ЗАДАЧА ТИПА РИМАНА ДЛЯ НЕПРАВИЛЬНО-ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В КЛАССЕ L^1

Г. М. Айрапетян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 28, №3, 1993

В работе рассматривается задача типа Римана в L^1 для уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \bar{z}^2} + a\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} + bu = 0, \quad z \in D^+,$$

где $D^+ = \{z : |z| < 1\}$, a, b - комплексные числа. При предположении, что корни соответствующего характеристического уравнения не совпадают, доказывается, что эта задача нетерова и ее индекс равен 4.

1. В данной работе, в единичном круге $D^+ = \{z : |z| < 1\}$ комплексной z-плоскости, для уравнения

$$L(u) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{z}^2} + a\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} + bu = 0, \quad z \in D^+, \tag{1}$$

исследуется задача типа Римана : найти регулярное решение уравнения (1), которое удовлетворяет граничным условиям

$$\begin{aligned} &\lim_{r \to 1-0} \| \operatorname{Re} u(rt) - f_0(t)\|_1 = 0, \\ &\lim_{r \to 1-0} \| \operatorname{Re} \frac{\partial u(rt)}{\partial r} - f_1(t)\|_1 = 0, \end{aligned} \tag{2}$$

где a, b - комплексные числа, $f_0(t)$, $f_1(t)$ - действительные функции на $T = \{z : |z| = 1\}$ такие, что $f_0'(t), f_1(t) \in L^1(T)$, $\frac{\partial}{\partial r}$ - производная по радиусу круга D^+.

При предположении, что корни λ_1 и λ_2 характеристического уравнения $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ не совпадают, доказывается, что такая задача нетерова и ее индекс равен 4.

2. Общее решение уравнения (1) можно представить в виде

$$u(z) = e^{\lambda_1 \bar{z}}\varphi_1(z) + e^{\lambda_2 \bar{z}}\varphi_2(z), \quad z \in D^+, \tag{3}$$

где φ_1, φ_2 - произвольные аналитические функции в D^+.

Пусть $z = rt$, $r < 1$, $t \in T$. Подставляя (3) в (2), получим следующую граничную задачу относительно функций φ_1 и φ_2 :

$$\lim_{r\to 1-0} \| \operatorname{Re}\,(e^{\lambda_1 r\bar{t}}\varphi_1(rt) + e^{\lambda_2 r\bar{t}}\varphi_2(rt)) - f_0(t)\|_1 = 0,$$

$$\lim_{r\to 1-0} \| \operatorname{Re}\,(\lambda_1 \bar{t} e^{\lambda_1 r\bar{t}}\varphi_1(rt) + \lambda_2 r\bar{t} e^{\lambda_2 r\bar{t}}\varphi_2(rt) + \tag{4}$$

$$+ t e^{\lambda_1 r\bar{t}}\varphi_1'(rt) + t e^{\lambda_2 r\bar{t}}\varphi_2'(rt)) - f_1(t)\|_1 = 0.$$

Очевидно, что задача (1) - (2) эквивалентна граничной задаче (4) в классе аналитических в D^+ функций .

Введем в рассмотрение функции

$$\Psi_1(f_0, f_1, z) = \frac{e^{-\lambda_1/z}}{\lambda_2 - \lambda_1}\left(\frac{\lambda_2}{2\pi i}\int_T f_0(\tau)\frac{\tau + z}{\tau - z}\,\frac{d\tau}{\tau} - \frac{z}{2\pi i}\int_T \frac{f_1(\tau) + \tau f_0'(\tau)}{2}\frac{\tau + z}{\tau - z}\,\frac{d\tau}{\tau}\right) \tag{5}$$

и

$$\Psi_2(f_0, f_1, z) = \frac{e^{-\lambda_2/z}}{\lambda_1 - \lambda_2}\left(\frac{\lambda_1}{2\pi i}\int_T f_0(\tau)\frac{\tau + z}{\tau - z}\,\frac{d\tau}{\tau} - \right.$$
$$\left. - \frac{z}{2\pi i}\int_T \frac{f_1(\tau) + \tau f_0'(\tau)}{2}\,\frac{\tau + z}{\tau - z}\,\frac{d\tau}{\tau}\right). \tag{6}$$

Ясно, что функции Ψ_1 и Ψ_2 аналитичны в D^+ за исключением точки $z = 0$.

Лемма 1. *Функции $\Psi_1(f_0, f_1, z)$ и $\Psi_2(f_0, f_1, z)$ удовлетворяют условиям (4).*

Доказательство. Легко видеть, что функции Ψ_1 и Ψ_2 удовлетворяют равенствам

$$e^{\lambda_1/z}\Psi_1(f_0, f_1, z) + e^{\lambda_2/z}\Psi_2(f_0, f_1, z) = \frac{1}{2\pi i}\int_T f_0(\tau)\frac{\tau + z}{\tau - z}\,\frac{d\tau}{\tau}, \tag{7}$$

$$\frac{\lambda_1}{z}e^{\lambda_1/z}\Psi_1(f_0, f_1, z) + \frac{\lambda_2}{z}e^{\lambda_2/z}\Psi_2(f_0, f_1, z) + z e^{\lambda_1/z}\Psi_1'(f_0, f_1, z) +$$
$$+ z e^{\lambda_2/z}\Psi_2(f_0, f_1, z) == \frac{1}{2\pi i}\int_T f_1(\tau)\frac{\tau + z}{\tau - z}\,\frac{d\tau}{\tau}, \quad z \in D^+. \tag{8}$$

В силу равенства (7), для любого $r < 1$ и $|t| = 1$, имеем

$$\operatorname{Re}\,(e^{\lambda_1 r\bar{t}}\Psi_1(f_0, f_1, rt) + e^{\lambda_2 r\bar{t}}\Psi_2(f_0, f_1, rt)) =$$

$$= \operatorname{Re}\,\left((e^{\frac{\lambda_1 r}{t}} - e^{\frac{\lambda_1}{rt}})\Psi_1(f_0, f_1, rt) + (e^{\frac{\lambda_2 r}{t}} - e^{\frac{\lambda_2}{rt}})\Psi_2(f_0, f_1, rt)\right) +$$

$$+ \operatorname{Re}\,\frac{1}{2\pi i}\int_T f_0(\tau)\frac{\tau + rt}{\tau - rt}\,\frac{d\tau}{\tau}.$$

Учитывая, что

$$\left|e^{\frac{\lambda_j r}{t}} - e^{\frac{\lambda_j}{rt}}\right| < \text{const}\,(1-r), \quad j=1,2,$$

$$\lim_{r\to 1-0} \left\| \int_T f_0(\tau)\frac{\tau+rt}{\tau-rt}\,\frac{d\tau}{\tau} - f_0(t)\right\|_1 = 0,$$

получим первое равенство в (4). Для доказательства второго равенства в (4) выберем последовательность действительных функций $f_{jn}(t)$, $j,n=1,2$ так, чтобы $f_{jn}(t)\in C^{2+\alpha}(T)$ $(\alpha>0)$ и $f_{jn}(t)\to f_j(t)$ при $n\to\infty$ по метрике $L^1(T)$. Согласно равенству (8) для любого $n=1,2,\ldots$ имеем

$$\operatorname{Re}\,(\lambda_1\bar{t}e^{\lambda_1\bar{t}}\Psi_1(f_{0n},f_{1n},t)+\lambda_2\bar{t}e^{\lambda_2\bar{t}}\Psi_2(f_{0n},f_{1n},t)+$$

$$+te^{\lambda_1\bar{t}}\Psi_1'(f_{0n},f_{1n},t)+te^{\lambda_2\bar{t}}\Psi_2'(f_{0n},f_{1n},t))=f_{1n}(t), \quad t\in T.$$

Так как функции $\Psi_1(f_0,f_1,z)$ и $\Psi_2(f_0,f_1,z)$ принадлежат классу $C^{1+\alpha}(D_\varepsilon)$, где $D_\varepsilon=\{z:\ \varepsilon\le|z|\le 1\}$, $\alpha,\varepsilon>0$, то для любого $n=1,2,\ldots$ также имеем

$$\lim_{r\to 1-0}\|\operatorname{Re}\,(\lambda_1\bar{t}e^{\lambda_1 r\bar{t}}\Psi_1(f_{0n},f_{1n},rt)+\lambda_2\bar{t}e^{\lambda_2 r\bar{t}}\Psi_2(f_{0n},f_{1n},rt)+$$

$$+te^{\lambda_1 r\bar{t}}\Psi_1'(f_{0n},f_{1n},rt)+te^{\lambda_2 r\bar{t}}\Psi_2'(f_{0n},f_{1n},rt))-f_{1n}(t)\|_1=0. \tag{9}$$

Далее

$$\operatorname{Re}\,(\lambda_1\bar{t}e^{\lambda_1 r\bar{t}}\Psi_1(f_0,f_1,rt)+\lambda_2\bar{t}e^{\lambda_2 r\bar{t}}\Psi_2(f_0,f_1,rt)+$$

$$+te^{\lambda_1 r\bar{t}}\Psi_1'(f_0,f_1,rt)+te^{\lambda_2 r\bar{t}}\Psi_2'(f_0,f_1,rt))-f_1(t)=J_1(r,t)+J_2(r,t),$$

где

$$J_1(r,t)=\operatorname{Re}\,(\lambda_1\bar{t}e^{\lambda_1 r\bar{t}}\Psi_1(f_{0n},f_{1n},rt)+\lambda_2\bar{t}e^{\lambda_2 r\bar{t}}\Psi_2(f_{0n},f_{1n},rt)+$$

$$+te^{\lambda_1 r\bar{t}}\Psi_1'(f_{0n},f_{1n},rt)+te^{\lambda_2 r\bar{t}}\Psi_2'(f_{0n},f_{1n},rt))-f_{1n}(t),$$

$$J_2(r,t)=\operatorname{Re}\,(\lambda_1\bar{t}e^{\lambda_1 r\bar{t}}\Psi_1(f_0-f_{0n},f_1-f_{1n},rt)+\lambda_2\bar{t}e^{\lambda_2 r\bar{t}}\Psi_2(f_0-f_{0n},f_1-f_{1n},rt)+$$

$$+te^{\lambda_1 r\bar{t}}\Psi_1'(f_0-f_{0n},f_1-f_{1n},rt)+te^{\lambda_2 r\bar{t}}\Psi_2'(f_0-f_{0n},f_1-f_{1n},rt))-[f_1(t)-f_{1n}(t)].$$

Используя равенство (7), получим

$$J_2(r,t)=\operatorname{Re}\,((\lambda_1\bar{t}e^{\lambda_1 r\bar{t}}-\frac{\lambda_1}{rt}e^{\frac{\lambda_1}{rt}})\Psi_1(f_0-f_{0n},f_1-f_{1n},rt)+$$

$$+(\lambda_2\bar{t}e^{\lambda_2 r\bar{t}}-\frac{\lambda_2}{rt}e^{\frac{\lambda_2}{rt}})\Psi_2(f_0-f_{0n},f_1-f_{1n},rt)+$$

$$+(\bar{t}e^{\lambda_1 r\bar{t}} - \frac{1}{rt}e^{\frac{\lambda_1}{rt}})\Psi_1'(f_0 - f_{0n}, f_1 - f_{1n}, rt)+$$

$$+(\bar{t}e^{\lambda_2 r\bar{t}} - \frac{1}{rt}e^{\frac{\lambda_2}{rt}})\Psi_2'(f_0 - f_{0n}, f_1 - f_{1n}, rt))+$$

$$+ \operatorname{Re}\frac{1}{2\pi i}\int_T [f_1(\tau) - f_{1n}(\tau)]\frac{\tau + rt}{\tau - rt}\frac{d\tau}{\tau} - [f_1(t) - f_{1n}(t)].$$

Так как

$$\left|\lambda_j \bar{t} e^{\lambda_j r\bar{t}} - \frac{\lambda_j}{rt}e^{\frac{\lambda_j}{rt}}\right| < \text{const}\,(1-r), \quad j = 1, 2,$$

$$\|\int_T f(\tau)\frac{1-r^2}{|\tau - rt|^2}|d\tau|\,\|_1 \le \text{const}\,\|f\|_1, \quad f \in L^1(T),$$

$$\lim_{r\to 1-0}\|\operatorname{Re}\frac{1}{2\pi i}\int_T [f_1(\tau) - f_{1n}(\tau)]\frac{\tau + rt}{\tau - rt}\frac{d\tau}{\tau} - [f_1(t) - f_{1n}(t)]\|_1 = 0,$$

то для любого $\varepsilon > 0$ существует $r_0 < 1$ и N_0 такие, что $\|J_2(r,t)\|_1 < \varepsilon$, если $r_0 < r < 1$ и $n > N_0$. С учетом (9) доказательство Леммы 1 завершается.

3. Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \bar{z}^2} + a\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} + bu = g(z), \quad z \in D^+ \tag{10}$$

с граничными условиями

$$\lim_{r\to 1-0}\|\operatorname{Re} u(rt)\|_1 = 0,$$
$$\lim_{r\to 1-0}\|\operatorname{Re}\frac{\partial u(rt)}{\partial r}\|_1 = 0, \tag{11}$$

где $g(z)$ - бесконечно-дифференцируемая функция на $\overline{D}^+$. Справедлива

Лемма 2. *Любое решение $u(z)$ задачи (10), (11) является бесконечно-дифференцируемой функцией на $\overline{D}^+$.*

Доказательство. Положим

$$g_1(z) = -\frac{e^{\lambda_1 \bar{z}}}{\pi}\iint_{D^+}\frac{e^{-\lambda_1\bar{\zeta}}g(\zeta)}{\tau - z}\,d\xi\,d\eta, \quad z \in D^+, \quad \zeta = \xi + i\eta.$$

Функцию $u(z)$ можно представить в виде

$$u(z) = e^{\lambda_1\bar{z}}\varphi_1(z) + e^{\lambda_2\bar{z}}\varphi_2(z) + G(z), \tag{12}$$

где φ_1 и φ_2 - некоторые аналитические функции в D^+ и

$$G(z) = -\frac{e^{\lambda_2\bar{z}}}{\pi}\iint_{D^+}\frac{e^{-\lambda_2\bar{\zeta}}g_1(\zeta)}{\zeta - z}\,d\xi\,d\eta, \quad z \in D^+.$$

Подставляя (12) в (11), относительно функций φ_1 и φ_2 получаем условия :

$$\lim_{r\to 1-0} \| \operatorname{Re}\,(e^{\lambda_1 r\bar{t}}\varphi_1(rt) + e^{\lambda_2 r\bar{t}}\varphi_2(rt) + G(rt))\|_1 = 0, \tag{13}$$

$$\lim_{r\to 1-0} \| \operatorname{Re}\,(\lambda_1 \bar{t} e^{\lambda_1 r\bar{t}}\varphi_1(rt) + \lambda_2 \bar{t} e^{\lambda_2 r\bar{t}}\varphi_2(rt) + G(rt) +$$
$$+ t e^{\lambda_1 r\bar{t}}\varphi_1'(rt) + t e^{\lambda_2 r\bar{t}}\varphi_2'(rt) + tG'(rt))\|_1 = 0, \tag{14}$$

Отметим, что детерминант, составленный из коэффициентов производных искомых аналитических функций φ_1 и φ_2 в задаче (13), (14) обращается тождественно в нуль. Поэтому здесь нельзя применить результаты работы [1]. Обозначая

$$f_{0r}(t) = \operatorname{Re}\,(e^{\lambda_1 r\bar{t}}\varphi_1(rt) + e^{\lambda_2 r\bar{t}}\varphi_2(rt) + G(rt)), \quad t \in T,$$

получаем

$$\operatorname{Re}\,(e^{\lambda_1 \frac{r}{t}}\varphi_1(rt) + e^{\lambda_2 \frac{r}{t}}\varphi_2(rt)) = f_{0r}(t) - \operatorname{Re}\,G(rt) \tag{15}$$

и

$$\lim_{r\to 1-0} \|f_{0r}(t)\|_1 = 0. \tag{16}$$

Так как функция $e^{\lambda_k r z^{-1}}\varphi_k(rz)$ $(k = 1,2)$ аналитична в кольце $0 < |z| < r^{-1}$, то ее можно представить в виде

$$e^{\lambda_k \frac{r}{z}}\varphi_k(rz) = \phi^+_{kr}(z) + \phi^-_{kr}(z), \quad k = 1,2.$$

Функции $\phi^+_{kr}(z)$ и $\phi^-_{kr}(z)$ аналитичны в областях D^+ и $D^- = \{z : \ |z| > 1\}$, соответственно, причем

$$\phi^+_{kr}(z) = \frac{(r+1)s}{4r\pi i}\int_T \frac{e^{\frac{2\lambda_k r^2}{(1+r)\tau}}\varphi_k\left(\frac{s(1+r)}{2}\tau\right)}{\frac{s(r+1)}{2r}\tau - z}\,d\tau, \quad s<1, \quad k = 1,2 \tag{17}$$

и

$$\phi^-_{kr}(z) = \frac{1}{4\pi i}\int_T \frac{e^{\frac{2\lambda_k r}{\tau}}\varphi_k\left(\frac{r}{2}\tau\right)}{\frac{1}{2}\tau - z}\,d\tau, \quad |z| > \frac{1}{2}, \quad k = 1,2, \tag{18}$$

где $s > 0$ - произвольное число, $|z| < s$.

Теперь (15) можно переписать следующим образом :

$$\operatorname{Re}\,(\phi^+_{1r}(t) + \phi^+_{2r}(t)) = f_{0r}(t) + \operatorname{Re}\,G(rt) - \operatorname{Re}\,\phi^-_{1r}(t) - \operatorname{Re}\,\phi^-_{2r}(t), \quad t \in T.$$

Применяя формулу Шварца, получаем

$$\phi_{1r}^{+}(z)+\phi_{2r}^{+}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_T[f_{0r}(\tau)-\ \mathrm{Re}\ (G(r\tau)+\phi_{1r}^{-}(\tau)+\phi_{2r}^{-}(\tau))]\frac{\tau+z}{\tau-z}\,d\tau. \quad (19)$$

Положим

$$\phi_k^{-}(t)=\lim_{r\to 1-0}\phi_{kr}^{-}(t)=\frac{1}{4\pi i}\int_T\frac{e^{\frac{2\lambda_k}{\tau}}\varphi_k(\tau)}{\frac{1}{2}\tau-t}\,d\tau,\quad t\in T,\quad k=1,2.$$

Учитывая (16) и переходя к пределу в (19), при $r\to 1-0$, получим

$$\phi_1^{+}(z)+\phi_2^{+}(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int_T[\ \mathrm{Re}\ (G(\tau)+\phi_1^{-}(\tau)+\phi_2^{-}(\tau))]\frac{\tau+z}{\tau-z}\,d\tau, \quad (20)$$

где

$$\phi_k^{+}(z)=\frac{s}{2\pi i}\int_T\frac{e^{\frac{\lambda_k}{s\tau}}\varphi_k(s\tau)}{s\tau-z}\,d\tau,\quad |z|<s,\quad 0<s<1. \quad (21)$$

Так как $G(t)$, $\phi_1^{-}(t)$ и $\phi_2^{-}(t)$ бесконечно-дифференцируемые функции на T, то правая часть равенства (20) представляет бесконечно-дифференцируемую функцию на $\overline{D}^{+}$. Полагая

$$F_1(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int_T\ \mathrm{Re}\ (G(\tau)+\phi_1^{-}(\tau)+\phi_2^{-}(\tau))\frac{\tau+z}{\tau-z}\,d\tau,\quad z\in D^{+}$$

и учитывая (20) и (21), получаем

$$\frac{s}{2\pi i}\int_T\frac{e^{\frac{\lambda_1}{s\tau}}\varphi_1(s\tau)}{s\tau-z}\,d\tau+\frac{s}{2\pi i}\int_T\frac{e^{\frac{\lambda_2}{s\tau}}\varphi_2(s\tau)}{s\tau-z}\,d\tau=F_1(z),\quad |z|<s. \quad (22)$$

Дифференцируя (22) по θ $(z=rt=re^{i\theta})$, будем иметь

$$\frac{1}{2\pi i}\int_T e^{\frac{\lambda_1}{s\tau}}\varphi_1(s\tau)\left(\frac{1}{s\tau-rt}\right)'_{\tau}d\tau+\frac{1}{2\pi i}\int_T e^{\frac{\lambda_2}{s\tau}}\varphi_2(s\tau)\left(\frac{1}{s\tau-rt}\right)'_{\tau}d\tau=-rF_1'(rt).$$

Интегрируя по частям, получаем

$$\frac{1}{2\pi i}\int_T\frac{\lambda_1}{s\tau^2}e^{\frac{\lambda_1}{s\tau}}\varphi_1(s\tau)\frac{d\tau}{s\tau-z}+\frac{1}{2\pi i}\int_T\frac{\lambda_2}{s\tau^2}e^{\frac{\lambda_2}{s\tau}}\varphi_2(s\tau)\frac{d\tau}{s\tau-z}-$$

$$-\frac{s}{2\pi i}\int_T e^{\frac{\lambda_1}{s\tau}}\varphi_1'(s\tau)\frac{d\tau}{s\tau-z}-\frac{s}{2\pi i}\int_T e^{\frac{\lambda_2}{s\tau}}\varphi_2'(s\tau)\frac{d\tau}{s\tau-z}=F_1'(z). \quad (23)$$

Из (14) аналогично имеем

$$\frac{\lambda_1}{2\pi i}\int_T e^{\frac{\lambda_1}{s\tau}}\varphi_1(s\tau)\frac{d\tau}{s\tau(s\tau-z)}+\frac{\lambda_2}{2\pi i}\int_T e^{\frac{\lambda_2}{s\tau}}\varphi_2(s\tau)\frac{d\tau}{s\tau(s\tau-z)}+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_T \tau e^{\frac{\lambda_1}{s\tau}}\varphi_1'(s\tau)\frac{d\tau}{s\tau - z} + \frac{1}{2\pi i}\int_T \tau e^{\frac{\lambda_2}{s\tau}}\varphi_2'(s\tau)\frac{d\tau}{s\tau - z} = F_2(z), \quad |z| < s, \tag{24}$$

где $F_2(z)$ - аналитическая в D^+ и бесконечно-дифференцируемая на $\overline{D^+}$ функция. Из равенств (23) и (24) следует, что

$$\frac{\lambda_1}{2\pi i}\int_T e^{\frac{\lambda_1}{s\tau}}\varphi_1(s\tau)\frac{d\tau}{s\tau - z} + \frac{\lambda_2}{2\pi i}\int_T e^{\frac{\lambda_2}{s\tau}}\varphi_2(s\tau)\frac{d\tau}{s\tau - z} = F_3(z). \tag{25}$$

Здесь $F_3(z)$ - также аналитическая в D^+ и бесконечно-дифференцируемая на $\overline{D^+}$ функция. Из (22) и (25) получаем

$$\frac{1}{2\pi i}\int_T e^{\frac{\lambda_1}{s\tau}}\varphi_1(s\tau)\frac{d\tau}{s\tau - z} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\left(F_3(z) - \frac{\lambda_2}{s}F_1(z)\right) \equiv F_4(z), \quad |z| < s, \tag{26}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_T e^{\frac{\lambda_2}{s\tau}}\varphi_2(s\tau)\frac{d\tau}{s\tau - z} = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}\left(F_3(z) - \frac{\lambda_1}{s}F_1(z)\right) \equiv F_5(z), \quad |z| < s. \tag{27}$$

Равенство (26) можно переписать в виде

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{T_s}\left(e^{\frac{\lambda_1}{\tau}}\varphi_1(\tau) - F_4(\tau)\right)\frac{d\tau}{\tau - z} = 0, \quad |z| < s,$$

где $T_s = \{z;\ |z| = s\}$. Полагая

$$\varphi_{s1}^-(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{T_s}\left(e^{\frac{\lambda_1}{\tau}}\varphi_1(\tau) - F_4(\tau)\right)\frac{d\tau}{\tau - z}, \quad |z| > s,$$

находим

$$\varphi_1^+(t) - e^{-\frac{\lambda_1}{t}}\varphi_{s1}^-(t) = F_4(t)e^{-\frac{\lambda_1}{t}}, \quad |t| = s. \tag{28}$$

Так как $\exp(-\lambda_1 z^{-1})\cdot\varphi_{s1}^-(z)$ аналитична в $|z| > s$ и обращается в нуль на бесконечности, то из 28) получаем

$$\varphi_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{T_s}\frac{F_4(\tau)e^{-\frac{\lambda_1}{\tau}}}{\tau - z}d\tau = \frac{s}{2\pi i}\int_T\frac{F_4(s\tau)e^{-\frac{\lambda_1}{s\tau}}}{s\tau - z}d\tau, \quad |z| < s$$

для любого $|z| < 1$. Переходя к пределу при $s \to 1 - 0$ в последнем равенстве, будем иметь

$$\varphi_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_T\frac{F_4(\tau)e^{-\frac{\lambda_1}{\tau}}}{\tau - z}d\tau, \quad z \in D^+.$$

Следовательно, $\varphi_1(z)$ - бесконечно-дифференцируемая функция на $\overline{D^+}$. Аналогично, из (27) следует, что $\varphi_2(z)$ также бесконечно-дифференцируемая функция на $\overline{D^+}$. Лемма 2 доказана.

4. Теперь приведем наш основной результат.

Теорема. *Задача (1), (2) нетерова и ее индекс равен 4.*

Доказательство. Положим

$$u_o(z) = e^{\lambda_1 \bar{z}} \Psi_1(f_o, f_1, z) + e^{\lambda_2 \bar{z}} \Psi_2(f_o, f_1, z), \quad z \in D^+, \tag{29}$$

где Ψ_1 и Ψ_2 определяются равенствами (5) и (6), соответственно.

Пусть $h(z)$ - бесконечно-дифференцируемая функция на $\overline{D}^+$ такая, что

$$h(z) = \begin{cases} 1, & \frac{1}{2} \leq |z| \leq 1, \\ 0, & |z| < \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Пусть $v(z) = u(z) + u_o(z)h(z)$. Если $u(z)$ удовлетворяет уравнению (1), то функция $v(z)$ будет удовлетворять неоднородному уравнению

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \bar{z}^2} + a\frac{\partial v}{\partial \bar{z}} + bv = -L(u_o h). \tag{30}$$

Условия (2) примут вид

$$\lim_{r \to 1-0} ||\, \mathrm{Re}\, v(rt)||_1 = 0, \quad t \in T,$$

$$\lim_{r \to 1-0} ||\, \mathrm{Re}\, \frac{\partial v(rt)}{\partial r}||_1 = 0, \quad t \in T. \tag{31}$$

Так как $L(u_o h)$ - бесконечно-дифференцируемая на $\overline{D}^+$ функция, то применяя Лемму 2, заключаем, что каждое решение задачи (30), (31) также бесконечно-дифференцируемая функция на $\overline{D}^+$. Следовательно, условия (31) можно записать следующим образом

$$\mathrm{Re}\, v(t) = 0, \quad t \in T,$$

$$\mathrm{Re}\, \frac{\partial v(t)}{\partial r} = 0, \quad t \in T. \tag{32}$$

Положим

$$g_1(z) = -\frac{e^{\lambda_1 \bar{z}}}{\pi} \iint\limits_{D^+} \frac{e^{-\lambda_1 \bar{\zeta}} L(u_o h)}{\zeta - z} d\xi\, d\eta, \quad z \in D^+, \quad \zeta = \xi + i\eta.$$

Общее решение уравнения (30) можно представить в виде

$$v(z) = e^{\lambda_1 \bar{z}} \varphi_1(z) + e^{\lambda_2 \bar{z}} \varphi_2(z) + G(z),$$

где $\varphi_1(z)$ и $\varphi_2(z)$ - произвольные аналитические функции на D^+ и

$$G(z) = -\frac{e^{\lambda_2 \bar{z}}}{\pi} \iint\limits_{D+} \frac{e^{-\lambda_2 \bar{\zeta}} g_1(\zeta)}{\zeta - z} d\xi\, d\eta.$$

Подставляя $v(z)$ в (32), получаем

$$\mathrm{Re}\,(e^{\lambda_1 \bar{t}} \varphi_1(t) + e^{\lambda_2 \bar{t}} \varphi_2(t)) = -\,\mathrm{Re}\, G(t), \quad t \in T,$$

$$\mathrm{Re}\,(\lambda_1 \bar{t} e^{\lambda_1 \bar{t}} \varphi_1(t) + \lambda_2 \bar{t} e^{\lambda_2 \bar{t}} \varphi_2(t) + t e^{\lambda_1 \bar{t}} \varphi_1'(t) + t e^{\lambda_2 \bar{t}} \varphi_2'(t)) = \mathrm{Re}\, \frac{\partial G(t)}{\partial r}. \tag{33}$$

Функции $\varphi_1(z)$ и $\varphi_2(z)$ допускают представления (см. [2])

$$\varphi_j(z) = \frac{1}{\pi i} \int_T \mu_j(t) \ln(1 - \frac{z}{t}) dt + i C_j, \quad j = 1, 2, \tag{34}$$

где $\mu_j(t)$, $j = 1, 2$, - вещественнозначные функции, а C_j, $j = 1, 2$, - некоторые действительные числа. Если $\varphi_j(z)$, $j = 1, 2$ - бесконечно-дифференцируемы на T, то $\mu_j(t)$, $j = 1, 2$ также бесконечно-дифференцируема на T. В представлении (34) величины $\mu_j(t)$ и C_j определяются однозначно через $\varphi_j(t)$. Подставляя (34) в (33) получаем систему интегральных уравнений относительно функций $\mu_j(t)$. Такая система в классе бесконечно-дифференцируемых функций исследована в работе [3], в которой был вычислен индекс. Применяя результаты этой работы получим доказательство теоремы.

ABSTRACT. The paper considers a Riemann type problem in L^1 for the equation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \bar{z}^2} + a \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} + bu = 0, \quad z \in D^+,$$

where $D^+ = \{z : |z| < 1\}$ and a, b are complex numbers. We prove that this problem is Noetherian and of index 4, provided that the roots of the corresponding characteristic equation are distinct.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. М. Айрапетян, "Корректные граничные задачи для неправильно-эллиптических уравнений в классе L^1", Изв. АН Армении, Математика, том 26, №4, стр. 309 328, 1991.
2. Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные Интегральные Уравнения, М., Наука, 1968.
3. Н. Е. Товмасян, "К теории сингулярных интегральных уравнений", Дифф. уравнения, том 3, №1, стр. 69–80, 1967.

7 Декабря 1992

Армянский государственный инженерный университет