# ИСКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫЕ ПОСРЕДСТВОМ ПРОИЗВОДНЫХ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА

**Г. А. Барсегян, В. Г. Петросян**

**Известия Академии Наук Армении. Математика, том 28, №3, 1993**

Оценки логарифмических производных играют важную роль в теории распределения значений мероморфных функций (см. [1]).

Оценки для величин

$$\int_{|z|=r}\left|\frac{w'(re^{i\varphi})}{w(re^{i\varphi})}\right|\,d\varphi=\int_{\Delta(r,0)}\left|\frac{w'(re^{i\varphi})}{w(re^{i\varphi})}\right|\,d\varphi+\int_{\Delta(r,\infty)}\left|\frac{w'(re^{i\varphi})}{w(re^{i\varphi})}\right|\,d\varphi,$$

где $w(z)$ - мероморфная функция в $|z|<\infty$,

$$\Delta(r,a)=\Delta(r,a,w)=\{z:\quad |z|=r;\quad |w(z)-a|\leq 1\}$$

и

$$\Delta(r,\infty)=\Delta(r,\infty,w)=\{z:\quad |z|=r;\quad |w(z)|>1\}$$

были получены в [2] [4].

Однако оценки логарифмических производных рассматривались как простые вспомогательные технические средства. Между тем в [5] было установлено, что для интеграла

$$P(r,a)\overset{def}{=\!=}r\int_{\Delta(r,a)}\left|\frac{w'(re^{i\varphi})}{w(re^{i\varphi})-a}\right|\,d\varphi$$

имеют место некоторые аналоги второй основной теоремы Р.Неванлинны и соотношения дефектов, характеризующих уже новые исключительные значения функции $w(z)$. Другим примером приложений логарифмических производных является следующее простое предложение, связывающее характеристику $P(r,a)$

с классическими величинами : если мероморфная в $|z| < \infty$ функция $w(z)$ имеет по крайней мере два исключительных значения в смысле В. П. Петренко, т.е. существуют значения $a_1$ и $a_2$ такие, что $\beta(a_1) > 0$ и $\beta(a_2) > 0$, где

$$\beta(a) = \beta(a, w) = \varliminf_{r\to\infty} \frac{1}{T(r)} \left( \max_{|z|=r} \ln^+ \frac{1}{|w(z) - a|} \right),$$

и $T(r)$ - характеристики Неванлинна, тогда для любого $a \in \mathbf{C}$ и $r$ мы имеем

$$m(r, a) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Delta(r,a)} \ln^+ \frac{1}{|w(z) - a|}\, d\varphi \le \max_{|z|=r} \ln^+ \frac{1}{|w(z) - a|} \le$$

$$\le r \int_{\Delta(r,a)} \left| \frac{w'(z)}{w(z) - a} \right| d\varphi + O(1), \quad r \to \infty, \quad z = re^{i\varphi}. \tag{1}$$

Заметим также, что результаты работы [5] и неравенство (1) позволяют обобщить некоторые результаты В. Фукса [3] и В. П. Петренко [4]. В настоящей работе мы рассматриваем величины

$$P_k(r, a) \stackrel{def}{=} r \int_{\Delta(r,a)} \left| \ln^{(k)}(w(z) - a) \right|^{1/k} d\varphi, \quad k \in N, \quad k \ge 1,$$

зависящие от производных высшего порядка мероморфной функции $w(z)$. Для этих величин мы устанавливаем аналоги второй основной теоремы Р. Неванлинны и соотношения дефектов.

**Теорема 1.** *Пусть $w(z)$ - мероморфная в $|z| < \infty$ функция конечного нижнего порядка $\lambda > 0$ и пусть $a_\nu \in \mathbf{C}$ $(\nu = 1, 2, ..., q)$ - конечный набор попарно различных комплексных значений. Тогда на некоторой неограниченной последовательности значений $r_n$ выполняется неравенство*

$$\sum_{\nu=1}^{q} r \int_{\Delta(r,a_\nu)} \left| \ln^{(k)}(w(z) - a_\nu) \right|^{1/k} d\varphi \le K(k, \lambda) T(r), \quad r \to \infty, \tag{2}$$

*где $K(k, \lambda)$ - постоянная, зависящая от $k$ и $\lambda$.*

**Замечание.** При $k = 1$ неравенство (2) было установлено в [5] ([5], Теорема 1).

Из Теоремы 1 мы получаем некоторый аналог соотношения дефектов Р. Неванлинны.

**Следствие.** Для мероморфной в $|z| < \infty$ функции $w(z)$ конечного нижнего порядка $\lambda > 0$ множество

$$\left\{ a : \quad D_k(a) = D_k(a, w) = \varliminf_{r\to\infty} \frac{P_k(r, a)}{T(r)} > 0 \right\}$$

не более чем счетно, и имеет место неравенство

$$\sum_{a} D_k(a) \leq K(k, \lambda). \tag{3}$$

**Теорема 2.** *В предположениях Теоремы 1 справедливо неравенство*

$$\sum_{\nu=1}^{q} r \int_{\Delta(r,a_\nu)} \left| \frac{w''(z)}{w(z)-a_\nu} \right|^{1/2} d\varphi \leq K(\lambda) T(r), \tag{4}$$

*где $K(\lambda)$ - постоянная, зависящая от $\lambda$.*

Приведем теперь вкратце доказательство Теоремы 1. Сначала докажем существование значений $b_\nu$ $(\nu = 1, 2, ..., q)$ , для которых величины

$$r \int_{\Delta(r,a_\nu)} \left| \ln^{(k)}(w(z) - b_\nu) \right|^{1/k} d\varphi$$

"малы". Оценки для $P_k(r, a_\nu)$ будут близки к оценкам следующих величин :

$$r \int_{\Delta(r,a_\nu)} \left| \ln^{(k)} \left( \frac{w(z)-a_\nu}{w(z)-b_\nu} \right) \right|^{1/k} d\varphi. \tag{5}$$

Далее, к последнему интегралу применяем"свойство близости $a$-точек" мероморфных функций (см. [6]).После представления подынтегрального выражения (5) формулой Неванлинны, получаем разности однотипных факторов, зависящих от $a_\nu$-точек и $b_\nu$-точек функции $w(z)$. Учитывая тот факт, что $a_\nu$-точки и $b_\nu$-точки близки в среднем, заключаем, что указанные разности "малы". Таким образом, мы получаем "малость" суммы $\sum_{\nu=1}^{q} P_k(r, a_\nu)$ в том смысле, что правая часть (2) не зависит от $q$.

Теорема 2 непосредственно выводится из Теоремы 1.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Неванлинна, Однозначные Аналитические Функции, ОГИЗ, 1941.
2. W. H. Fuchs, "A theorem on the Nevanlinna deficiencies of meromorphic functions of finite order", Ann. Math., vol. 68, no. 2, pp. 203 – 209, 1958.
3. W. H. Fuchs, "Proof of a conjecture of G. Polya concerning gap series. III", J. Math., vol. 7, no. 4, pp. 661 – 667, 1963.
4. В. П. Петренко, Рост Мероморфных Функций, Више школа, Харьков, 1978.
5. Г. А. Барсегян, "Исключительные значения , ассоциированные с логарифмическими производными мероморфных функций ", Изв АН Арм.ССР, Математика, том 16, №5, стр. 408 – 423, 1981.
6. Г. А. Барсегян, "Свойство близости $a$-точек мероморфных функций" , Мат. сборник, том 120 (162), стр. 42 – 67, 1983.

20 Сентября 1990

Институт математики
НАН Армении