frac{\tau^\rho}{r}\right)^{r\sigma}\tau^{\gamma+1}J_{\sigma,r}(\tau)d\tau,$$
$$z\in \mathbb{D}_R, \quad w\in \overline{\mathbb{D}_R}\setminus\{0\}, \tag{3.7}$$

где

$$J_{\sigma,r}(\tau) = \frac{(\sigma r)^{r\sigma+1}}{\Gamma(r\sigma+1)}\int_0^\infty [e^{-\sigma x}x^\sigma]^2 x^\mu E_{\rho/2}(\sigma^{2/\rho}x^{2/\rho}\tau^2 z/w;\mu)\,dx.$$

Кроме того, формула (3.2) принимает вид

$$F(z) = \frac{1}{\pi}\iint\limits_{\mathbb{D}_R} F(w)\left(1-\left(\frac{|w|}{R}\right)^\rho\right)^{\sigma R^\rho}|w|^\gamma\Phi_{\sigma,r}(z,w)\,dm(w)-$$

$$-\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\mathbb{D}_R}\frac{\overline{D}F(w)}{w-z}\Psi_{\sigma,r}(z,w)\,dm(w), \quad z\in \mathbb{D}_R. \tag{3.8}$$

Теперь мы намерены в этой формуле устремить $R\to+\infty$ (или, что то же самое, устремить $r\to+\infty$). Для этого, опираясь на сформулированный выше классический результат Лапласа, выясним асимптотическое поведение ядер $\Phi_{\sigma,r}(z,w)$ и $\Psi_{\sigma,r}(z,w)$ при $r\to+\infty$. В случае интеграла (3.6) положим

$$\varphi(x) = x^\mu E_{\rho/2}(\sigma^{2/\rho}x^{2/\rho}z\overline{w};\mu), \quad x\in[0,\infty),$$

$$f(x) = e^{-\sigma x}x^\sigma, \quad h(x) = \ln f(x) = -x\sigma + \sigma\ln x, \quad x\in[0,\infty),$$

а для интеграла (3.7) при тех же $f(x), h(x)$ возьмем

$$\varphi(x) = x^{\mu} E_{\rho/2}(\sigma^{2/\rho} x^{2/\rho} \tau^2 z/w; \mu), \quad x \in [0, \infty).$$

Тогда легко видеть, что в обоих рассматриваемых случаях функция $h(x)$ достигает максимума в точке $\xi = 1$, $h''(\xi) = -\sigma < 0$ и $\varphi(\xi) \neq 0$. Таким образом, условия, необходимые для справедливости асимптотической формулы типа (3.1), соблюдены. Воспользовавшись формулой Стирлинга

$$\Gamma(r\sigma + 1) \sim \sqrt{2\pi}(r\sigma)^{r\sigma + 1/2} e^{-r\sigma}, \quad r \to +\infty$$

получим следующую теорему.

Теорема 3.1. *1. При любых $z, w \in \mathbf{C}$ справедливо предельное соотношение*

$$\lim_{r \to +\infty} \Phi_{\sigma,r}(z, w) = \frac{\rho\sigma^{\mu}}{2} E_{\rho/2}(\sigma^{2/\rho} z\overline{w}; \mu) = \Phi_{\sigma,\infty}(z, w).$$

2. При $z \in \mathbf{C}$ и $w \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ справедливо предельное соотношение

$$\lim_{r \to +\infty} \Psi_{\sigma,r}(z, w) = 1 - \rho\sigma^{\mu} \frac{w - z}{w} \int_0^{|w|} e^{-\sigma|\tau|^{\rho}} \tau^{\gamma+1} \times$$
$$\times E_{\rho/2}(\sigma^{2/\rho} \tau^2 z/w; \mu)\, d\tau \equiv \Psi_{\sigma,\infty}(z, w).$$

Наконец, в (3.8) устремляя $R \to +\infty$ в формуле (3.8), получаем основную теорему этого параграфа.

Теорема 3.2. *Если функция $F(z) \in C^1(\mathbf{C})$ подчинена некоторым дополнительным ограничениям, то для нее справедлива интегральная формула*

$$F(z) = \frac{1}{\pi} \iint\limits_{\mathbf{C}} F(w) e^{-\sigma|w|^{\rho}} |w|^{\gamma} \Phi_{\sigma,\infty}(z, w)\, dm(w) -$$
$$- \frac{1}{\pi} \iint\limits_{\mathbf{C}} \frac{\overline{D}F(w)}{w - z} \Psi_{\sigma,\infty}(z, w)\, dm(w), \quad z \in \mathbf{C}. \tag{3.9}$$

Замечание 3.1. Упомянутые в формулировке Теоремы 3.2 дополнительные ограничения на функцию $F(z) \in C^1(\mathbf{C})$ будут указаны в следующем параграфе, где проводится прямое доказательство формулы (3.9), во многом схожее с доказательством Теоремы 2.1.

§4. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ В КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

Пусть $\rho, \sigma > 0$, $\gamma > -2$ и $\mu = (\gamma+2)/\rho$. Обозначим через $L^p_{\rho,\sigma,\gamma}(\mathbf{C})$ $(1 < p < \infty)$ класс измеримых в $\mathbf{C}$ комплекснозначных функций $f(w)$ с конечным интегралом

$$\iint_{\mathbf{C}} |f(w)|^p e^{-\sigma|w|^\rho} |w|^\gamma \, dm(w) < \infty.$$

Далее, обозначим через $H^p_{\rho,\sigma,\gamma}(\mathbf{C})$ подмножество целых функций из $L^p_{\rho,\sigma,\gamma}(\mathbf{C})$. Как уже отмечалось в §0, в работах [6, 7] было установлено, что функции класса $H^p_{\rho,\sigma,\gamma}(\mathbf{C})$ допускают интегральное представление

$$f(z) = \frac{1}{\pi} \iint_{\mathbf{C}} e^{-\sigma|w|^\rho} |w|^\gamma \Phi_\infty(z,w) f(w) \, dm(w), \quad z \in \mathbf{C}, \tag{4.1}$$

где

$$\Phi_\infty(z,w) = \frac{\rho\sigma^\mu}{2} E_{\rho/2}(\sigma^{2/\rho} z\overline{w}; \mu), \quad z, w \in \mathbf{C}. \tag{4.2}$$

Кроме того, было доказано, что при $p = 2$, интегральный оператор, порождаемый правой частью формулы (4.1) - оператор ортогонального проектирования пространства $L^2_{\rho,\sigma,\gamma}(\mathbf{C})$ на свое замкнутое подпространство $H^2_{\rho,\sigma,\gamma}(\mathbf{C})$.

В этом параграфе наша цель установить аналог формулы (4.1) для функций класса $C^1(\mathbf{C})$ (удовлетворяющих, конечно, определенным условиям роста на бесконечности). Иными словами, мы намерены получить формулу типа Коши-Грина

$$f(z) = \frac{1}{\pi} \iint_{\mathbf{C}} e^{-\sigma|w|^\rho} |w|^\gamma \Phi_\infty(z,w) f(w) \, dm(w) -$$

$$- \frac{1}{\pi} \iint_{\mathbf{C}} \frac{\overline{D} f(w)}{w - z} \Psi_\infty(z,w) \, dm(w), \quad z \in \mathbf{C} \tag{4.3}$$

которая для целых функций очевидным образом переходит в формулу (4.1). Ядро Ψ_∞ в (4.3) пока нам неизвестно. Предположим, что

(a) $\Psi_\infty(z,w)$ определено при $z, w \in \mathbf{C}$, при любом фиксированном $z \in \mathbf{C}$, как функция от w, принадлежит классу $C^1(\mathbf{C})$;

(b) При фиксированном $z \in \mathbf{C}$ функция $\Psi_\infty(z,w)$ достаточно быстро убывает на бесконечности (смысл этой фразы будет уточнен ниже);

(c) $\Psi_\infty(z,z) \equiv 1$, $z \in \mathbf{C}$.

Для нахождения явного вида ядра Ψ_∞ мы проведем эвристическое рассуждение, аналогичное тому, которое было применено в §2. Предполагая, что $f \in C^1(\mathbf{C})$ и точка $z \in \mathbf{C}$ фиксирована, рассмотрим дифференциальную форму

$$\varphi_z(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\,\frac{f(\zeta)\Psi_\infty(z,\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta, \quad \zeta \in \mathbf{C}\setminus\{z\}, \tag{4.4}$$

класса C^1. Затем, при $0 < \varepsilon < R < \infty$ положим $\gamma_\varepsilon(z) = \partial\mathbb{D}_\varepsilon(z)$, $\gamma_R(z) = \partial\mathbb{D}_R(z)$. Далее, применяя к форме φ_z формулу Стокса в замкнутый области $\overline{\mathbb{D}_R(z)}\setminus\mathbb{D}_\varepsilon(z)$, получим

$$\int_{\gamma_R(z)}\varphi_z(\zeta) - \int_{\gamma_\varepsilon(z)}\varphi_z(\zeta) = \int\!\!\!\int\limits_{\overline{\mathbb{D}_R(z)}\setminus\mathbb{D}_\varepsilon(z)} d\varphi_z(\zeta). \tag{4.5}$$

Затем заметим, что в силу условия (b) (конечно, пока довольно неопределенного) $\int_{\gamma_R(z)}\varphi_z(\zeta) \to 0$ при $R \to +\infty$, а в силу условия (c) $\int_{\gamma_\varepsilon(z)}\varphi_z(\zeta) \to f(z)$ при $\varepsilon \to 0$. Поэтому, устремив $R \to +\infty$, $\varepsilon \to 0$ в формуле (4.5) и вычислив $d\varphi_z(\zeta)$, на основании (4.4) получим

$$f(z) = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\mathbf{C}} f(\zeta)\frac{\overline{D_\zeta}\Psi_\infty(z,\zeta)}{\zeta - z}\,dm(\zeta) - \frac{1}{\pi}\iint\limits_{\mathbf{C}}\frac{\overline{D}f(\zeta)}{\zeta - z}\Psi_\infty(z,\zeta)\,dm(\zeta), \quad z \in \mathbf{C}. \tag{4.6}$$

Сравнение (4.3) и (4.6) показывает, что необходимо выполнение следующего соотношения при любом $z \in \mathbf{C}$:

$$\overline{D_\zeta}\Psi_\infty(z,\zeta) = -(\zeta - z)e^{-\sigma|\zeta|^\rho}|\zeta|^\gamma\Phi_\infty(z,\zeta), \quad \zeta \in \mathbf{C}. \tag{4.7}$$

Итак, мы должны найти ядро Ψ_∞, удовлетворяющее условиям (a), (b), (c) и уравнению (4.7).

Лемма 4.1. *Если ядро Ψ_∞ с требуемыми свойствами существует, то для него справедливо представление вида*

$$\Psi_\infty(z,w) = 1 - \rho\sigma^\mu\frac{w - z}{w}\int_0^{|w|} e^{-\sigma|r|^\rho} r^{\gamma+1} E_{\rho/2}(\sigma^{2/\rho}r^2 z/w;\mu)\,dr,$$
$$z \in \mathbf{C}, \quad w \in \mathbf{C}\setminus\{0\}. \tag{4.8}$$

Доказательство. При фиксированном $z \in \mathbf{C}$, в силу обычной формулы Коши-Грина, для $|w| < R$ мы имеем

$$\Psi_\infty(z,w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=R}\frac{\Psi_\infty(z,\zeta)}{\zeta - w}\,d\zeta - \frac{1}{\pi}\iint\limits_{|\zeta|<R}\frac{\overline{D_\zeta}\Psi_\infty(z,\zeta)}{\zeta - w}\,dm(\zeta). \tag{4.9}$$

Если $R \to +\infty$, то первое слагаемое в правой части (4.9) будет стремиться к нулю, в силу условия (b) на ядро Ψ_∞. Поэтому, с учетом (4.7) получим

$$\Psi_\infty(z,w) = \frac{1}{\pi}\iint\limits_{\mathbf{C}} e^{-\sigma|w|^\rho}|\zeta|^\gamma \frac{\Phi_\infty(z,\zeta)}{\zeta-w}(\zeta-z)\,dm(\zeta), \quad w\in\mathbf{C}.$$

Далее, если воспользоваться формулой (4.1) при $f\equiv 1$, то это представление можно записать в виде

$$\Psi_\infty(z,w) = 1+\frac{w-z}{\pi}\iint\limits_{\mathbf{C}} e^{-\sigma|\zeta|^\rho}|\zeta|^\gamma \frac{\Phi_\infty(z,\zeta)}{\zeta-w}\,dm(\zeta), \quad w\in\mathbf{C}.$$

Подставляя сюда выражение (4.2) и переходя в интеграле к полярным координатам, получим

$$\Psi_\infty(z,w) = 1+\rho\sigma^\mu(w-z)\int_0^\infty e^{-\sigma|r|^\rho}r^{\gamma+1}\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=r}\frac{E_{\rho/2}(\sigma^{2/\rho}r^2z/\zeta;\mu)}{\zeta(\zeta-w)}\,d\zeta\,dr,$$
$$w\in\mathbf{C}. \tag{4.8}$$

Но легко видеть, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=r}\frac{E_{\rho/2}(\sigma^{2/\rho}r^2z/\zeta;\mu)}{\zeta(\zeta-w)}\,d\zeta = \begin{cases}0, & r>|w|,\\ -\frac{1}{w}E_{\rho/2}(\sigma^{2/\rho}r^2z/w;\mu), & r<|w|.\end{cases}$$

Таким образом, (4.8) следует из (4.10) и лемма доказана.

Установленная лемма позволяет перейти от эвристических рассуждений к строгим выкладкам. А, именно, определив ядро Ψ_∞ по формуле (4.8) можно перейти к выяснению основных свойств этого ядра. Прежде всего, справедлива простая

Лемма 4.2. *Пусть ядро Ψ_∞ определено по формуле (4.8). Тогда при каждом фиксированном $z\in\mathbf{C}$ справедливы утверждения :*

1. Функция $\Psi_\infty(z,w)$ принадлежит классу $C^1(\mathbf{C}\setminus\{0\})$ и удовлетворяет уравнению (4.7)

2. При $w\to 0$

$$\Psi_\infty(z,w) = 1+O(|w|^{\gamma+1}), \quad \text{если } z\neq 0,$$

$$\Psi_\infty(0,w) = 1+O(|w|^{\gamma+2}).$$

3. $\Psi_\infty(z,z)=1$, *если* $z\neq 0$,

$\lim_{w\to 0}\Psi_\infty(0,w)=1.$

Доказательство по существу повторяет аргументацию Леммы 2.2, и., поэтому, мы его опускаем.

Лемма 4.3. *Пусть ядро $\Psi_\infty(z,w)$ определено по формуле (4.8). Тогда для любого $\varepsilon \in (0,1)$ и для произвольного компакта $K \subset \mathbf{C}$*

$$\Psi_\infty(z,w) = O(e^{-\sigma(1-\varepsilon)|w|^\rho}), \quad |w| \to \infty$$

равномерно по $z \in K$.

Доказательство. Во-первых, отметим тождество

$$1 \equiv \rho\sigma^\mu \frac{w-z}{w} \int_0^\infty e^{-\sigma r^\rho} r^{\gamma+1} E_{\rho/2}(\sigma^{2/\rho} r^2 z/w; \mu)\, dr, \quad |z| < |w| < \infty,$$

которое легко устанавливается почленным интегрированием разложением в ряд функции типа Миттаг-Леффлера. Следовательно, формула (4.8) при $|z| < |w| < \infty$ может быть записана в виде

$$\Psi_\infty(z,w) = \rho\sigma^\mu \left(1 - \frac{z}{w}\right) \int_{|w|}^\infty e^{-\sigma|r|^\rho} r^{\gamma+1} E_{\rho/2}(\sigma^{2/\rho} r^2 z/w; \mu)\, dr =$$

$$= \sigma^\mu \left(1 - \frac{z}{w}\right) \int_{|w|^\rho}^\infty e^{-\sigma x} E_{\rho/2}(\sigma^{2/\rho} x^{2/\rho} z/w; \mu) x^{\mu-1}\, dx. \tag{4.11}$$

Далее, поскольку $E_{\rho/2}(w;\mu)$ - целая функция порядка $\rho/2$ и типа 1, то можно подобрать такую константу $A > 0$, чтобы во всей плоскости $\mathbf{C}$ была справедлива оценка

$$|E_{\rho/2}(w;\mu)| \le A e^{2|w|^{\rho/2}}, \quad w \in \mathbf{C}. \tag{4.12}$$

Однако, если $\varepsilon \in (0,1)$ произвольно и $|z| \le R$, а $|w| \ge (4/\varepsilon)^{2/\rho} R$, то имеем $|z/w|^{\rho/2} \le \varepsilon/4$ (в частности, $|z| < |w|$). Следовательно, из (4.12) следует, что

$$|E_{\rho/2}(\sigma^{2/\rho} x^{2/\rho} z/w; \mu)| \le A e^{\varepsilon\sigma x/2}, \quad x \in (0,\infty)$$

равномерно по $|z| \le R$ и $|w| > (4/\varepsilon)^{2/\rho} R$. На основании этой оценки из (4.11) следуют соотношения

$$|\Psi_\infty(z,w)| \le 2\sigma^\mu A \int_{|w|^\rho}^\infty e^{-\sigma x} e^{\varepsilon\sigma x/2} x^{\mu-1}\, dx =$$

$$= 2\sigma^\mu A \int_{|w|^\rho}^\infty e^{-\sigma(1-\varepsilon)x} \left[e^{-\varepsilon\sigma x/2} x^{\mu-1}\right] dx \le A^* \exp[-\sigma(1-\varepsilon)|w|^\rho],$$

где $|z| \le R$, $|w| \ge (4/\varepsilon)^{2/\rho} R$ и

$$A^* = 2\sigma^\mu A \int_0^\infty e^{-\varepsilon\sigma x/2} x^{\mu-1}\, dx < +\infty.$$

Лемма доказана.

Замечание 4.1. В итоге мы построили по формуле (4.8) ядро Ψ_∞. Однако, как это следует из Лемм 4.2 и 4.3, первоначально требуемые от ядра Ψ_∞ априорные свойства несколько видоизменились и уточнились. Но легко видеть, что проведенные выше эвристические рассуждения (вплоть до получения формулы (4.8)) остаются в силе, если должным образом подобрать класс функций $f(z)$. Тем самым, справедлива следующая

Теорема 4.1. *Пусть ядра Φ_∞ и Ψ_∞ определены соответственно по формулам (4.2) и (4.8). Тогда интегральное представление (3.9), где $\Phi_{\sigma,\infty} \equiv \Phi_\infty$ и $\Psi_{\sigma,\infty} \equiv \Psi_\infty$, справедливо для каждой функции $f(z) \in C^1(\mathbf{C})$, удовлетворяющей следующим дополнительным условиям :*

(a) для некоторого $\varepsilon \in (0,1)$

$$f(z) = O(e^{\sigma(1-\varepsilon)|z|^\rho}) \quad \text{при } |z| \to \infty; \tag{4.13}$$

(b) для некоторого $\varepsilon \in (0,1)$

$$\overline{D}f(z) = O(e^{\sigma(1-\varepsilon)|z|^\rho}) \quad \text{при } |z| \to \infty.$$

В частности, для целых функций $f(z)$, при некотором $\varepsilon \in (0,1)$ удовлетворяющих оценке (4.13), мы вновь получаем представление (4.1).

Замечание 4.2. Заметим, что Теоремой 4.1 вновь устанавливается формула (3.9) предыдущего параграфа, но уже с конкретным указанием соответствующего класса функций.

Наконец, обсудим один важный частный случай Теоремы 4.1. Пусть $\rho = 2$, $\sigma > 0$ и $\gamma = 0$ (следовательно, $\mu = 1$). В этом случае формула (4.2) принимает вид

$$\Phi_\infty(z,w) = \sigma E_1(\sigma z\overline{w};1) = \sigma e^{\sigma z\overline{w}}, \quad z, w \in \mathbf{C}.$$

Далее, из (4.8) при $z \in \mathbf{C}$ и $w \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ получаем

$$\begin{aligned}\Psi_\infty(z,w) &= 1 - 2\sigma\frac{w-z}{w}\int_0^{|w|} e^{-\sigma r^2} rE_1(\sigma r^2 z/w;1)\,dr = \\ &= 1 - \sigma\left(1-\frac{z}{w}\right)\int_0^{|w|^2} e^{-\sigma x(1-z/w)}\,dx = e^{-|w|^2\sigma + \sigma z\overline{w}}.\end{aligned} \tag{4.14}$$

Заметим, что в рассматриваемом случае ограничение $w \neq 0$ излишне. Следовательно, основная формула (4.28) принимает вид (0.8), где функция $f(z) \in C^1(\mathbf{C})$ удовлетворяет соответствующим условиям роста на бесконечности.

§5. ВАЖНЕЙШИЕ ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ТЕОРЕМЫ 4.1

5.1. Специальные случаи ядра Ψ_∞. Напомним, что при $z \in \mathbf{C}$, $w \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ ядро $\Psi_\infty(z, w)$ определялось по формуле (4.8), где $\rho, \sigma > 0$, $\gamma > -2$. В настоящем параграфе мы будем предполагать, что указанные параметры не произвольны, а выбраны следующим образом :

$$\rho = \frac{2}{p} \ (p = 1, 2, ...), \quad \gamma = \frac{2(1+\kappa)}{p} - 2, \quad \mu = \frac{2+\gamma}{\rho} = 1 + \kappa, \tag{5.1}$$

где $\kappa \geq 0$ - любое целое число. Ввиду обозначений (5.1) формула (4.8) после простых преобразований запишется в следующем виде :

$$\Psi_\infty(z, w) = 1 - \frac{w - z}{w} \int_0^{\sigma|w|^{2/p}} e^{-x} x^\kappa E_{1/p}(x^p z/w; 1 + \kappa)\, dx, \quad z \in \mathbf{C}, \quad w \in \mathbf{C} \setminus \{0\}. \tag{5.2}$$

Далее, положим $\omega_p = \exp[2\pi i/p]$, и отметим очевидные формулы

$$\sum_{h=0}^{p-1} \omega_p^{kh} = \begin{cases} p, & \text{если } k = 0 \pmod p \\ 0, & \text{если } k \neq 0 \pmod p \end{cases} \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, ...). \tag{5.3}$$

Затем, воспользовавшись разложением

$$E_1(\zeta^{1/p}\omega_p^h; \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\zeta^{k/p}\omega_p^{kh}}{\Gamma(\mu + k)}, \quad \zeta \in \mathbf{C}, \quad 0 \leq h \leq p - 1,$$

придем к тождеству

$$\frac{1}{p} \sum_{h=0}^{p-1} E_1(\zeta^{1/p}\omega_p^h; \mu) \equiv E_{1/p}(\zeta; \mu), \quad \zeta \in \mathbf{C}. \tag{5.4}$$

Лемма 5.1. *В предположении (5.1) относительно параметров ρ, γ и μ при $z \in \mathbf{C}$, $w \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ имеет место представление вида*

$$\Psi_\infty(z, w) = 1 - \frac{w - z}{pw} \left(\frac{w}{z}\right)^{\kappa/p} [U_1 - U_2], \tag{5.5}$$

где

$$U_1 = \sum_{h=0}^{p-1} \omega_p^{-\kappa h} \int_0^{\sigma|w|^{2/p}} \exp\left[-\left(1 - \sqrt[p]{\frac{z}{w}}\omega_p^h\right) x\right] dx, \tag{5.6}$$

$$U_2 = \sum_{h=0}^{p-1} \omega_p^{-\kappa h} \sum_{k=0}^{\kappa-1} \left(\sqrt[p]{\frac{z}{w}} \omega_p^h \right)^k \frac{1}{\Gamma(1+k)} \int_0^{\sigma|w|^{2/p}} e^{-x} x^k \, dx. \tag{5.7}$$

Доказательство. Прежде всего отметим, что при любых $\kappa = 0, 1, \ldots$ справедливо тождество

$$E_1(\zeta; 1+\kappa) = \zeta^{-\kappa} \left[e^{\zeta} - \sum_{k=0}^{\kappa-1} \frac{\zeta^k}{\Gamma(1+k)} \right], \quad \zeta \in \mathbf{C}, \tag{5.8}$$

причем в случае $\kappa = 0$ сумма по индексу k попросту отсутствует. Далее, в силу (5.4) имеем

$$E_{1/p}(x^p z/w; 1+\kappa) = \frac{1}{p} \sum_{h=0}^{p-1} E_1 \left(x \sqrt[p]{\frac{z}{w}} \omega_p^h ; 1+\kappa \right).$$

Следовательно, согласно (5.8) получаем

$$E_{1/p}(x^p z/w; 1+\kappa) = \frac{1}{p} \sum_{h=0}^{p-1} x^{-\kappa} \left(\frac{w}{z} \right)^{\kappa/p} \omega_p^{-\kappa h} \left[e^{x \sqrt[p]{\frac{z}{w}} \omega_p^h} - \sum_{k=0}^{\kappa-1} \frac{x^k \left(\sqrt[p]{\frac{z}{w}} \omega_p^h \right)^k}{\Gamma(1+k)} \right].$$

Наконец, из (5.2) получим представление (5.5).

5.2. Дополнительные определения. Мы намерены провести дальнейшие преобразования и упрощения формул (5.5) – (5.7). С этой целью необходимо ввести дополнительные обозначения и установить некоторые соотношения.

Пусть $p = 1, 2, \ldots$ и $\kappa = 0, 1, \ldots$ – произвольные целые числа. Очевидно, что κ единственным образом может быть представлено в виде

$$\kappa = \nu_0 p + r_0, \tag{5.9}$$

где $\nu_0 \geq 0$ и $0 \leq r_0 \leq p-1$ – также целые числа. Более того, легко видеть, что $\nu_0 = [\kappa/p]$. Далее, введем в рассмотрение полиномы от $\zeta \in \mathbf{C}$:

$$P_{0,0}(\zeta) \equiv 1, \quad P_{p-1,h}(\zeta) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq h}}^{p-1} (1 - \omega_p^j \zeta), \quad p \geq 2, \quad 0 \leq h \leq p-1. \tag{5.10}$$

Лемма 5.2. *Имеет место тождество :*

$$\frac{1}{p} \sum_{h=0}^{p-1} \omega_p^{-h\kappa} P_{p-1,h}(\zeta) \equiv \zeta^{r_0}, \quad \zeta \in \mathbf{C}. \tag{5.11}$$

Доказательство. Прежде всего отметим тождество

$$1 - \zeta^p = \prod_{j=1}^{p-1} (1 - \omega_p^j \zeta), \quad \zeta \in \mathbf{C}. \tag{5.12}$$

В его справедливости легко убедиться, если заметить, что в (5.12) слева и справа присутствуют полиномы степени p, имеющие одинаковую совокупность простых нулей $\{\omega_p^j : 0 \le j \le p-1\}$ и в точке $\zeta = 0$, принимающие одно и то же значение 1. Следовательно, ввиду (5.12) и (5.10) будем иметь

$$\sum_{h=0}^{p-1} \omega_p^{-h\kappa} P_{p-1,h}(\zeta) = (1-\zeta^p) \sum_{h=0}^{p-1} \frac{\omega_p^{-h\kappa}}{1-\omega_p^h \zeta}, \quad \zeta \in \mathbf{C}. \tag{5.13}$$

Однако, если $\zeta \in \mathbb{D}$, то

$$\sum_{h=0}^{p-1} \frac{\omega_p^{-h\kappa}}{1-\omega_p^h \zeta} = \sum_{k=0}^{\infty} \zeta^k \sum_{h=0}^{p-1} \omega_p^{(k-\kappa)h}. \tag{5.14}$$

С другой стороны, ввиду (5.3) и (5.9), имеем

$$\sum_{h=0}^{p-1} \omega_p^{(k-\kappa)h} = \begin{cases} p, & \text{если } k = r_0 + np, \quad n = 0, 1, ..., \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{5.15}$$

Отсюда и из (5.14) следует, что

$$\sum_{h=0}^{p-1} \frac{\omega_p^{-h\kappa}}{1-\omega_p^h \zeta} = p \sum_{k=0}^{\infty} \zeta^{r_0+kp} = \frac{p\zeta^{r_0}}{1-\zeta^p}, \quad \zeta \in \mathbb{D}. \tag{5.16}$$

Наконец, из (5.13) и (5.16) получаем формулу (5.11) при $\zeta \in \mathbb{D}$, а значит, и при всех $\zeta \in \mathbf{C}$. Таким образом, лемма доказана.

Следствие. Справедливы следующие формулы :

$$\frac{1}{p} \sum_{h=0}^{p-1} P_{p-1,h}(\zeta) \equiv 1, \quad \zeta \in \mathbf{C},$$

$$\frac{1}{p} \sum_{h=0}^{p-1} \frac{1}{1-\omega_p^h \zeta} \equiv \frac{1}{1-\zeta^p}, \quad \zeta \in \mathbf{C}, \quad \zeta^p \neq 1. \tag{5.17}$$

5.3. Основная теорема о представлении ядра Ψ_∞.

Теорема 5.1. *В предположении (5.1) относительно параметров ρ, γ и μ при $z \in \mathbf{C}$, $w \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ имеет место следующее представление :*

$$\Psi_\infty(z, w) = \frac{1}{p} \left(1 - \frac{z}{w}\right) \left(\frac{z}{w}\right)^{-\kappa/p} e^{-\sigma|w|^{2/p}} [V_1(z, w) - V_2(z, w)], \tag{5.18}$$

где

$$V_1(z, w) \equiv V_1 = \left(1 - \frac{z}{w}\right)^{-1} \sum_{h=0}^{p-1} \omega_p^{-h\kappa} P_{p-1,h}\left(\sqrt[p]{z/w}\right) e^{\sigma \sqrt[p]{z\overline{w}}\,\omega_p^h}, \tag{5.19}$$

$$V_2(z,w)\equiv V_2=p\left(\frac{z}{w}\right)^{\kappa/p}\sum_{n=0}^{\nu_0-1}\left(\frac{z}{w}\right)^{n-\nu_0}\sum_{m=0}^{r_0+np}\frac{\sigma^m(\sqrt[p]{|w|^2})^m}{\Gamma(1+m)}. \tag{5.20}$$

Доказательство. Сперва займемся упрощением выражений для U_1 и U_2 в представлении (5.5). Очевидно

$$U_1=\sum_{h=0}^{p-1}\frac{\omega_p^{-\kappa h}}{1-\sqrt[p]{\frac{z}{w}}\omega_p^h}-e^{-\sigma|w|^{2/p}}\sum_{h=0}^{p-1}\frac{\omega_p^{-\kappa h}}{1-\sqrt[p]{\frac{z}{w}}\omega_p^h}e^{\sigma\sqrt[p]{z\bar{w}}\omega_p^h}. \tag{5.21}$$

Кроме того, последовательным интегрированием по частям получаем

$$\frac{1}{\Gamma(1+k)}\int_0^{\sigma|w|^{2/p}}e^{-x}x^k\,dx=1-e^{-\sigma|w|^{2/p}}\sum_{m=0}^{k}\frac{(\sigma|w|^{2/p})^m}{\Gamma(1+m)},\quad k=0,1,\ldots$$

Поэтому величина U_2 может быть представлена в виде

$$U_2=\sum_{h=0}^{p-1}\omega_p^{-\kappa h}\sum_{k=0}^{\kappa-1}\left(\sqrt[p]{\frac{z}{w}}\omega_p^h\right)^k-e^{-\sigma|w|^{2/p}}\times$$
$$\times\sum_{h=0}^{p-1}\omega_p^{-\kappa h}\sum_{k=0}^{\kappa-1}\left(\sqrt[p]{\frac{z}{w}}\omega_p^h\right)^k\sum_{m=0}^{k}\frac{(\sigma|w|^{2/p})^m}{\Gamma(1+m)}. \tag{5.22}$$

Комбинируя (5.21) и (5.22), получим

$$U_1-U_2=U_1^*-U_2^*, \tag{5.23}$$

где

$$U_1^*=\sum_{h=0}^{p-1}\frac{\omega_p^{-\kappa h}}{1-\sqrt[p]{\frac{z}{w}}\omega_p^h}-\sum_{h=0}^{p-1}\omega_p^{-\kappa h}\sum_{k=0}^{\kappa-1}\left(\sqrt[p]{\frac{z}{w}}\omega_p^h\right)^k, \tag{5.24}$$

$$U_2^*=e^{-\sigma|w|^{2/p}}[U_3^*-U_4^*], \tag{5.25}$$

$$U_3^*=\sum_{h=0}^{p-1}\frac{\omega_p^{-\kappa h}}{1-\sqrt[p]{\frac{z}{w}}\omega_p^h}e^{\sigma\sqrt[p]{z\bar{w}}\omega_p^h},$$

$$U_4^*=\sum_{h=0}^{p-1}\omega_p^{-\kappa h}\sum_{k=0}^{\kappa-1}\left(\sqrt[p]{\frac{z}{w}}\omega_p^h\right)^k\sum_{m=0}^{k}\frac{(\sigma|w|^{2/p})^m}{\Gamma(1+m)}.$$

Далее, согласно (5.17) и (5.24)

$$U_1^*=\sum_{h=0}^{p-1}\frac{\omega_p^{-\kappa h}}{1-\sqrt[p]{\frac{z}{w}}\omega_p^h}\left(\sqrt[p]{\frac{z}{w}}\omega_p^h\right)^\kappa=p\left(\frac{z}{w}\right)^{\kappa/p}\left(1-\frac{z}{w}\right)^{-1}=\frac{pw}{w-z}\left(\frac{z}{w}\right)^{\kappa/p}. \tag{5.26}$$

Кроме того, из соотношений (5.10) и (5.12) следует, что

$$U_3^*=\left(1-\frac{z}{w}\right)^{-1}\sum_{h=0}^{p-1}\omega_p^{-\kappa h}P_{p-1,h}\left(\sqrt[p]{z/w}\right)e^{\sigma\sqrt[p]{z\bar{w}}\omega_p^h}. \tag{5.27}$$

Наконец, преобразуем величину U_4^* :

$$U_4^* = \sum_{k=0}^{\kappa-1}\left(\frac{z}{w}\right)^{k/p}\sum_{m=0}^{k}\frac{\sigma^m(|w|^{2/p})^m}{\Gamma(1+m)}\sum_{h=0}^{p-1}\omega_p^{(k-\kappa)h}.$$

С учетом (5.15) и (5.9) последнее соотношение принимает вид

$$\begin{aligned} U_4^* =&p\sum_{\substack{k=r_0+np\\ 0\le n\le \nu_0-1}}\left(\frac{z}{w}\right)^{k/p}\sum_{m=0}^{k}\frac{\sigma^m(|w|^{2/p})^m}{\Gamma(1+m)} = \\ =&p\left(\frac{z}{w}\right)^{\kappa/p}\sum_{n=0}^{\nu_0-1}\left(\frac{z}{w}\right)^{n-\nu_0}\sum_{m=0}^{r_0+np}\frac{\sigma^m(|w|^{2/p})^m}{\Gamma(1+m)}. \end{aligned} \qquad (5.28)$$

Тем самым, комбинируя (5.23), (5.25) - (5.28), получим

$$\begin{aligned} U_1 - U_2 =&\frac{pw}{w-z}\left(\frac{z}{w}\right)^{\kappa/p} - e^{-\sigma|w|^{2/p}}\times \\ &\times\left[\left(1-\frac{z}{w}\right)^{-1}\sum_{h=0}^{p-1}\omega_p^{-\kappa h}P_{p-1,h}\left(\sqrt[p]{z/w}\right)e^{\sigma\sqrt[p]{z\overline{w}}\,\omega_p^h} - \right. \\ &\left. -p\left(\frac{z}{w}\right)^{\kappa/p}\sum_{n=0}^{\nu_0-1}\left(\frac{z}{w}\right)^{n-\nu_0}\sum_{m=0}^{r_0+np}\frac{\sigma^m(|w|^{2/p})^m}{\Gamma(1+m)}\right]. \end{aligned} \qquad (5.29)$$

Наконец, формула (5.18) легко следует из (5.5) и (5.29). Этим завершается доказательство теоремы.

В заключение рассмотрим некоторые специальные случаи общей формулы (5.18).

Случай $p = 1$, $\kappa \ge 0$ **целое.** Очевидно $\omega_p = \omega_1 = 1$, кроме того, в этом случае $P_{0,0}(\zeta) \equiv 1$ и $\nu_0 = \kappa$, $r_0 = 0$. Следовательно, согласно (5.18) - (5.20)

$$V_1(z,w) = \frac{w}{w-z}e^{\sigma z\overline{w}},$$

$$V_2(z,w) = \left(\frac{z}{w}\right)^{\kappa}\sum_{n=0}^{\kappa-1}\left(\frac{z}{w}\right)^{n-\kappa}\sum_{m=0}^{n}\frac{\sigma^m|w|^{2m}}{\Gamma(1+m)},$$

$$\Psi_\infty(z,w) = \left(\frac{z}{w}\right)^{-\kappa}e^{\sigma z\overline{w}}e^{-\sigma|w|^2} - \left(1-\frac{z}{w}\right)e^{-\sigma|w|^2}\sum_{n=0}^{\kappa-1}\left(\frac{z}{w}\right)^{n-\kappa}\sum_{m=0}^{n}\frac{\sigma^m|w|^{2m}}{\Gamma(1+m)}. \qquad (5.30)$$

Заметим, что если $\kappa = 0$, то второе слагаемое в правой части (5.30) отсутствует, и мы получаем

$$\Psi_\infty(z,w) = \exp[\sigma z\overline{w} - \sigma|w|^2],$$

что вполне согласуется с формулой (4.14).

Переходя к рассмотрению случая $p=2$, предварительно отметим, что тогда $\omega_p=\omega_2=e^{i\pi}=-1$ и, кроме того $P_{1,0}(\zeta)\equiv 1+\zeta$, $P_{1,1}(\zeta)\equiv 1-\zeta$.

Случай $p=2$, $\kappa\geq 0$ – четное. Очевидно $\kappa=2\nu_0$ ($\nu_0\geq 0$) и $r_0=0$. Поэтому

$$V_1(z,w)=\frac{w}{w-z}\sum_{h=0}^{1}\omega_2^{-\kappa h}P_{1,h}(\sqrt{z/w})\exp[\sigma\sqrt{z\overline{w}}\omega_2^h]=$$
$$=\frac{2w}{w-z}[\operatorname{ch}\sigma\sqrt{z\overline{w}}+\sqrt{z/w}\operatorname{sh}\sigma\sqrt{z\overline{w}}],$$
$$V_2(z,w)=2\left(\frac{z}{w}\right)^{\nu_0}\sum_{n=0}^{\nu_0-1}\left(\frac{z}{w}\right)^{n-\nu_0}\sum_{m=0}^{2n}\frac{\sigma^m|w|^m}{\Gamma(1+m)}.$$

Следовательно, получаем представление

$$\Psi_\infty(z,w)=\frac{w-z}{2w}\left(\frac{z}{w}\right)^{-\nu_0}e^{-\sigma|w|}[V_1(z,w)-V_2(z,w)]=$$
$$=\left(\frac{z}{w}\right)^{-\nu_0}e^{-\sigma|w|}[\operatorname{ch}\sigma\sqrt{z\overline{w}}+\sqrt{z/w}\operatorname{sh}\sigma\sqrt{z\overline{w}}]-$$
$$-\left(1-\frac{z}{w}\right)e^{-\sigma|w|}\sum_{n=0}^{\nu_0-1}\left(\frac{z}{w}\right)^{n-\nu_0}\sum_{m=0}^{2n}\frac{\sigma^m|w|^m}{\Gamma(1+m)}.$$

В частности, при $\kappa=0$ (т.е. при $\nu_0=0$) получаем следующее простое выражение :

$$\Psi_\infty(z,w)=e^{-\sigma|w|}[\operatorname{ch}\sigma\sqrt{z\overline{w}}+\sqrt{z/w}\operatorname{sh}\sigma\sqrt{z\overline{w}}].$$

Кстати, в этом случае ядро Φ_∞ тоже записывается просто

$$\Phi_\infty(z,w)=\frac{\sigma}{2}\operatorname{ch}\sigma\sqrt{z\overline{w}}.$$

Случай $p=2$, $\kappa\geq 1$ – нечетное. Очевидно $\kappa=2\nu_0+1$ ($\nu_0\geq 0$)и $r_0=1$. Следовательно

$$V_1(z,w)=\frac{w}{w-z}\sum_{h=0}^{1}\omega_2^{-\kappa h}P_{1,h}(\sqrt{z/w})\exp[\sigma\sqrt{z\overline{w}}\omega_2^h]=$$
$$=\frac{2w}{w-z}[\operatorname{sh}\sigma\sqrt{z\overline{w}}+\sqrt{z/w}\operatorname{ch}\sigma\sqrt{z\overline{w}}],$$
$$V_2(z,w)=2\left(\frac{z}{w}\right)^{\nu_0+1/2}\sum_{n=0}^{\nu_0-1}\left(\frac{z}{w}\right)^{n-\nu_0}\sum_{m=0}^{2n+1}\frac{\sigma^m|w|^m}{\Gamma(1+m)}.$$

Отсюда получаем

$$\Psi_\infty(z,w)=\frac{w-z}{2w}\left(\frac{z}{w}\right)^{-\nu_0-1/2}e^{-\sigma|w|}[V_1(z,w)-V_2(z,w)]=$$
$$=\left(\frac{z}{w}\right)^{-\nu_0}e^{-\sigma|w|}[\operatorname{ch}\sigma\sqrt{z\overline{w}}+\sqrt{w/z}\operatorname{sh}\sigma\sqrt{z\overline{w}}]-$$
$$\left(1-\frac{z}{w}\right)e^{-\sigma|w|}\sum_{n=0}^{\nu_0-1}\left(\frac{z}{w}\right)^{n-\nu_0}\sum_{m=0}^{2n+1}\frac{\sigma^m|w|^m}{\Gamma(1+m)}.$$

В частности, при $\kappa = 1$ (т.е. при $\nu_0 = 0$), имеем

$$\Psi_\infty(z, w) = e^{-\sigma|w|}\left[\operatorname{ch} \sigma\sqrt{z\overline{w}} + \sqrt{w/z} \operatorname{sh} \sigma\sqrt{z\overline{w}}\right],$$

и

$$\Phi_\infty(z, w) = \frac{\sigma}{2} \frac{\operatorname{sh} \sigma\sqrt{z\overline{w}}}{\sqrt{z\overline{w}}}.$$

ABSTRACT. The main results of the paper consist in the establishment of formulas of the form $f(z) = P(f)(z) + T(\bar{\partial} f)(z)$ in the following two cases : (a) $f(z)$ is a function of class C^1 in the unit disk $\mathbb{D}$ and P is the operator of orthogonal projection of the space $L^2\{\mathbb{D};\ (1 - |z|^\rho)^\alpha |z|^\gamma dm(z)\}$ onto its subspace of analytic functions; (b) $f(z)$ is a function of class C^1 in the complex plane (satisfying certain growth conditions near infinity) and P is the operator of orthogonal projection of the space $L^2\{\mathbb{C};\ e^{-\sigma|z|^\rho} |z|^\gamma dm(z)\}$ onto its subspace of entire functions. In both cases explicit formulas for kernels of the integral operators P and T are obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. М. Джрбашян, " О каноническом представлении мероморфных функции в единичном круге функций", ДАН Арм. ССР, т. 3, № 3, стр. 3 – 9, 1945.
2. М. М. Джрбашян, "К проблеме представимости аналитических функций", Сообщ. Инст. мат. и мех. АН Арм. ССР, т. 2, стр. 3 – 40, 1948.
3. М. М. Джрбашян, " Краткий обзор результатов исследований математиков Армении в области теории факторизации мероморфных функций и ее приложений", Изв. Ан Армении, Математика, т. 23, №6, стр. 517 – 545, 1988.
4. Ph. Charpentier, "Formules explicities pour les solutions minimales de l'equation $\bar{\partial} u = f$ dans la boule et dans le polydisque de $\mathbf{C}^n$", Ann. Inst. Fourier, vol. 30, no. 4, pp. 121 – 154, 1980.
5. Ф. А. Шамоян, "Приложения интегральных представлений Джрбашяна к некоторым задачам анализа", ДАН СССР, т. 261, №3, стр. 557 - 561, 1981.
6. М. М. Джрбашян, " О представимости некоторых классов целых функций" ДАН Арм. ССР, т. 7, №5, стр. 193 - 197, 1947.
7. М. М. Джрбашян, А. О. Карапетян, " Интегральные представления и теоремы единственности для целых функций многих переменных", Изв. АН Армении, Математика, т. 26, №1, стр. 3 – 19, 1991.
8. B. Bendtsson, M. Andersson, "Henkin-Ramirez formulas with weight factors", Ann. Inst. Fourier, vol. 32, no. 3, pp. 91 – 110, 1982.
9. Г. Полиа, Г. Сеге, Задачи и Теоремы из Анализа, часть 1, М., Гостехиздат, 1956.

28 Августа 1993

Институт математики
НАН Армении